NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 429-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__429_1>

[H2c]

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. F. BALITRAND.

L'équation différentielle des coniques homofocales

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-c^2)\frac{dy}{dx}-xy=0 \tag{1}$$

a été intégrée de bien des façons (*voir*, par exemple, *Nouvelles Annales*, 1888, p. 194). Nous nous proposons d'indiquer une nouvelle méthode au moyen du changement simultané de la variable et de la fonction.

Posons

$$x=p\cos\varphi-p'\sin\varphi,\qquad y=p\sin\varphi+p'\cos\varphi; \tag{2}$$

où p est la nouvelle fonction et φ la nouvelle variable $\left(p' = \frac{dp}{d\varphi}\right)$. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\varphi,$$

$$xy = (p^2 - p'^2)\sin\varphi\cos\varphi + pp'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$x^2 - y^2 - c^2 = (p^2 - p'^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4pp'\sin\varphi\cos\varphi.$$

En portant ces valeurs dans l'équation différentielle, on obtient, après quelques réductions, l'expression

$$(3) \qquad 2pp' = -c^2\sin 2\varphi;$$

dont l'intégrale est

$$(4) \qquad p^2 = \frac{c^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\alpha^2}{2};$$

α étant une constante arbitraire. C'est l'équation des coniques homofocales dans le système de coordonnées (p, φ). Pour passer de là aux coordonnées x et y, il suffit d'éliminer p et φ entre les équations (2) et (4), en tenant compte de (3). On trouve d'abord

$$x = \frac{\alpha^2 + c^2}{2p}\cos\varphi, \qquad y = \frac{\alpha^2 - c^2}{2p}\sin\varphi.$$

En portant les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans l'équation (4), qui peut s'écrire

$$p^2 = \frac{c^2}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{\alpha^2}{2}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$

on obtient

$$\frac{2x^2}{\alpha^2 + c^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2 - c^2} - 1 = 0.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Par le changement du paramètre α^2 en $2\lambda - c^2$, elle se met sous la forme habituelle de l'équation des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} - 1 = 0.$$