

F. BALITRAND

**Intégration de l'équation différentielle  
des coniques homofocales**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1915), p. 429-430

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1915\\_4\\_15\\_\\_429\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__429_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[H2c]

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE  
DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. F. BALITRAND.

---

L'équation différentielle des coniques homofocales

$$(1) \quad xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

a été intégrée de bien des façons (*voir*, par exemple, *Nouvelles Annales*, 1888, p. 194). Nous nous proposons d'indiquer une nouvelle méthode au moyen du changement simultané de la variable et de la fonction.

Posons

$$(2) \quad x = p \cos \varphi - p' \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + p' \cos \varphi;$$

où  $p$  est la nouvelle fonction et  $\varphi$  la nouvelle variable  
 $(p' = \frac{dp}{d\varphi})$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\cot \varphi, \\ xy &= (p^2 - p'^2) \sin \varphi \cos \varphi + pp'(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ x^2 - y^2 - c^2 &= (p^2 - p'^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 4pp' \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation différentielle, on obtient, après quelques réductions, l'expression

$$(3) \quad 2pp' = -c^2 \sin 2\varphi;$$

dont l'intégrale est

$$(4) \quad p^2 = \frac{c^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{\alpha^2}{2};$$

$\alpha$  étant une constante arbitraire. C'est l'équation des coniques homofocales dans le système de coordonnées  $(p, \varphi)$ . Pour passer de là aux coordonnées  $x$  et  $y$ , il suffit d'éliminer  $p$  et  $\varphi$  entre les équations (2) et (4), en tenant compte de (3). On trouve d'abord

$$x = \frac{\alpha^2 + c^2}{2p} \cos \varphi, \quad y = \frac{\alpha^2 - c^2}{2p} \sin \varphi.$$

En portant les valeurs de  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$  dans l'équation (4), qui peut s'écrire

$$p^2 = \frac{c^2}{2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{\alpha^2}{2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi),$$

on obtient

$$\frac{2x^2}{\alpha^2 + c^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2 - c^2} - 1 = 0.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Par le changement du paramètre  $\alpha^2$  en  $2\lambda - c^2$ , elle se met sous la forme habituelle de l'équation des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} - 1 = 0.$$


---