NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Notes diverses de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 454-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__454_0>

[K¹2d][K¹5]

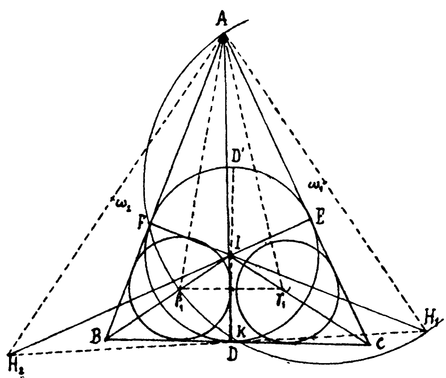
NOTES DIVERSES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

I. — POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE.

Soient un triangle ABC, les cercles inscrits et exinscrits I, I_a, I_b, I_c et D, E, F les contacts du cercle I respectivement avec les côtés BC, CA, AB. Les ortho-

Fig. 1.



centres H_1, H_2, H_3 des triangles AIB, AIC et BIC sont des points assez curieux.

1. Le quadrilatère H_1AI_cB, par exemple, est un parallélogramme, et

$$BI_c = AH_1, \qquad AI_c = BH_1, \qquad FH_1 = r_c;$$

de même

$$EH_1 = r_b, \qquad DH_3 = r_a;$$

r_a, r_b, r_c étant les rayons des cercles I_a, I_b, I_c (*fig.* 1).

D'où ces propriétés :

Les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ *aux centres des cercles exinscrits au triangle* ABC, *passent aux milieux des côtés de ce triangle.*

Les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ *sont situés à des distances respectives des côtés du triangle* ABC, *égales aux rayons des cercles exinscrits à ce dernier triangle.*

2. Les triangles ABH_1 et ACH_2 ont leurs angles égaux et sont semblables.

On en tire

$$AB \times CA = CH_2 \times BH_1.$$

La similitude des triangles AIH_1 et AIH_2 donne aussi

$$\overline{AI}^2 = IH_1 \times IH_2;$$

de même

$$BC \times AB = AH_2 \times CH_3; \qquad BC \times CA = AH_1 \times BH_3;$$
$$\overline{BI}^2 = IH_1 \times IH_3; \qquad \overline{CI}^2 = IH_2 \times IH_3;$$

d'où, avec les notations habituelles, les relations

$$AI \times BI \times CI = IH_1 \times IH_2 \times IH_3.$$
$$AH_1 \times AH_2 \times BH_1 \times BH_2 \times CH_2 \times CH_3 = a^2b^2c^2.$$

3. *Le triangle* $H_1H_2H_3$ *est circonscrit au triangle* DEF *des contacts du cercle inscrit* I *au triangle* ABC *avec* BC, CA, AB.

H_1H_2 par exemple passe en D, car CH_2 et BH_1

étant parallèles, les triangles rectangles semblables CH_2E et BFH_1 donnent

$$\frac{CH_2}{BH_1} = \frac{CE}{BF} = \frac{CD}{DB}.$$

4. *Les cercles* ω_1 *et* ω_2 *de diamètres* AH_1 *et* AH_2 *se coupent en un point* K *du cercle inscrit* I.

Car

$$\text{angle } \omega_1 A \omega_2 = \text{angle EDF}$$

AH_1 et AH_2 étant deux diamètres, H_1H_2 passe au point K commun à ω_1 et ω_2. AK est donc une hauteur du triangle AH_1H_2 et l'angle AKD étant droit, AK passe au point D' diamétralement opposé à D contact de BC avec le cercle I. D'où cette propriété :

L'axe radical des cercles ω_1 *et* ω_2 *de diamètres* AH_1 *et* AH_2 *et les axes radicaux des deux autres groupes de cercles analogues, sont les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle* ABC *aux contacts des cercles exinscrits avec ses côtés.*

5. Les cercles ω_1 et ω_2 coupent respectivement les bissectrices CI et BI en γ_1 et γ_2, β_1 et β_2.

Les droites $\beta_1\gamma_1$ *et* $\beta_2\gamma_2$ *sont parallèles au côté* BC.

Les triangles $\beta_1 AI$ et $\gamma_1 IH_2$ sont en effet semblables, car

$$\text{angle } H_2 I \gamma_1 = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2} = \text{angle AIB}.$$

De plus, IH_2 et IA sont des droites homologues dans les triangles semblables ACH_2 et ABH_1. Donc

$$\frac{I\beta_1}{I\gamma_1} = \frac{IB}{IC},$$

et $\beta_1\gamma_1$ est parallèle à BC.

6. Les cercles de centres β_1 et γ_1, β_2 et γ_2, tangents à BC, forment deux groupes de cercles égaux. Soient AT_1 et AT_2 deux tangentes, l'une au cercle β_1, l'autre au cercle γ_1, ces tangentes rencontrant $\beta_1\gamma_1$ entre β_1 et γ_1.

Comme les angles $BA\beta_1$ et $CA\beta_1$ sont respectivement égaux aux angles $\beta_1 AT_1$ et $\gamma_1 AT_2$ et que les triangles semblables $\beta_1 AI$ et $\gamma_1 IH_2$, dont nous venons de nous servir, donnent

$$\text{angle } IA\beta_1 = \text{angle } IH_2\gamma_1 = \text{angle } \gamma_1 AF$$
$$(\text{même mesure dans } \omega_1);$$

que de même

$$\text{angle } IA\gamma_1 = \text{angle } IH_1\beta_1 = \text{angle } \beta_1 AE,$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\text{angle } IA\beta_1 + \text{angle } IA\gamma_1\\ &\quad = \text{angle } \gamma_1 AC + \text{angle } \beta_1 AB = \text{angle } \frac{A}{2},\end{aligned}$$

et cette intéressante propriété, AT_1 et AT_2 étant confondues : *L'une des tangentes intérieures aux cercles β_1 et γ_1, β_2 et γ_2, passe au sommet* A *du triangle* ABC.

7. Soient L le point de rencontre de BC avec la tangente AP_1 intérieure aux cercles β_1 et γ_1, AA′ la hauteur du triangle ABC. Posant

$$BP_1 = x, \qquad P_1C = a - x \qquad \text{et} \qquad AP_1 = y,$$

on trouve sans difficulté, par comparaison des aires des triangles BAP_1 et P_1AC et par application du théorème de Stewart,

$$(1)\quad 4y^2 = (b+c)^2 - a^2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{A'P_1}{y}\right)^2 = \left(\frac{b-c}{a}\right)^2;$$

d'où, en appelant α l'angle de AP_1 et AA',

$$\sin\alpha = \frac{b-c}{a},$$

en supposant $b > c$.

Soit P_2 l'intersection de BC et de la tangente commune intérieure AP_2 aux cercles β_2 et γ_2. Un calcul analogue au précédent, en remarquant que les cercles β_2 et γ_2 sont respectivement extérieurs aux triangles ACP_2 et ABP_2, donne pour y la valeur (1). Donc

$$AP_1 = AP_2,$$

et les tangentes communes intérieures aux cercles β_1 *et* γ_1, β_2 *et* γ_2, *passant au sommet* A *du triangle* ABC, *sont symétriques par rapport à la hauteur* AA'.

II. — Quelques propriétés de deux triangles.

1. Dans un triangle ABC, l'une des droites joignant un sommet au contact du cercle inscrit I avec le côté opposé, AD par exemple, peut être médiane, hauteur ou symédiane du triangle. Les deux premiers cas sont réalisés dans le triangle isoscèle.

Le triangle particulier dans lequel AD est une symédiane est intéressant. Comme

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{CB}{DB} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{a+b-c}{a-b+c},$$

ses côtés vérifient l'une des relations

$$b - c = 0 \qquad \text{et} \qquad a(b + c) = b^2 + c^2.$$

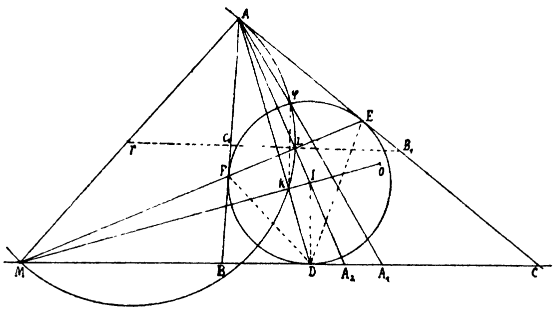
D'après le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle ABC et à la transversale EF des contacts de CA et AB avec le cercle I, cette droite rencontre BC en un point M tel que (*fig.* 2)

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} = \frac{p - c}{p - b} = \frac{b^2}{c^2}$$

et :

La tangente en A *au cercle circonscrit* O *au triangle* ABC *rencontre* BC *en* M.

Fig. 2.



D'ailleurs, dans tout triangle, la corde commune au cercle circonscrit O et au cercle d'Apollonius M est la symédiane issue de A. D'autre part, la perpendiculaire abaissée de I sur AD passe au point commun de EF et BC.

Dans notre cas particulier, *cette perpendiculaire est donc la ligne des centres des cercles inscrit* I, *circonscrit* O *et d'Apollonius* M *relativement au côté* BC. Alors :

Le côté BC, *la tangente en* A *au cercle circonscrit*, OI *et* EF *sont quatre droites concourantes.*

En remarquant aussi que

$$\cos A = \frac{a}{b+c},$$

on observe que :

La somme des projections l'un sur l'autre des côtés AB, CA *égale le côté* BC.

De plus, comme

$$a(b+c) = b^2 + c^2 = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{2}, \qquad \frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\cos A \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{ou} \qquad A \leq 60^\circ$$

et :

L'angle A *du triangle* ABC *est au plus égal à* 60°.

En appelant l la distance du point de Lemoine au côté BC, on a

$$l = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2aS}{a(a+b+c)} = \frac{S}{p} = r;$$

donc :

Le point de Lemoine du triangle et le centre du cercle inscrit sont situés sur une même parallèle au côté moyen BC.

Dans un tel triangle, le point φ de Feuerbach est également curieux : *il est situé sur la médiane* AA_1 *du triangle.*

En effet, le cercle podaire γ du point M de OI a pour diamètre AM et passe, comme on sait, au point de Feuerbach du triangle ABC. Il contient aussi visiblement le milieu L de la bissectrice intérieure AA_2 ainsi que le point K d'intersection de OI et AD.

D'autre part, AA' étant la hauteur du triangle, nous montre que

$$A'K = \varphi A \text{ (1)};$$

φ, intersection des cercles I et γ, est donc symétrique de K par rapport à $\gamma C_1 B_1$, droite des milieux de AB et CA. Alors, dans le cercle γ,

$$\text{arc KL} = \text{arc L}\varphi, \qquad \text{et} \qquad \text{angle LA}\varphi = \text{angle KAL},$$

L étant aussi l'intersection de $C_1 B_1$ avec le cercle γ.

$A\varphi$ est donc symétrique de AD par rapport à la bissectrice intérieure AA_2 de l'angle A, c'est-à-dire la *médiane* AA_1 du triangle ABC.

Comme

$$\overline{ID}^2 = IK \times IM,$$

K intersection de OI et AD, on a cet autre résultat :

Le cercle podaire γ *de* M, *par rapport au triangle* ABC, *est orthogonal aux cercles inscrit* I *et circonscrit* O. *Sa tangente en* φ *est la ligne des centres des cercles inscrit et d'Euler de* ABC.

Les quadrilatères $MAFA_2$ et $MAEA_2$ ont pour axe de symétrie AEF, et la figure AEA_2F est un losange : EA_2 et A_2F *sont respectivement parallèles à* AB *et* CA.

Cette propriété permet de trouver les relations sui-

(1) *Sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 271).

vantes dans ce triangle :

$$(p-a)^2=(p-b)(p-c); \qquad r_a^2=r_b\times r_c;$$
$$b^2=(p-c)(b+c); \qquad c^2=(p-b)(b+c);$$
$$\tang^2\frac{A}{2}=\tang\frac{B}{2}\times\tang\frac{C}{2}; \qquad S=p^2\tang^3\frac{A}{2}=r^2\tang\frac{A}{2};$$
$$\cot^3\frac{A}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$
$$=\left(\tang\frac{A}{2}+\tang\frac{B}{2}+\tang\frac{C}{2}\right)^3;$$
$$bc=(p-a)(b+c); \qquad 4Rr_a=b^2+c^2.$$

2. Parmi les positions particulières du point de Gergonne dans le plan du triangle, celle où ce point P est situé sur l'une des droites joignant les milieux de deux côtés, est assez curieuse. Supposons un triangle ABC dans lequel B_1C_1 contient P, B_1 et C_1 milieux respectifs de CA et AB.

De l'égalité

$$(\alpha) \qquad \frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD}=1,$$

D, E, F étant les contacts du cercle inscrit I avec BC, CA, AB, on tire sans difficulté les relations suivantes entre les éléments de ce triangle :

$$(1) \qquad a(p-a)=(p-b)(p-c);$$
$$(2) \qquad r_a=r_b+r_c;$$
$$\tang\frac{A}{2}=\tang\frac{B}{2}+\tang\frac{C}{2}; \qquad ap=r_a^2;$$
$$2r_a=4R+r; \qquad \frac{r}{4R}=\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$
$$\cot\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}; \qquad a=p\tang^2\frac{A}{2}=r_a\tang\frac{A}{2}.$$

En observant que

$$a=(p-b)+(p-c),$$

la relation (1) prouve que $(p-a)$ *est demi-moyenne harmonique entre* $(p-b)$ *et* $(p-c)$.

On a aussi

$$\frac{r+r_b+r_c-r_a}{4}=OA_1=\frac{AH}{2},$$

soit

$$OA_1=\frac{r}{4} \qquad \text{et} \qquad AH=\frac{r}{2}$$

et :

L'orthocentre H *du triangle est à une distance du sommet* A *égale à la moitié du rayon du cercle inscrit* I.

On en conclut que *le point* φ *de Feuerbach est sur la droite* D'A' *joignant l'extrémité du diamètre* DID' *au symétrique du sommet* A *par rapport à l'orthocentre.*

Enfin la relation (α) peut aussi s'écrire

$$\frac{CE_1}{E_1A}+\frac{BF_1}{F_1A}=1,$$

E_1, F_1 étant les contacts des cercles exinscrits I_b et I_c avec CA et AB, et :

Dans le triangle ABC *où le point de Gergonne est situé sur la droite* B_1C_1 *des milieux de* CA *et* AB, *la droite* E_1F_1, *qui joint les contacts de ces côtés avec* I_b *et* I_c, *passe au point de concours* G *des médianes du triangle.*

On peut construire un tel triangle connaissant $BC=a$ et le rayon r du cercle inscrit, par exemple.

Enfin, d'après la relation (2) :

Le point de concours des médianes du triangle $I_aI_bI_c$ *relatif au triangle* ABC *est situé sur le côté* BC.

III. — Théorème sur la parabole.

Nous avons donné, dans la 38e *année du Journal de Vuibert,* le théorème suivant :

On donne un triangle ABC *circonscrit à une parabole. La perpendiculaire à l'axe menée par le sommet* A *rencontre le cercle circonscrit au triangle en un point* α *tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur* BC *passe au foyer de la parabole.*

Soit une parabole Σ de foyer F, de directrice D, inscrite à un triangle ABC. La perpendiculaire $A\alpha$ à l'axe rencontre le cercle ABC en α.

On sait que ce cercle ABC contient le foyer F. Traçons BE parallèle à l'axe

$$\widehat{\alpha FB} = \widehat{\alpha AB} = 90^\circ - (\widehat{AB, BE}) = 90^\circ - \widehat{FBC}$$

(d'après un théorème classique);

αF est donc bien perpendiculaire sur BC.

Ce théorème donne immédiatement les propriétés suivantes relatives aux points de Feuerbach et de Steiner d'un triangle, en se rappelant les théorèmes énoncés dans mes articles : *Sur le point de Feuerbach* [1] et *Sur quatre triangles homothétiques* [2].

a. Soient A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés d'un triangle* ABC. *Par* A_1 *on mène la parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC; *elle rencontre le cercle des neuf*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1914, p. 107 et 110.

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1915, p. 209.

points en α. *La perpendiculaire abaissée de* α *sur* B_1C_1 *passe au point de Feuerbach du triangle* ABC.

b. Soient D, E, F *les points de contact des côtés d'un triangle* ABC *et de son cercle inscrit* I. *Par* D *on mène une parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit; elle rencontre le cercle inscrit en* α. *La perpendiculaire abaissée de* α *sur* EF *passe au point de Feuerbach du triangle* ABC.

c. Soient A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés;* A', B', C' *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *Par* A_1 *et* A' *on mène les parallèles à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle* ABC. *Elles rencontrent le cercle des neuf points du triangle* ABC *en* α_1 *et* α_2. *Les perpendiculaires abaissées de* α_1 *et* α_2 *respectivement sur* B_1C_1 *et* $B'C'$ *passent au point de Steiner du triangle* ABC.