

V. THÉBAULT

Notes diverses de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 454-465

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__454_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'2d][K'5]

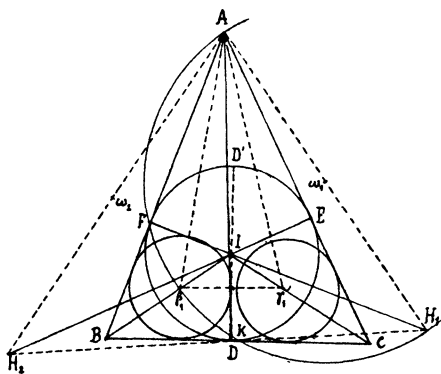
NOTES DIVERSES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

I. — POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE.

Soient un triangle ABC, les cercles inscrits et exinscrits I, I_a, I_b, I_c et D, E, F les contacts du cercle I respectivement avec les côtés BC, CA, AB. Les ortho-

Fig. 1.



centres H_1, H_2, H_3 des triangles AIB, AIC et BIC sont des points assez curieux.

1. Le quadrilatère H_1AI_cB , par exemple, est un parallélogramme, et

$$BI_c = AH_1, \quad AI_c = BH_1, \quad FH_1 = r_c;$$

de même

$$EH_1 = r_b, \quad DH_3 = r_a;$$

r_a, r_b, r_c étant les rayons des cercles I_a, I_b, I_c (fig. 1).

D'où ces propriétés :

Les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ aux centres des cercles exinscrits au triangle ABC, passent aux milieux des côtés de ce triangle.

Les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ sont situés à des distances respectives des côtés du triangle ABC, égales aux rayons des cercles exinscrits à ce dernier triangle.

2. Les triangles ABH_1 et ACH_2 ont leurs angles égaux et sont semblables.

On en tire

$$AB \times CA = CH_2 \times BH_1.$$

La similitude des triangles AIH_1 et AIH_2 donne aussi

$$\overline{AI}^2 = IH_1 \times IH_2;$$

de même

$$BC \times AB = AH_2 \times CH_3; \quad BC \times CA = AH_1 \times BH_3;$$

$$\overline{BI}^2 = IH_1 \times IH_3; \quad \overline{CI}^2 = IH_2 \times IH_3;$$

d'où, avec les notations habituelles, les relations

$$AI \times BI \times CI = IH_1 \times IH_2 \times IH_3.$$

$$AH_1 \times AH_2 \times BH_1 \times BH_2 \times CH_2 \times CH_3 = \alpha^2 b^2 c^2.$$

3. *Le triangle $H_1H_2H_3$ est circonscrit au triangle DEF des contacts du cercle inscrit I au triangle ABC avec BC, CA, AB.*

H_1H_2 par exemple passe en D, car CH_2 et BH_1

étant parallèles, les triangles rectangles semblables CH_2E et BFH_1 donnent

$$\frac{\text{CH}_2}{\text{BH}_1} = \frac{\text{CE}}{\text{BF}} = \frac{\text{CD}}{\text{DB}}.$$

4. Les cercles ω_1 et ω_2 de diamètres AH_1 et AH_2 se coupent en un point K du cercle inscrit I .

Car

$$\text{angle } \omega_1 \text{A} \omega_2 = \text{angle EDF}$$

AH_1 et AH_2 étant deux diamètres, H_1H_2 passe au point K commun à ω_1 et ω_2 . AK est donc une hauteur du triangle AH_1H_2 et l'angle AKD étant droit, AK passe au point D' diamétralement opposé à D contact de BC avec le cercle I . D'où cette propriété :

L'axe radical des cercles ω_1 et ω_2 de diamètres AH_1 et AH_2 et les axes radicaux des deux autres groupes de cercles analogues, sont les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle ABC aux contacts des cercles exinscrits avec ses côtés.

5. Les cercles ω_1 et ω_2 coupent respectivement les bissectrices CI et BI en γ_1 et γ_2 , β_1 et β_2 .

Les droites $\beta_1\gamma_1$ et $\beta_2\gamma_2$ sont parallèles au côté BC .

Les triangles $\beta_1\text{AI}$ et $\gamma_1\text{IH}_2$ sont en effet semblables, car

$$\text{angle } \text{H}_2\text{I}\gamma_1 = 90^\circ + \frac{\widehat{\text{C}}}{2} = \text{angle } \text{AIB}.$$

De plus, IH_2 et IA sont des droites homologues dans

les triangles semblables ACH_2 et ABH_1 . Donc

$$\frac{I\beta_1}{I\gamma_1} = \frac{IB}{IC},$$

et $\beta_1\gamma_1$ est parallèle à BC ,

6. Les cercles de centres β_1 et γ_1 , β_2 et γ_2 , tangents à BC , forment deux groupes de cercles égaux. Soient AT_1 et AT_2 deux tangentes, l'une au cercle β_1 , l'autre au cercle γ_1 , ces tangentes rencontrant $\beta_1\gamma_1$ entre β_1 et γ_1 ,

Comme les angles $BA\beta_1$ et $CA\beta_1$ sont respectivement égaux aux angles β_1AT_1 et γ_1AT_2 et que les triangles semblables β_1AI et γ_1IH_2 , dont nous venons de nous servir, donnent

$$\begin{aligned} \text{angle } IA\beta_1 &= \text{angle } IH_2\gamma_1 = \text{angle } \gamma_1AF \\ &(\text{même mesure dans } \omega_1); \end{aligned}$$

que de même

$$\text{angle } IA\gamma_1 = \text{angle } IH_1\beta_1 = \text{angle } \beta_1AE,$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\text{angle } IA\beta_1 + \text{angle } IA\gamma_1 \\ &= \text{angle } \gamma_1AC + \text{angle } \beta_1AB = \text{angle } \frac{A}{2}, \end{aligned}$$

et cette intéressante propriété, AT_1 et AT_2 étant confondues : *L'une des tangentes intérieures aux cercles β_1 et γ_1 , β_2 et γ_2 , passe au sommet A du triangle ABC.*

7. Soient L le point de rencontre de BC avec la tangente AP_1 intérieure aux cercles β_1 et γ_1 , AA' la hauteur du triangle ABC . Posant

$$BP_1 = x, \quad P_1C = a - x \quad \text{et} \quad AP_1 = y,$$

on trouve sans difficulté, par comparaison des aires des triangles BAP_1 et P_1AC et par application du théorème de Stewart,

$$(1) \quad 4y^2 = (b+c)^2 - a^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{A'P_1}{y}\right)^2 = \left(\frac{b-c}{a}\right)^2;$$

d'où, en appelant α l'angle de AP_1 et AA' ,

$$\sin \alpha = \frac{b-c}{a},$$

en supposant $b > c$.

Soit P_2 l'intersection de BC et de la tangente commune intérieure AP_2 aux cercles β_2 et γ_2 . Un calcul analogue au précédent, en remarquant que les cercles β_2 et γ_2 sont respectivement extérieurs aux triangles ACP_2 et ABP_2 , donne pour y la valeur (1). Donc

$$AP_1 = AP_2,$$

et les tangentes communes intérieures aux cercles β_1 et γ_1 , β_2 et γ_2 , passant au sommet A du triangle ABC , sont symétriques par rapport à la hauteur AA' .

II. — QUELQUES PROPRIÉTÉS DE DEUX TRIANGLES.

1. Dans un triangle ABC , l'une des droites joignant un sommet au contact du cercle inscrit I avec le côté opposé, AD par exemple, peut être médiane, hauteur ou symédiane du triangle. Les deux premiers cas sont réalisés dans le triangle isocèle.

Le triangle particulier dans lequel AD est une symédiane est intéressant. Comme

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{CB}{DB} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{a+b-c}{a-b+c},$$

ses côtés vérifient l'une des relations

$$b - c = 0 \quad \text{et} \quad a(b + c) = b^2 + c^2.$$

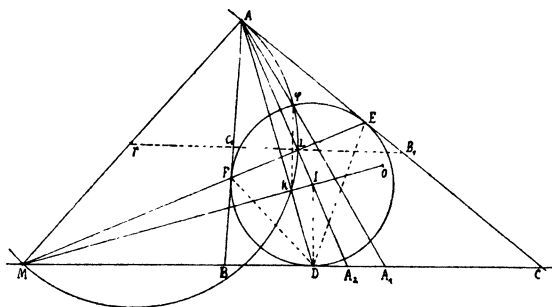
D'après le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle ABC et à la transversale EF des contacts de CA et AB avec le cercle I, cette droite rencontre BC en un point M tel que (*fig. 2*)

$$\frac{MC}{MB} = \frac{p - c}{p - b} = \frac{b^2}{c^2}$$

et :

La tangente en A au cercle circonscrit O au triangle ABC rencontre BC en M.

Fig. 2.



D'ailleurs, dans tout triangle, la corde commune au cercle circonscrit O et au cercle d'Apollonius M est la symédiane issue de A. D'autre part, la perpendiculaire abaissée de I sur AD passe au point commun de EF et BC.

Dans notre cas particulier, *cette perpendiculaire est donc la ligne des centres des cercles inscrit I, circonscrit O et d'Apollonius M relativement au côté BC.* Alors :

(460)

Le côté BC, la tangente en A au cercle circonscrit, OI et EF sont quatre droites concourantes.

En remarquant aussi que

$$\cos A = \frac{a}{b+c},$$

on observe que :

La somme des projections l'un sur l'autre des côtés AB, CA égale le côté BC,

De plus, comme

$$a(b+c) = b^2 + c^2 = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{2}, \quad \frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\cos A \geq \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad A \leq 60^\circ$$

et :

L'angle A du triangle ABC est au plus égal à 60°.

En appelant l la distance du point de Lemoine au côté BC, on a

$$l = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2aS}{a(a+b+c)} = \frac{S}{p} = r;$$

donc :

Le point de Lemoine du triangle et le centre du cercle inscrit sont situés sur une même parallèle au côté moyen BC,

Dans un tel triangle, le point φ de Feuerbach est également curieux : *il est situé sur la médiane AA₁ du triangle.*

En effet, le cercle podaire γ du point M de OI a pour diamètre AM et passe, comme on sait, au point

de Feuerbach du triangle ABC . Il contient aussi visiblement le milieu L de la bissectrice intérieure AA_2 ainsi que le point K d'intersection de OI et AD .

D'autre part, $A\Lambda'$ étant la hauteur du triangle, nous montre que

$$\Lambda'K = \varphi\Lambda \quad (1);$$

φ , intersection des cercles I et γ , est donc symétrique de K par rapport à $\gamma C_1 B_1$, droite des milieux de AB et CA . Alors, dans le cercle γ ,

$$\text{arc } KL = \text{arc } L\varphi, \quad \text{et} \quad \text{angle } L\Lambda\varphi = \text{angle } K\Lambda L,$$

L étant aussi l'intersection de $C_1 B_1$ avec le cercle γ .

$A\varphi$ est donc symétrique de AD par rapport à la bissectrice intérieure AA_2 de l'angle A , c'est-à-dire la médiane AA_1 du triangle ABC .

Comme

$$\overline{ID}^2 = IK \times IM,$$

K intersection de OI et AD , on a cet autre résultat :

Le cercle podaire γ de M , par rapport au triangle ABC , est orthogonal aux cercles inscrit I et circonscrit O . Sa tangente en φ est la ligne des centres des cercles inscrit et d'Euler de ABC .

Les quadrilatères $MAFA_2$ et $MAEA_2$ ont pour axe de symétrie AEF , et la figure AEA_2F est un losange : EA_2 et A_2F sont respectivement parallèles à AB et CA .

Cette propriété permet de trouver les relations sui-

(1) *Sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire (Nouvelles Annales, 1910, p. 271).*

vantes dans ce triangle :

$$\begin{aligned}
 (p-a)^2 &= (p-b)(p-c); & r_a^2 &= r_b \times r_c; \\
 b^2 &= (p-c)(b+c); & c^2 &= (p-b)(b+c); \\
 \tan^2 \frac{A}{2} &= \tan \frac{B}{2} \times \tan \frac{C}{2}; & S &= p^2 \tan^3 \frac{A}{2} = r^2 \tan \frac{A}{2}; \\
 \cot^3 \frac{A}{2} &= \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \\
 &= \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^3; \\
 bc &= (p-a)(b+c); & 4Rr_a &= b^2 + c^2.
 \end{aligned}$$

2. Parmi les positions particulières du point de Gergonne dans le plan du triangle, celle où ce point P est situé sur l'une des droites joignant les milieux de deux côtés, est assez curieuse. Supposons un triangle ABC dans lequel B₁C₁ contient P, B₁ et C₁ milieux respectifs de CA et AB.

De l'égalité

$$(\alpha) \quad \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD} = 1,$$

D, E, F étant les contacts du cercle inscrit I avec BC, CA, AB, on tire sans difficulté les relations suivantes entre les éléments de ce triangle :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a(p-a) = (p-b)(p-c); \\
 (2) \quad & r_a = r_b + r_c; \\
 & \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}; & ap &= r_a^2; \\
 & 2r_a = 4R + r; & \frac{r}{4R} &= \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}; \\
 & \cot \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}; & a &= p \tan^2 \frac{A}{2} = r_a \tan \frac{A}{2}.
 \end{aligned}$$

En observant que

$$a = (p-b) + (p-c),$$

la relation (1) prouve que $(p - a)$ est *demi-moyenne harmonique* entre $(p - b)$ et $(p - c)$.

On a aussi

$$\frac{r + r_b + r_c - r_a}{4} = OA_1 = \frac{AH}{2},$$

soit

$$OA_1 = \frac{r}{4} \quad \text{et} \quad AH = \frac{r}{2}$$

et :

L'orthocentre H du triangle est à une distance du sommet A égale à la moitié du rayon du cercle inscrit I.

On en conclut que le point φ de Feuerbach est sur la droite D'A' joignant l'extrémité du diamètre DID' au symétrique du sommet A par rapport à l'orthocentre.

Enfin la relation (α) peut aussi s'écrire

$$\frac{CE_1}{E_1A} + \frac{BF_1}{F_1A} = 1,$$

E_1, F_1 étant les contacts des cercles exinscrits I_b et I_c avec CA et AB, et :

Dans le triangle ABC où le point de Gergonne est situé sur la droite B_1C_1 des milieux de CA et AB, la droite E_1F_1 , qui joint les contacts de ces côtés avec I_b et I_c , passe au point de concours G des médianes du triangle.

On peut construire un tel triangle connaissant $BC = a$ et le rayon r du cercle inscrit, par exemple.

Enfin, d'après la relation (2) :

Le point de concours des médianes du triangle $I_aI_bI_c$ relatif au triangle ABC est situé sur le côté BC.

III. — THÉORÈME SUR LA PARABOLE.

Nous avons donné, dans la 38^e année du *Journal de Vuibert*, le théorème suivant :

On donne un triangle ABC circonscrit à une parabole. La perpendiculaire à l'axe menée par le sommet A rencontre le cercle circonscrit au triangle en un point α tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur BC passe au foyer de la parabole.

Soit une parabole Σ de foyer F, de directrice D, inscrite à un triangle ABC. La perpendiculaire $A\alpha$ à l'axe rencontre le cercle ABC en α .

On sait que ce cercle ABC contient le foyer F. Traçons BE parallèle à l'axe

$$\widehat{\alpha FB} = \widehat{\alpha AB} = 90^\circ - (\widehat{AB, BE}) = 90^\circ - \widehat{FBC}$$

(d'après un théorème classique);

αF est donc bien perpendiculaire sur BC.

Ce théorème donne immédiatement les propriétés suivantes relatives aux points de Feuerbach et de Steiner d'un triangle, en se rappelant les théorèmes énoncés dans mes articles : *Sur le point de Feuerbach* ⁽¹⁾ et *Sur quatre triangles homothétiques* ⁽²⁾.

a. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés d'un triangle ABC. Par A_1 on mène la parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; elle rencontre le cercle des neuf

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1914, p. 107 et 110.

⁽²⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1915, p. 209.

points en α . La perpendiculaire abaissée de α sur B_1C_1 passe au point de Feuerbach du triangle ABC.

b. Soient D, E, F les points de contact des côtés d'un triangle ABC et de son cercle inscrit Γ . Par D on mène une parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit; elle rencontre le cercle inscrit en α . La perpendiculaire abaissée de α sur EF passe au point de Feuerbach du triangle ABC.

c. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés; A', B', C' les pieds des hauteurs d'un triangle ABC. Par A_1 et A' on mène les parallèles à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle ABC. Elles rencontrent le cercle des neuf points du triangle ABC en α_1 et α_2 . Les perpendiculaires abaissées de α_1 et α_2 respectivement sur B_1C_1 et $B'C'$ passent au point de Steiner du triangle ABC.
