

A. AURIC

**Le calcul symbolique des coordonnées  
barycentriques**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1915), p. 481-508

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1915\\_4\\_15\\_\\_481\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__481_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[K'6a]

LE CALCUL SYMBOLIQUE  
DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES;

PAR M. A. AURIC,  
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

---

Nous nous proposons d'exposer dans ce Mémoire, d'une manière systématique, le calcul symbolique des coordonnées barycentriques.

Nous étudions d'abord les combinaisons linéaires des points-masse qui conduisent aux différences de points vulgairement appelés *couples* et improprement *vecteurs libres*; la propriété caractéristique de ces points de masse nulle est d'être situés sur le plan de l'infini de l'espace considéré.

Nous étudions ensuite les éléments-masse de degré supérieur et nous établissons les formules générales permettant de déterminer les diverses grandeurs géométriques qui en résultent : distance de deux points, surface d'un triangle, volume d'un tétraèdre, distance d'un point à une droite et à un plan, distance de deux droites, etc.

Nous résolvons complètement le problème qui consiste à déterminer dans un espace quelconque le nombre minimum d'éléments-masse auxquels une combinaison linéaire de tels éléments peut être ramenée.

Enfin, nous donnons en terminant les principes du calcul symbolique des systèmes linéaires.

*Définitions générales.* — Considérons, dans un domaine ou espace à  $k$  dimensions  $O(1, 2, 3, \dots, k+1)$  ou  $O'_{k+1}$ ,  $k+1$  pôles géométriques ou points de réf-

rence  $O_1, O_2, \dots, O_{k+1}$  auxquels sont respectivement appliqués  $k + 1$  masses ou coefficients algébriques  $m_1, m_2, \dots, m_{k+1}$  qui peuvent être par exemple des nombres algébriques appartenant à un corps  $C$ .

Ces masses ont pour résultante une masse totale

$$m_0 = \Sigma m_i$$

appliquée en un point géométrique  $M$  appartenant à l'espace  $O_{k+1}^1$ , lequel peut être précisément défini par l'ensemble des nombres  $m_1, m_2, \dots, m_{k+1}$ .

On dit que  $m_1, m_2, \dots, m_{k+1}$  sont les coordonnées barycentriques du point-masse  $m_0 M$  avec l'égalité fondamentale symbolique

$$m_0 M = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \dots + m_{k+1} O_{k+1}.$$

Les coordonnées barycentriques constituent un cas particulier des substitutions linéaires, car, dans la substitution linéaire générale

$$n_0 N = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \dots + m_{k+1} O_{k+1},$$

on aura généralement

$$\Sigma m_i = m_0 \neq n_0;$$

il suffira dès lors de poser

$$M = \frac{n_0}{m_0} N$$

pour ramener la substitution à une définition de coordonnée barycentrique.

*Sous-groupes de l'espace primitif.* — Si

$$m_{k+1} = m_k = m_{k-1} = \dots = m_{k-i+1} = 0$$

et  $m_{k-i} \neq 0$ , on dit que  $M$  appartient à l'espace

$$O(1, 2, \dots, k-i) \quad \text{ou} \quad O_{k-i}^1$$



ne sont pas tous nuls, car sinon les relations données ne seraient pas indépendantes.

Dans ces conditions, les  $h$  relations définissent un espace à  $k - h$  dimensions, sous-groupe de  $O'_{k+1}$  ainsi que des espaces définis par  $h - i$  de ces relations.

On peut évidemment remplacer une des relations ci-dessus par une combinaison linéaire

$$\varphi_i = \lambda_i^1 f_1 + \lambda_i^2 f_2 + \dots + \lambda_i^h f_h = 0.$$

Appelons  $\Delta$  le déterminant

$$\begin{vmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_h^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^h & q_2^h & \dots & q_h^h \end{vmatrix}$$

que nous supposons  $\neq 0$ ,  $\Delta_j^i$  le mineur correspondant à l'élément  $q_j^i$ ,  $\Delta(i, j)$  le déterminant  $\Delta$  dans lequel on remplace les éléments de la  $i^{\text{ième}}$  colonne  $q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^h$  respectivement par  $q_j^1, q_j^2, \dots, q_j^h$ , il viendra, en posant  $\lambda_j^i = \Delta_j^i$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \Delta m_1 + \Delta(1, h+1)m_{h+1} \\ & + \Delta(1, h+2)m_{h+2} + \dots + \Delta(1, k+1)m_{k+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \Delta m_2 + \Delta(2, h+1)m_{h+1} \\ & + \Delta(2, h+2)m_{h+2} + \dots + \Delta(2, k+1)m_{k+1} = 0, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \varphi_h = & \Delta m_h + \Delta(h, h+1)m_{h+1} \\ & + \Delta(h, h+2)m_{h+2} + \dots + \Delta(h, k+1)m_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

dont la matrice est

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \Delta & 0 & \dots & 0 & q_{h+1}^1 & q_{h+2}^1 & \dots & q_{k+1}^1 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & q_{h+1}^2 & q_{h+2}^2 & \dots & q_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & q_{h+1}^h & q_{h+2}^h & \dots & q_{k+1}^h \end{array} \right\|.$$



ou  $M_h^1$  avec la formule fondamentale symbolique

$$p_0^i N_i = p_1^i M_1 + p_2^i M_2 + \dots + p_h^i M_h$$

et

$$p_0^i = p_1^i + p_2^i + \dots + p_h^i.$$

Nous pourrions définir ainsi  $h$  points  $N_1, N_2, \dots, N_h$  et un espace  $N(1, 2, \dots, h)$  ou  $N_h^1$  qui sera le transformé de  $M_h^1$ .

Nous supposons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_h^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^h & p_2^h & \dots & p_h^h \end{vmatrix} \neq 0,$$

afin de pouvoir exprimer réciproquement  $M_i$  en fonction de  $N_j$  et en appelant  $\Delta_j^i$  le mineur correspondant à  $p_j^i$ , il viendra

$$\Delta M_i = p_0^1 \Delta_i^1 N_1 + p_0^2 \Delta_i^2 N_2 + \dots + p_0^h \Delta_i^h N_h$$

avec

$$p_0^1 \Delta_i^1 + p_0^2 \Delta_i^2 + \dots + p_0^h \Delta_i^h = \Delta,$$

ce qui montre que la relation ci-dessus est bien une définition de coordonnée barycentrique.

On aura également, en remplaçant  $M_1, M_2, \dots, M_h$  par leur valeur,

$$p_0^i N_i = \sum \left( p_1^i \frac{m_j^1}{m_0^1} + p_2^i \frac{m_j^2}{m_0^2} + \dots + p_h^i \frac{m_j^h}{m_0^h} \right) O_j = \Sigma n_j^i O_j.$$

La somme des coefficients

$$n_1^i + n_2^i + \dots + n_{k+1}^i$$

est égale à

$$\Sigma p_1^i \frac{\Sigma m_j^1}{m_0^1} = \Sigma p_1^i = p_0^i,$$

de sorte que nous avons bien une définition de coordonnée barycentrique.

On dira que l'espace  $N(1, 2, \dots, h)$  ou  $N_h^1$  est mis sous la première forme canonique lorsque la matrice des coefficients  $n_j^i$  sera

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 0 & \dots & 0 & n_{h+1}^1 & n_{h+2}^1 & \dots & n_{k+1}^1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & n_{h+1}^2 & n_{h+2}^2 & \dots & n_{k+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & n_{h+1}^h & n_{h+2}^h & \dots & n_{k+1}^h \end{array} \right\|.$$

Si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_h^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^h & m_2^h & \dots & m_h^h \end{vmatrix} \neq 0,$$

il est toujours possible de déduire de  $M_h^1$  un espace canonique  $N_h^1$ . Appelons comme précédemment  $\delta_j^i$  le mineur de  $\delta$  correspondant à l'élément  $m_j^i$  et  $\delta(i, j)$  la valeur que prend  $\delta$  lorsqu'on remplace les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  colonne  $m_1^i, m_2^i, \dots, m_h^i$  respectivement par  $m_j^1, m_j^2, \dots, m_j^h$ , on aura, en multipliant par  $\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^h$  et en ajoutant,

$$\begin{aligned} n_0^i N_i &= m_0^1 \delta_i^1 M_1 + m_0^2 \delta_i^2 M_2 + \dots + m_0^h \delta_i^h M_h \\ &= \delta O_i + \delta(i, h+1) O_{h+1} \\ &\quad + \delta(i, h+2) O_{h+2} + \dots + \delta(i, k+1) O_{k+1} \end{aligned}$$

avec

$$n_0^i = \Sigma m_0^j \delta_j^i = \Sigma \delta(i, j).$$

*Somme algébrique de points-masse.* — La notation du point-masse  $m_0 M$  tombant en défaut lorsque la masse est nulle, nous désignerons pour simplifier par  $\alpha_k^1, b_k^1, c_k^1, \dots$  des points de masse non nulle situés dans l'espace à  $k$  dimensions  $O_{k+1}^1$  et par  $\alpha_k^1, \beta_k^1, \gamma_k^1, \dots$



des points de masse nulle appartenant au plan de l'infini  $\Omega_{k+1}^!$ , et n'ayant en conséquence que  $k$  coordonnées indépendantes.

Par définition, la somme algébrique de plusieurs points-masse est un point-masse dont les coordonnées sont les sommes algébriques des coordonnées correspondantes des points-masse composants. Il est évident que, si les coordonnées de points-masse donnés satisfont à une ou plusieurs relations linéaires, toute combinaison linéaire de ces points satisfait également à ces relations; en particulier, toute combinaison linéaire des  $\alpha_k^!$ ,  $\beta_k^!$ ,  $\gamma_k^!$ , ... appartient aussi à  $\Omega_{k+1}^!$ .

Un point-masse peut toujours être considéré comme la différence de deux points-masse dont un est donné *a priori*; lorsque le point a une masse nulle, il est clair qu'il est la différence de deux points ayant même masse et qu'on peut le mettre sous la forme

$$m(M - N) \quad \text{ou} \quad m(P - M),$$

$m$  et  $M$  étant donnés *a priori*; on appelle souvent improprement *vecteur libre* le point de masse nulle; il est préférable de l'appeler *différence* ou *couple de points* ou plus simplement *couple*.

*Composition des couples.* — Pour composer plusieurs couples on peut :

1° Donner à tous les couples le même point initial (ou final); le second point du couple résultant sera le résultant des seconds points des couples composants

$$\begin{aligned} m_1(M - M_1) + m_2(M - M_2) + m_3(M - M_3) + \dots \\ = \Sigma m_i(M - N) \end{aligned}$$

si

$$m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3 + \dots = \Sigma m_i N;$$

2° Donner à tous les points des couples la même masse absolue  $\pm m$  et choisir comme premier point d'un couple, le deuxième point du couple précédent

$$m(M - N) + m(N - P) + m(P - Q) = m(M - Q),$$

c'est la composition bien connue des vecteurs libres. Soit un couple

$$\alpha_k^1 = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \dots + m_{k+1} O_{k+1}$$

avec

$$\Sigma m_i = 0;$$

P étant un point géométrique quelconque, on aura

$$0 = m_1 P + m_2 P + \dots + m_{k+1} P,$$

d'où

$$\alpha_k^1 = m_1(O_1 - P) + m_2(O_2 - P) + \dots + m_{k+1}(O_{k+1} - P),$$

en particulier si  $P = O_i$ ,  $\alpha_k^1$  sera exprimé en fonction des  $k$  couples  $O_j - O_i$ .

*Expression générale d'un couple.* — Considérons deux points de masse non nulle

$$m_0 M = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \dots + m_{k+1} O_{k+1},$$

$$n_0 N = n_1 O_1 + n_2 O_2 + \dots + n_{k+1} O_{k+1}.$$

Par combinaison linéaire on obtient la formule fondamentale

$$\begin{aligned} m_0 n_0 (M - N) &= \alpha_k^1 = \Sigma \begin{vmatrix} m_i & m_0 \\ n_i & n_0 \end{vmatrix} O_i \\ &= \Sigma \begin{vmatrix} m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{vmatrix} (O_i - O_j) = \Sigma \delta_{ij} (O_i - O_j), \end{aligned}$$

$\delta_{ij}$  étant un déterminant quelconque extrait de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \dots & m_{k+1} \\ n_1 & n_2 & \dots & n_{k+1} \end{array} \right\|.$$

Pour  $k = 1$ , on a

$$\alpha_1^1 = (m_1 n_2 - m_2 n_1)(O_1 - O_2)$$

ou

$$\frac{m_0 n_0 (M - N)}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{m_0 (M - O_2)}{m_1} = (O_1 - O_2),$$

ce qui permet d'établir la relation

$$(M - N)(O_1 - O_2) = (M - O_1)(N - O_2) - (M - O_2)(N - O_1).$$

Pour  $k = 2$ , il vient

$$\alpha_2^2 = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ O_2 - O_3 & O_3 - O_1 & O_1 - O_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_{23} & \delta_{31} & \delta_{12} \\ O_1 & O_2 & O_3 \end{vmatrix}.$$

Pour  $k = 3$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_3^3 &= \delta_{12}(O_1 - O_2) + \delta_{13}(O_1 - O_3) + \delta_{14}(O_1 - O_4) \\ &\quad + \delta_{23}(O_2 - O_3) + \delta_{34}(O_3 - O_4) + \delta_{42}(O_4 - O_2) \\ &= \Sigma(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14})O_1. \end{aligned}$$

Ces deux dernières formules donnent la décomposition d'un vecteur suivant les trois côtés d'un triangle de référence dans le plan ordinaire ou suivant les six arêtes d'un tétraèdre de référence dans l'espace ordinaire.

*Points dérivés.* — Lorsque les coordonnées d'un point-masse  $m_0 M$  sont des fonctions dérivables d'une ou plusieurs variables on peut dire par définition que les dérivées successives de ces coordonnées représentent des points qui sont les dérivés successifs de  $m_0 M$ ; ces points dérivés forment des ensembles ou des multiplicités suivant le nombre et la nature des variables ou paramètres.

En particulier, si les coordonnées de  $m_0 M$  sont des





élément à la condition de déterminer en conséquence la masse correspondante; ainsi un segment peut être remplacé par un segment quelconque de la droite servant de support, un triangle par un triangle quelconque contenu dans le même plan, etc.

Les coordonnées contenues dans le produit

$$m_0^1 m_0^2 \dots m_0^h M_1 \dots M_h$$

sont au nombre de  $h(k+1)$ ; nous avons vu, d'autre part, qu'on peut introduire  $h^2$  indéterminées  $n_j^i$  à la condition de les lier par une relation: il en résulte que les coordonnées vraiment indépendantes d'un élément-masse  $a_k^h$  sont au nombre de

$$h(k+1) - h^2 + 1 = h(k+1-h) + 1.$$

En d'autres termes, on peut profiter des  $h^2$  indéterminées  $n_j^i$  pour réduire l'élément et sa matrice à la forme canonique

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 0 & \dots & 0 & p_{h+1}^1 & \dots & p_{k+1}^1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & p_{h+1}^2 & \dots & p_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & p_{h+1}^h & \dots & p_{k+1}^h \end{array} \right\|$$

dans laquelle le nombre des coordonnées indépendantes est visiblement de  $h(k+1-h) + 1$ ; on voit aussi par cette expression que les éléments de degré  $h$  et de degré  $k+1-h$  (que nous appellerons *complémentaires*) ont le même nombre de coordonnées indépendantes.

Toute combinaison linéaire d'éléments-masse  $a_k^h$  s'obtient aisément en effectuant la combinaison linéaire correspondante sur les coefficients  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_h}$ ; toutefois, à l'encontre de ce qui se passe pour les points-masse, on n'obtient pas en général un élément-masse de même

degré, mais bien une expression de la forme

$$\Sigma m_{i_1, i_2, \dots, i_h} O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_h},$$

dans laquelle les coefficients  $m_{i_1, i_2, \dots, i_h}$  peuvent être considérés comme des coordonnées indépendantes.

Le nombre de ces coordonnées est

$$\mathfrak{C}_{k+1}^k = \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k+2-h)}{1.2.3\dots h} = \frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!}.$$

Ce nombre est évidemment le même pour des éléments ayant des degrés complémentaires.

Ces considérations permettent de déterminer d'une manière tout à fait élémentaire le nombre minimum  $\mathfrak{X}$  d'éléments-masse de degré  $h$  auxquels une combinaison linéaire quelconque de ces éléments peut être ramenée : il est clair que ce nombre  $\mathfrak{X}$  est le quotient par excès de la fraction

$$\frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)! [h(k+1-h)+1]}$$

et la différence

$$\mathfrak{X} [h(k+1-h)+1] - \frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!}$$

représente le nombre de conditions supplémentaires qu'on peut imposer à ce système réduit de  $\mathfrak{X}$  éléments.

Prenons le cas classique des segments-masse  $m_0 n_0 MN$  dans l'espace à trois dimensions  $h=2$ ,  $k=3$ .

On trouve aisément  $\mathfrak{X}=2$  avec  $2 \times 5 - 6 = 4$  conditions supplémentaires.

On sait en effet qu'un système linéaire quelconque de segments-masse ou forces peut être ramené à deux segments-masse, l'un passant par un point donné  $O$ , l'autre contenu dans un plan donné  $\pi$  (en tout 4 conditions).

Par le point  $O$  et chacun des segments  $M_i N_i$  on mène un plan qui coupe  $\pi$  suivant une droite  $A_i$  et l'on peut décomposer le segment-masse  $M_i N_i$  en deux segments-masse, l'un passant par  $O$ , l'autre porté par  $A_i$  : chacun de ces groupes a une résultante, l'une qui passe par  $O$ , l'autre contenue dans  $\pi$ .

Il n'y a d'exception à ce raisonnement que lorsque  $M_i N_i$  est parallèle à  $\pi$ , auquel cas le segment est porté par la droite de l'infini de  $\pi$  : la résultante peut être alors soit dans un plan parallèle à  $\pi$ , soit entièrement rejetée à l'infini sur ce plan.

Lorsque  $k$  est très grand, on peut dire que  $\mathfrak{X}$  tend asymptotiquement vers sa valeur principale

$$\frac{k^{h-1}}{h! h}$$

soit

$$\frac{k}{4} \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{18}$$

pour les éléments-masse des deuxième et troisième degrés.

$k + 1$  étant donné, le maximum de  $\mathfrak{X}$  a lieu lorsque  $h$  est aussi voisin que possible de  $\frac{k+1}{2}$ , d'où

$$\mathfrak{X} = \frac{(k+1)!}{\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)!\right]^2 \left[\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + 1\right]}$$

et lorsque  $h$  devient très grand la valeur asymptotique de  $\mathfrak{X}$  est, d'après les propriétés de l'intégrale eulérienne,

$$\mathfrak{X} \sim \frac{2^{k+\frac{7}{2}}}{\sqrt{\pi}(k+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Lorsque  $h = k + 1$  le produit de  $k + 1$  points-masse est nécessairement de la forme  $\alpha_k^{k+1} = m O_1 O_2 \dots O_{k+1}$ ,



de sorte que l'élément géométrique peut être sous-entendu et un pareil produit est en tous points comparable à un nombre algébrique  $m$ .

Au delà de  $k + 1$  facteurs le produit est toujours nul, car il se trouve nécessairement dans chaque produit partiel  $O_i O_i = 0$ , donc  $\alpha_k^{k+i} = 0$  pour  $i > 1$ .

Le produit de deux éléments de degrés complémentaires  $\alpha_h^k b_k^{k+1-h}$  est un élément  $c_k^{k+1}$  qui se comporte dans les combinaisons linéaires comme un nombre algébrique.

*Produit symbolique de couples.* — Avant d'étudier le produit symbolique obtenu en multipliant des points de masse nulle  $\alpha_k^1$ , il y a lieu d'établir une formule préliminaire. Posons

$$\begin{aligned} (M_1 - M_{h+1})(M_2 - M_{h+1}) \dots (M_h - M_{h+1}) &= \alpha_k^h, \\ (M_1 - P)(M_2 - P) \dots (M_h - P) &= \beta_k^h, \\ \beta_k^2 &= (M_1 - P)(M_2 - P) \\ &= M_1 M_2 - (M_1 - M_2)P = M_1 M_2 - \alpha_k^1 P. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que, si l'on a

$$\beta_k^h = M_1 M_2 \dots M_h - \alpha_k^{h-1} P,$$

on aura également

$$\beta_k^{h+1} = M_1 M_2 \dots M_{h+1} - \alpha_k^h P.$$

En effet, en remplaçant dans  $\beta_k^h$ ,  $P$  par  $M_{h+1}$ , on obtient  $\alpha_k^h$ , d'où

$$\alpha_k^h = M_1 M_2 \dots M_h - \alpha_k^{h-1} M_{h+1};$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \beta_k^{h+1} &= \beta_k^h (M_{h+1} - P) = (M_1 M_2 \dots M_h - \alpha_k^{h-1} P)(M_{h+1} - P) \\ &= M_1 M_2 \dots M_{h+1} - (M_1 M_2 \dots M_h - \alpha_k^{h-1} M_{h+1}) P \\ &= M_1 M_2 \dots M_{h+1} - \alpha_k^h P. \end{aligned} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut écrire comme il suit  $h$  points de masse nulle,  $P$  étant arbitrairement choisi et  $m = m_0^1 m_0^2 \dots m_0^{h+j} \neq 0$ ,

$$m_0^1 (M_1 - P) = m_1^1 (O_1 - P) + m_2^1 (O_2 - P) + \dots + m_{k+1}^1 (O_{k+1} - P),$$

$$m_0^2 (M_2 - P) = m_1^2 (O_1 - P) + m_2^2 (O_2 - P) + \dots + m_{k+1}^2 (O_{k+1} - P),$$

.....

$$m_0^h (M_h - P) = m_1^h (O_1 - P) + m_2^h (O_2 - P) + \dots + m_{k+1}^h (O_{k+1} - P),$$

et au-dessous  $j$  points de masse non nulle

$$m_0^{h+1} M_{h+1} = m_1^{h+1} O_1 + m_2^{h+1} O_2 + \dots + m_{k+1}^{h+1} O_{k+1},$$

.....

$$m_0^{h+j} M_{h+j} = m_1^{h+j} O_1 + m_2^{h+j} O_2 + \dots + m_{k+1}^{h+j} O_{k+1}.$$

En multipliant, il viendra

$$\begin{aligned} m(M_1 - P)(M_2 - P) \dots (M_h - P)M_{h+1} \dots M_{h+j} \\ = m(M_1 M_2 \dots M_h - \alpha_k^{h-1} P)M_{h+1} \dots M_{h+j} \\ = m(M_1 M_2 \dots M_{h+j} - \alpha_k^{h-1} P M_{h+1} \dots M_{h+j}) \\ = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \dots i_{h+j}} (O_{i_1} - P)(O_{i_2} - P) \dots (O_{i_h} - P) O_{i_{h+1}} \dots O_{i_{h+j}} \\ = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \dots i_{h+j}} (O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_h} - \gamma_k^{h-1} P) O_{i_{h+1}} \dots O_{i_{h+j}} \\ = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \dots i_{h+j}} (O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_{h+j}} - \gamma_k^{h-1} P O_{i_{h+1}} \dots O_{i_{h+j}}). \end{aligned}$$

Mais on a démontré précédemment que

$$m M_1 M_2 \dots M_{h+j} = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \dots i_{h+j}} O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_{h+j}};$$

dès lors, il reste, en supprimant le facteur commun  $P$ ,

$$m \alpha_k^{h-1} M_{h+1} \dots M_{h+j} = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \dots i_{h+j}} \gamma_k^{h-1} O_{i_{h+1}} \dots O_{i_{h+j}},$$

ce qui constitue la formule fondamentale pour le calcul des éléments formés par le produit de points de masse nulle.

On a en particulier les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 m_0^1 m_0^2 M_1 M_2 &= \Sigma \delta_{ij} O_i O_j, \\
 m_0^1 m_0^2 (M_1 - M_2) &= \Sigma \delta_{ij} (O_i - O_j), \\
 m_0^1 m_0^2 m_0^3 M_1 M_2 M_3 &= \Sigma \delta_{ijh} O_i O_j O_h, \\
 m_0^1 m_0^2 m_0^3 (M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) \\
 &= \Sigma \delta_{ijh} (O_i O_j + O_j O_h + O_h O_i), \\
 m_0^1 m_0^2 m_0^3 m_0^4 M_1 M_2 M_3 M_4 &= \Sigma \delta_{ijkl} O_i O_j O_h O_l, \\
 m_0^1 m_0^2 m_0^3 m_0^4 [M_1 M_2 M_3 - (M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) M_4] \\
 &= \Sigma \delta_{ijkl} (O_i O_j O_h - [O_i O_j + O_j O_h + O_h O_i] O_l),
 \end{aligned}$$

$\delta_{ij}$ ,  $\delta_{ijh}$ ,  $\delta_{ijkl}$  étant les déterminants extraits des matrices formées avec les coefficients des points composants.

Remarquons que le produit des  $h$  points de masse nulle  $\alpha_k^1$  par un point de masse non nulle  $mM$  est un produit de  $h + 1$  points de masse non nulle, car dans l'expression de  $\alpha_k^1 = m_0^k (M_i - P)$  il suffit de prendre  $P = M$  pour que le produit soit visiblement

$$m_0^1 m_0^2 \dots m_0^h m M_1 M_2 \dots M_h M.$$

Rappelons enfin que les éléments  $\alpha_k^h$ ,  $\beta_k^h$ , ... sont contenus dans  $\Omega_{k+1}^1$ , c'est-à-dire dans un espace à  $k - 1$  dimensions : dès lors, pour connaître le nombre minimum d'éléments  $\mathfrak{X}$  auxquels un système linéaire quelconque de ces éléments peut être ramené, il suffit de changer  $k$  en  $k - 1$  dans les formules établies plus haut.

*Applications géométriques.* — On a établi la formule

$$\frac{M_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1}} = \frac{m_1^1}{m_0^1},$$

c'est la définition habituelle des coordonnées barycen-

triques (surface du triangle  $M_1 O_2 O_3$  dans le plan ordinaire, volume du tétraèdre  $M_1 O_2 O_3 O_4$  dans l'espace ordinaire).

En utilisant la définition  $m_0^1 = \Sigma m_i^1$ , on a

$$O_1 O_2 \dots O_{k+1} = M_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} + O_1 M_1 O_3 \dots O_{k+1} + \dots \\ + O_1 O_2 \dots O_k M_1,$$

et il est aisé de voir que cette formule subsiste pour  $k + 2$  points quelconques.

En considérant deux points  $M_1, M_2$ , on a établi la relation

$$\frac{M_1 M_2 O_3 O_4 \dots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 O_4 \dots O_{k+1}} = \frac{(M_1 - M_2) O_3 O_4 \dots O_{k+1}}{(O_1 - O_2) O_3 O_4 \dots O_{k+1}} \\ = \frac{\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{vmatrix}}{m_0^1 m_0^2},$$

d'où en utilisant la formule précédente

$$M_1 M_2 O_3 \dots O_{k+1} - O_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} \\ = \begin{vmatrix} M_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 M_1 O_3 \dots O_{k+1} \\ M_2 O_2 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 M_2 O_3 \dots O_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Si  $k = 1$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont situés sur  $O_1 O_2$  et l'on a

$$M_1 M_2 \cdot O_1 O_2 = M_1 O_1 \cdot M_2 O_2 - M_1 O_2 \cdot M_2 O_1.$$

Avec trois points  $M_1, M_2, M_3$ , on a la relation

$$\frac{M_1 M_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 O_4 \dots O_{k+1}} = \frac{(M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) O_4 \dots O_{k+1}}{(O_1 O_2 + O_2 O_3 + O_3 O_1) O_4 \dots O_{k+1}} \\ = \frac{\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{vmatrix}}{m_0^1 m_0^2 m_0^3},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
 & M_1 M_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1} \cdot (O_1 O_2 \dots O_{k+1})^2 \\
 &= \begin{vmatrix} M_1 O_2 \dots O_{k+1} & O_1 M_1 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 O_2 M_1 O_4 \dots O_{k+1} \\ M_2 O_2 \dots O_{k+1} & O_1 M_2 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 O_2 M_2 O_4 \dots O_{k+1} \\ M_3 O_2 \dots O_{k+1} & O_1 M_3 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 O_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1} \end{vmatrix}, \\
 &= M_1 M_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 \dots O_{k+1} \\
 &= M_1 M_2 O_3 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1} \\
 &\quad + M_2 M_3 O_3 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 M_1 O_4 \dots O_{k+1} \\
 &\quad + M_3 M_1 O_3 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 M_2 O_4 \dots O_{k+1} \\
 &= M_1 M_2 O_3 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 M_3 O_4 \dots O_{k+1} \\
 &\quad + O_1 M_1 M_2 O_4 \dots O_{k+1} \cdot M_3 O_2 O_3 \dots O_{k+1} \\
 &\quad + M_2 O_2 M_1 O_4 \dots O_{k+1} \cdot O_1 M_3 O_3 \dots O_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Si  $M_1, M_2, M_3$  sont en ligne droite, on a nécessairement

$$M_1 M_2 M_3 = 0$$

et

$$M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1 = 0,$$

et cette dernière relation subsiste quel que soit l'espace  $O_{k+1}$ .

Avec quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \dots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1}} \\
 &= \frac{[M_1 M_2 M_3 - (M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) M_4] O_5 \dots O_{k+1}}{[O_1 O_2 O_3 - (O_1 O_2 + O_2 O_3 + O_3 O_1) O_4] O_5 \dots O_{k+1}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 & m_4^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_4^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 & m_4^3 \\ m_1^4 & m_2^4 & m_3^4 & m_4^4 \end{vmatrix}}{m_0^1 m_0^2 m_0^3 m_0^4}.
 \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} & M_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} \\ &= \Sigma M_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} \cdot O_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \dots O_{k+1} \\ &= \Sigma M_1 M_2 O_3 O_4 \dots O_{k+1} \cdot O_1 O_2 M_3 M_4 O_5 \dots O_{k+1}. \end{aligned}$$

Lorsque  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont situés dans un même plan  $O_3^1$ , on a

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = 0$$

et

$$M_1 M_2 M_3 - M_1 M_2 M_4 - M_2 M_3 M_4 - M_3 M_1 M_4 = 0,$$

et cette dernière relation subsiste quel que soit l'espace considéré  $O_{k+1}^1$ .

Rappelons la formule générale

$$m_0^1 m_0^2 \dots m_0^h M_1 M_2 \dots M_h = \Sigma \delta_{i_1 i_2 i_h} O_{i_1} O_{i_2} O_{i_h},$$

$\delta_{i_1 i_2 i_h}$  étant un déterminant extrait de la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^h & m_2^h & \dots & m_{k+1}^h \end{array} \right\|.$$

Si  $h = k$ , on aura

$$\begin{aligned} & m_0^1 m_0^2 \dots m_0^k M_1 M_2 \dots M_k \\ &= \left| \begin{array}{ccc} m_1^1 & m_2^1 & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1^k & m_2^k & m_{k+1}^k \\ O_2 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 O_3 \dots O_{k+1} & O_1 O_2 \dots O_k \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Appelons

$$p_1 O_1 + p_2 O_2 + \dots + p_{k+1} O_{k+1} = P(O_i) = 0$$

l'équation du plan général contenant  $M_1, M_2, \dots, M_k$  et

appelons  $\Omega$  le point géométrique symbolique dont les coordonnées sont

$$O_2 O_3 \dots O_{l+1}, \quad O_1 O_3 \dots O_{k+1}, \quad \dots, \quad O_1 O_2 \dots O_k,$$

on aura

$$m_0^1 m_0^2 \dots m_0^k M_1 M_2 \dots M_k = \lambda \Sigma p_1 O_2 O_3 \dots O_{k+1} = \lambda P(\Omega).$$

En multipliant par le point  $m_0^{k+1} M_{k+1}$ , il viendra

$$m_0^1 m_0^2 \dots m_0^{k+1} \frac{M_1 M_2 \dots M_{k+1}}{O_1 O_2 \dots O_{k+1}} = \lambda \Sigma p_1 m_0^{k+1} = \lambda P(m_0^{k+1}),$$

d'où divisant membre à membre

$$\frac{M_1 M_2 \dots M_{k+1}}{M_1 M_2 \dots M_k} = \frac{P(m_0^{k+1})}{m_0^{k+1} P(\Omega)} O_1 O_2 \dots O_{k+1}.$$

On peut admettre que  $M_1 M_2 \dots M_{k+1}$  est égal à une constante près  $\mu$  au produit de l'élément  $M_1 M_2 \dots M_k$  par la distance  $d_k$  de  $M_{k+1}$  au plan général contenant cet élément, d'où

$$\mu d_k = \frac{P\left(\frac{m_0^{k+1}}{m_0^{k+1}}\right)}{P(\Omega)} O_1 O_2 \dots O_{k+1}.$$

En particulier, dans l'espace  $O_3^1$  ou plan ordinaire  $k = 2$ , on a

$$m_0^1 m_0^2 M_1 M_2 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ O_2 O_3 & O_3 O_1 & O_1 O_2 \end{vmatrix} = \Sigma \delta_{ij} O_i O_j,$$

$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 M_1 M_2 M_3 = (\delta_{23} m_1^3 + \delta_{31} m_2^3 + \delta_{12} m_3^3) O_1 O_2 O_3.$$

Posons, comme il est d'usage,

$$M_1 M_2 M_3 = \frac{M_1 M_2 \times d_2}{2},$$

$d_2$  étant la perpendiculaire abaissée de  $M_3$  sur  $M_1 M_2$

il vient

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{{}_2M_1M_2M_3}{M_1M_2} = \frac{{}_2\Sigma \delta_{23} m_1^3}{m_0^4 \Sigma \delta_{23} O_2 O_3} O_1 O_2 O_3 \\ &= \frac{{}_2D \left( \frac{m_1^3}{m_0^3} \right)}{D(O_2 O_3)} O_1 O_2 O_3, \end{aligned}$$

$D(m_i) = 0$  étant l'équation de la droite  $M_1 M_2$ .

De même dans l'espace ordinaire à trois dimensions  $k = 3$ , on posera

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = \frac{M_1 M_2 M_3 \times d_3}{3},$$

$d_3$  étant la perpendiculaire abaissée de  $M_4$  sur  $M_1 M_2 M_3$ , d'où

$$d_3 = \frac{{}_3P \left( \frac{m_4^3}{m_0^3} \right)}{P(O_2 O_3 O_4)} O_1 O_2 O_3 O_4.$$

$P(m_i) = 0$  étant l'équation du plan  $M_1 M_2 M_3$ .

Plus généralement, si l'on pose

$$\begin{aligned} M_1 M_2 \dots M_{h+1} &= M_1 M_2 \dots M_h \\ &\times M_{h+1} M_{h+2} \dots M_{h+1} \times d_{h, k+1-h}, \end{aligned}$$

la multiplication du second membre étant algébrique et non symbolique, on pourra, à un facteur numérique près, appeler  $d_{h, k+1-h}$  la plus courte distance des éléments  $M_1 M_2 \dots M_h$ ,  $M_{h+1} M_{h+2} \dots M_{k+1}$  et il sera facile de la calculer.

En particulier, dans l'espace ordinaire  $O_4^1$ , on posera comme d'usage

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = M_1 M_2 \times M_3 M_4 \times d_{2,2},$$

$d_{2,2}$  étant la plus courte distance des droites  $M_1 M_2$  et  $M_3 M_4$ .

Si  $\Sigma \delta_{ij}^2 O_i O_j = 0$  est l'équation de  $M_1 M_2$ , on trouve



aisément

$$d_{2,2} = \frac{6 \Sigma \delta_{ij}^2 \delta_{j'i}^2}{\Sigma \delta_{ij}^2 O_i O_j \Sigma \delta_{j'i}^2 O_i' O_j'} O_1 O_2 O_3 O_4,$$

$i, j, i', j'$  étant les indices successifs 1, 2, 3, 4 sans omission ni répétition.

Dans la relation

$$m_0^1 m_0^2 M_1 M_2 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_1^2 & m_1^3 \\ m_2^1 & m_2^2 & m_2^3 \\ O_2 O_3 & O_3 O_1 & O_1 O_2 \end{vmatrix} = \Sigma \delta_{12} O_1 O_2$$

posons

$$O_2 O_3 = a_1 e^{i\theta_1}, \quad M_1 M_2 = \rho e^{i\sigma},$$

il viendra

$$m_0^1 m_0^2 \rho e^{i\sigma} = \Sigma \delta_{23} a_1 e^{i\theta_1},$$

et en changeant  $i$  en  $-i$ ,

$$m_0^1 m_0^2 \rho e^{-i\sigma} = \Sigma \delta_{23} a_1 e^{-i\theta_1}.$$

Appelons :

I le point de coordonnées

$$a_1 e^{i\theta_1}, \quad a_2 e^{i\theta_2}, \quad a_3 e^{i\theta_3},$$

J le point de coordonnées

$$a_1 e^{-i\theta_1}, \quad a_2 e^{-i\theta_2}, \quad a_3 e^{-i\theta_3},$$

ce sont les points cycliques du plan.

Il vient en divisant

$$e^{2i\sigma} = \frac{\Sigma \delta_{23} a_1 e^{i\theta_1}}{\Sigma \delta_{23} a_1 e^{-i\theta_1}} = \frac{D(J)}{D(I)},$$

$D(m_1) = 0$  étant l'équation de la droite  $M_1 M_2$  et

$$\sigma = \frac{1}{2i} L \frac{D(I)}{D(J)}.$$

Pour une autre droite, on a

$$\sigma' = \frac{1}{2i} L \frac{D'(I)}{D'(J)}.$$

et

$$\sigma - \sigma' = \frac{1}{2i} L \frac{D(I)}{D(J)} \frac{D'(J)}{D'(I)},$$

c'est la définition bien connue depuis Laguerre de l'angle de deux droites par le rapport anharmonique qu'elles déterminent avec les points cycliques sur la droite de l'infini.

On voit immédiatement que les segments géométriques portés par une droite passant par I et J et appelée habituellement *isotrope* ont une longueur nulle, car le déterminant correspondant est nul.

La longueur de  $\rho = M_1 M_2$  est obtenue aisément par la formule

$$\begin{aligned} (m_0^1 m_0^2 \rho)^2 &= \Sigma \delta_{23} a_1 e^{i\theta_1} \Sigma \delta_{23} a_1 e^{-i\theta_1} \\ &= \Sigma (\delta_{23} a_1)^2 + 2 \Sigma \delta_{12} \delta_{23} a_3 a_1 \cos(\theta_3 - \theta_1). \end{aligned}$$

*Le calcul symbolique des systèmes linéaires.* — On appelle *système linéaire* S le tableau formé par  $(k+1)^2$  coefficients disposés en carré dans un ordre déterminé et qui peuvent représenter soit les coordonnées barycentriques de  $k+1$  points-masse dans  $O_{k+1}$ ,

$$m_0^i M_i = m_1^i O_1 + m_2^i O_2 + \dots + m_{k+1}^i O_{k+1},$$

soit la forme bilinéaire

$$\Sigma m_j^i u_i v_j,$$

soit la substitution linéaire qui exprime  $x_i$  en fonction de  $y_i$ ,

$$m_0^i x_i = m_1^i y_1 + m_2^i y_2 + \dots + m_{k+1}^i y_{k+1}$$

ou plus simplement d'une manière symbolique

$$x = S y.$$

A un tableau peuvent ne correspondre ni point-

masse ni substitution proprement dite, par exemple si tous les éléments d'une ligne sont nuls; le tableau n'en aura pas moins une définition formelle.

On voit, en particulier, qu'un tableau dont tous les éléments sont nuls jouit, au point de vue du calcul symbolique, de toutes les propriétés du nombre zéro.

On dit qu'un système linéaire, qu'une substitution, qu'un tableau sont bien déterminés dans  $O_{k+1}^1$  lorsque le déterminant correspondant est différent de zéro.

La combinaison linéaire d'un nombre quelconque de systèmes linéaires A, B, C, ..., soit

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots$$

s'obtient en effectuant ladite combinaison sur les éléments correspondants, ce qui donne l'élément du tableau demandé.

Si l'on a deux substitutions linéaires bien déterminées

$$x = Sy, \quad y = Tz$$

et si l'on a, en exprimant directement  $x$  en fonction de  $z$ ,

$$x = Uz,$$

on dira que le système U est le produit de S par T et l'on posera

$$U = ST.$$

Cette définition et le procédé formel qui en dérive s'appliqueront même dans le cas où S et T ne seraient pas des substitutions bien déterminées.

Si l'on a une substitution de ce genre

$$x = Sy$$

et qu'on en tire

$$y = S_{-1}x,$$

on dira que S et  $S_{-1}$  sont inverses l'une de l'autre et

que leur produit est l'unité

$$SS_{-1} = S_{-1}S = 1,$$

l'unité étant un système composé d'éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale descendante qui sont tous égaux à 1.

En général,  $ST \neq TS$ ; dans le cas où ces produits sont égaux, les substitutions sont dites *permutables*.

Étant donné un système S, on appelle *système associé* S' celui obtenu en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes.

La somme  $S + S'$  donne un système symétrique droit D; la différence  $S - S'$  un système symétrique gauche G dont tous les éléments de la diagonale principale sont nuls.

On sait (1) qu'un système linéaire S est racine d'une équation algébrique symbolique dont le degré est au plus égal à  $k + 1$ .

En effet, en appelant

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} m_1 - \lambda & m_2^1 & m_3^1 & \dots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 - \lambda & m_3^2 & \dots & m_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{k+1} & m_2^{k+1} & m_3^{k+1} & \dots & m_{k+1}^{k+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation en  $\lambda$  du déterminant correspondant, on a symboliquement

$$F(S) = 0$$

et, selon que  $F(\lambda) = 0$  est irréductible ou réductible,  $F(S) = 0$  est de degré  $k + 1$  ou d'un degré moindre. Plus généralement, si l'on développe le déterminant du système linéaire  $\lambda T - \mu S$ , on trouve une équation

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

---

(1) Voir LAGUERRE, *Sur le calcul des systèmes linéaires*, p. 223.

qui est vérifiée symboliquement et l'on a

$$F(S, T) = 0.$$

Les systèmes  $S, T, U, \dots$  sont également racines d'équations algébriques de degrés  $\leq k + 1$  et il en est de même d'une expression symbolique quelconque de ces systèmes; il y a lieu toutefois de remarquer qu'en général

$$ST \neq TS,$$

mais la somme  $ST + TS$  peut être considérée comme un véritable nombre algébrique. On démontrerait qu'il en est de même d'une expression symétrique quelconque des systèmes  $S, T, U, \dots$ .

Il en résulte que finalement l'étude des systèmes linéaires se ramène à celle des nombres algébriques et à la théorie des substitutions dont elle n'est qu'un cas très particulier.