

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 468-476

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__468_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

511.

(1860, p. 46.)

Soient sept carrés égaux, de telle sorte que chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite qui lui est commune avec le carré voisin (voir la figure, 1915, p. 331); le carré 1 ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré 7, et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré 1 est maintenu fixe, il n'y a que le carré 7 qui soit entièrement libre. MÖBIUS.

SOLUTION

Par M. R. B.

Il est vrai que cet énoncé est très mal rédigé, mais, contrairement à l'opinion de M. Laisant (p. 331), il me paraît facile d'en restituer le sens, à la condition d'y reconnaître une question de *Géométrie dans l'espace*.

Möbius considère 7 corps rigides, constitués par les carrés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, chacun de ces corps étant articulé à charnières avec le suivant.

Si l'on suppose fixe le carré 1, le carré 2 possède une liberté du premier degré (c'est-à-dire qu'il peut occuper ∞^1 positions); le carré 3 possède une liberté du deuxième degré; ...; le carré 7, une liberté du sixième degré. Ce dernier carré, et celui-là seul, est donc complètement libre, comme l'affirme l'énoncé. Autrement dit, ce carré peut être amené à occuper dans l'espace une position quelconque (dans une certaine région, bien entendu).

La question est, on le voit, très banale.

718.

(1867, p. 48.)

Trouver l'équation de la podaire négative de la développante de l'ellipse, le centre étant le pôle. STREBOR.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soient M un point d'une courbe (C) , PMP' la perpendiculaire en M au rayon vecteur OM .

L'enveloppe des droites PMP' sera, par définition, la podaire négative ou inverse de la courbe (C) .

Si la courbe (C) est la développée (δ) de l'ellipse (E) , il y aura moyen de parvenir à l'équation algébrique de la podaire négative de (δ) , comme déjà pour celle de l'ellipse (E) ou la courbe dite de Talbot, mais cette recherche ne laissera pas d'être extraordinairement compliquée.

Au contraire, s'il s'agit bien d'une développante (Δ) de l'ellipse (E) , la question 748, telle qu'elle est énoncée, n'admettra pas de solution en l'état actuel de l'analyse, car il sera impossible d'obtenir l'équation de la courbe (Δ) en termes finis, même en prenant pour origine un des sommets de (E) .

L'impossibilité sera encore plus manifeste pour une podaire positive ou négative de (Δ) .

Je ne pense pas que *Strebor* (W. Roberts) ait lui-même publié la moindre indication pour une réponse quelconque attendue ici depuis cinquante ans révolus.

1505.

(1884, p. 117, 1902, p. 560, 1903, p. 48.)

De chaque point M du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse une perpendiculaire MP sur la droite de Simson relative à ce point et à ce triangle; on demande :

- 1° *Le lieu du pied P de cette perpendiculaire;*
- 2° *L'enveloppe de la droite MP .* M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Ce problème est une occasion d'appliquer la forme remarquablement élégante que M. Badoureau a su donner naguère à l'équation de la droite de Simson (*Nouvelles Annales*, 1879, p. 33).

L'origine des coordonnées rectangulaires étant prise au centre du cercle des neuf points du triangle donné ABC et la

direction de l'axe Ox choisie de telle sorte que, si les rayons du cercle circonscrit aboutissant en A, B, C font avec cette direction les angles α, β, γ , on ait

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

si d'ailleurs r est le rayon du cercle circonscrit, φ l'angle que le rayon de ce cercle aboutissant en M fait avec Ox , on a, pour la droite de Simson relative au point M et au triangle ABC, l'équation

$$(1) \quad x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{2} \sin \frac{3\varphi}{2},$$

et l'on trouve aisément pour son enveloppe les équations

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi + \frac{r}{2} \cos 2\varphi, \\ y = r \sin \varphi - \frac{r}{2} \sin 2\varphi, \end{cases}$$

qui définissent une hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon $\frac{r}{2}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{3r}{2}$.

La perpendiculaire MP à la droite de Simson menée par le point M a pour coefficient angulaire $\cot \frac{\varphi}{2}$. Mais, pour que son équation ait une forme simple, *il faut ramener, en conservant la direction des axes, l'origine au centre du cercle circonscrit*, parce qu'alors les coordonnées du point M sont

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Dans ces conditions, l'équation de cette perpendiculaire est

$$(y - r \sin \varphi) \sin \frac{\varphi}{2} = (x - r \cos \varphi) \cos \frac{\varphi}{2}$$

ou

$$(3) \quad x \cos \frac{\varphi}{2} - y \sin \frac{\varphi}{2} = r \cos \frac{3\varphi}{2}.$$

Le point où cette droite touche son enveloppe est à son intersection avec la droite dont l'équation est la dérivée de la

précédente par rapport à φ . soit

$$x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} = 3r \sin \frac{3\varphi}{2}.$$

De ces deux équations on tire facilement

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2r \cos \varphi - r \cos 2\varphi, \\ y = 2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi, \end{cases}$$

qui définissent une hypocycloïde à trois rebroussements semblable à la précédente, avec des dimensions doubles, mais ayant un de ses sommets sur Ox , alors que la précédente y a un de ses points de rebroussement.

En somme, depuis d'un sommet à un rebroussement d'une telle hypocycloïde, il y a un écart angulaire de $\frac{\pi}{3}$, on voit que l'on passe de la première à la seconde au moyen de : 1° une homothétie de rapport 2 relativement au centre du cercle des neuf points; 2° une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de ce point; 3° une translation amenant le centre du cercle des neuf points du triangle ABC sur le centre de son cercle circonscrit.

Pour trouver le lieu du point de rencontre des droites définies, par rapport à l'un et à l'autre des systèmes de coordonnées, par les équations (1) et (3), il faudrait les rapporter à un même système d'axes en remplaçant, par exemple, dans l'équation (3), x et y par $x + x_1$ et $y + y_1$, x_1 et y_1 étant les coordonnées du centre du cercle des neuf points rapportées aux axes menés par le centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire

$$x_1 = \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{2}, \quad y_1 = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{2}.$$

L'équation ainsi obtenue, jointe à (1), définirait les coordonnées du point P, rapportées aux axes menés par le centre du cercle des neuf points, en fonction de l'angle φ . Mais ni les expressions explicites, faciles à former, de x et de y en fonction de cet angle, ni l'équation en x et y qui s'obtiendrait par l'élimination de φ entre les deux équations ne semblent devoir offrir de caractères particulièrement intéressants.

(472)

1531.

(1885, p. 248.)

Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant.

GENTY.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Ce théorème est une application immédiate de la théorie des invariants. D'ailleurs c'est par cette méthode qu'il se trouve démontré dans un article de M. Mangeot (*Nouv. Ann.*, 1886, p. 480).

1630.

(1892, p. 114.)

Voir énoncé, 1915, p. 139.

NOTE

Par M. R. BOUVAIST.

Dans le numéro de mars 1915 (p. 139), M. Brocard déduit la solution de la question **1630** de la proposition suivante :

On donne un triangle ABC et une ellipse, tangente en B et C aux côtés AB et AC et passant par le barycentre G. Le rayon de courbure en ce point est le même que celui du cercle circonscrit au triangle si ledit *triangle* est moyen en A.

Voici de cette proposition une démonstration très simple :

Soit ω le centre de l'ellipse considérée, soit M le milieu de BC. On a

$$\overline{\omega G}^2 = \omega M \cdot \omega A,$$

d'où, puisque

$$3 MG = MA, \quad \omega G = 2 \omega M,$$

on a aussi, si ωK est le diamètre parallèle à BC,

$$\frac{\overline{\omega M}^2}{\overline{\omega G}^2} + \frac{\overline{MB}^2}{\overline{\omega K}^2} = 1, \quad \text{d'où} \quad \omega k = \frac{2MB}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{\sqrt{3}}.$$

Si ρ est le rayon de courbure en G,

$$\rho = \frac{\overline{\omega K}^2}{\omega G \sin \widehat{AMC}} = \frac{\overline{BC}^2}{3 \omega G \sin \widehat{AMC}}$$

(473)

et

$$\rho = \frac{\overline{BC}^2}{2A \alpha \sin AMC} = \frac{\overline{BC}^2}{2AH},$$

H étant le pied de la hauteur issue de A, d'où

$$\rho = \frac{AB \cdot AC}{2AH} = R,$$

rayon du cercle circonscrit à ABC.

1770.

(1897, p. 291.)

Soient

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + pw^2 = 0$$

l'équation d'une surface de second ordre conjuguée au tétraèdre de référence; a, b, c, d, e, f les arêtes de ce tétraèdre; A, B, C, D les aires de ses faces et V son volume; α, β, γ les demi-axes de la surface; on a

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = -36 \frac{l^3 m^3 n^3 p^3 A^2 B^2 C^2 D^2 V^2}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^3},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -lmnp \frac{\left\{ \begin{array}{l} mnA^2 D^2 a^2 + nlB^2 D^2 b^2 + lmC^2 D^2 c^2 \\ + lpB^2 C^2 d^2 + mpC^2 A^2 e^2 + npA^2 B^2 f^2 \end{array} \right\}}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^2},$$

$$\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2 = \frac{l^2 m^2 n^2 p^2 (l + m + n + p)(A^2 B^2 C^2 D^2)}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^3}.$$

La condition pour que la surface représente un paraboloïde est donc

$$mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2 = 0.$$

GENTY.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

La question 1770 revient à calculer les longueurs des axes d'une quadrique donnée par son équation en coordonnées tétraédriques; le tétraèdre de référence étant conjugué par rapport à la quadrique.

Le calcul a été fait dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où le tétraèdre de référence est quelconque, par Painvin

(*Géométrie analytique*, t. II, 1^{re} Partie, p. 418 et suiv.). Les formules auxquelles il arrive sont fort compliquées, malgré leur symétrie. Elles se simplifient notablement dans le cas où le tétraèdre de référence est conjugué par rapport à la quadrique et l'on retrouve les formules de la question 1770. (Voir aussi KOELHER, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, t. II, p. 318.)

1834.

(1900, p. 92.)

Étant données deux coniques S et S', trouver le lieu d'un point P tel que l'on puisse mener de ce point une tangente à S et une tangente à S' perpendiculaires entre elles.

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les points multiples de C_8 et les foyers réels et imaginaires des deux coniques S et S' sont sur une même courbe C_3 du troisième ordre qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite de l'infini, lorsque S et S' sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe C_3 . Le lieu cherché C_8 est tangent en huit points à chacune des coniques données; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. FRANEL.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

La première étude à ce sujet me paraît due à Terquem, dans un article de ce Journal, t. VIII, 1849, p. 282-284: *Note sur l'angle droit circonscrit à deux coniques.*

Par une analyse très simple, il montre que le lieu est

toujours du huitième degré, à moins que l'une des coniques ne soit une parabole, car alors il devient du sixième degré.

Je ne crois pas qu'il ait été reparlé de cette recherche, sauf peut-être dans la courte *Note de Géométrie* de M. J. Réveille, 1902, p. 311-313, mais celle-ci n'ajoute rien à celle de Terquem.

La question a été reprise avec plus de détail sous le n° 2289, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, où M. G. Espanet a fait deux réponses, 1902, p. 217-220, et 1903, p. 84-88.

En réalité, M. Franel a devancé, dès 1900, les recherches susmentionnées et a étudié complètement et à fond la courbe orthoptique dont M. Espanet a seulement signalé quelques propriétés essentielles, mais ses deux études (*loc. cit.*) fourniront certainement le moyen d'établir les propositions de M. Franel.

C'est ce qui m'a déterminé à les signaler en manière de première réponse à la question 1834.

1920.

(1902, p. 48, 270, 288.)

Le produit du rayon de courbure en un point d'une hyperbole par la distance du centre à la tangente correspondante est égal, en valeur absolue, au carré du segment de la tangente compris entre le point de contact et l'une des asymptotes.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Sans rien préjuger de la courbe cherchée, soient $M(x, y)$ un de ses points, MT la tangente, rencontrant Oy en T , et dont l'équation est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

La distance OP à MT est

$$\delta = \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(476)

et le rayon de courbure en M

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

D'autre part,

$$\overline{MT}^2 = x^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

L'équation différentielle de la courbe sera donc

$$R \delta = \overline{MT}^2$$

ou simplement

$$y - x \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Par différentiation, elle deviendra

$$3 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

et trois intégrations successives donneront, sans difficulté, l'équation

$$y + Bx + C = \frac{A}{2x}.$$

Si l'on cherche à en déduire l'équation différentielle, on reconnaît qu'il faut prendre $C = 0$.

On a donc, en définitive, des hyperboles dont O est le centre et Oy une des asymptotes.
