

A. AURIC

Note sur la brocardienne

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 355-362

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__355_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'5c]

NOTE SUR LA BROCARDIENNE;

PAR M. A. AURIC.

Soient un triangle de référence $A_1A_2A_3$ et un point M dont les coordonnées barycentriques sont

$$m_1, m_2, m_3;$$

nous appellerons *brocardienne* B du point M la conique ayant pour équation

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_2 x_3 & m_3 x_1 & m_1 x_2 \\ m_3 x_2 & m_1 x_3 & m_2 x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est symétrique en m_i et x_i ; on sait d'ailleurs que la brocardienne passe par le point M, par les points brocardiens

$$\frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_1}; \quad \frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2};$$

par les sommets des deux triangles brocardiens

$$\begin{aligned} m_1, m_3, m_2; \quad m_3, m_2, m_1; \quad m_2, m_1, m_3; \\ m_2 + m_3 - m_1, m_2, m_3; \quad m_1, m_3 + m_1 - m_2, m_2; \\ m_1, m_2, m_1 + m_2 - m_3; \end{aligned}$$

enfin par le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_1 x_2 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad .$$

soit

$$m_1(m_2 + m_3 - m_1), \quad m_2(m_3 + m_1 - m_2), \\ m_3(m_1 + m_2 - m_3).$$

On pourrait trouver aisément d'autres points réels à coordonnées simples situés sur B, par exemple

$$\frac{m_2^3 + m_3^3}{m_2 m_3} - m_1, \quad m_3, \quad m_2; \quad m_3, \quad \frac{m_3^3 + m_1^3}{m_3 m_1} - m_2, \quad m_1; \\ m_2, \quad m_1, \quad \frac{m_1^3 + m_2^3}{m_1 m_2} - m_3;$$

mais les propriétés caractéristiques de la brocardienne paraissent résulter surtout de la considération de points imaginaires.

j, j^2 étant les racines cubiques de l'unité, introduisons les points

$$M_1 = (m_1, m_2 j, m_3 j^2), \quad M_2 = (m_1, m_2 j^2, m_3 j), \\ G = (1, 1, 1), \quad G_1 = (1, j, j^2), \quad G_2 = (1, j^2, j).$$

On démontre facilement que la brocardienne est circonscrite à $MM_1 M_2$ ⁽¹⁾ et que son discriminant est constitué par les côtés des triangles $A_1 A_2 A_3$ et $G G_1 G_2$; en d'autres termes, lorsque le point représentatif M se trouve sur le périmètre d'un de ces deux triangles, la brocardienne se décompose en deux droites.

Pour $m_1 = 0$, B s'écrit

$$x_1(m_2 m_3 x_1 - m_3^2 x_2 - m_2^2 x_3) = 0;$$

de même B s'écrit

$$(x_1 + x_2 + x_3)(m_2 m_3 x_1 + m_3 m_1 x_2 + m_1 m_2 x_3) \\ - (m_1 + m_2 + m_3)(m_1 x_2 x_3 + m_2 x_3 x_1 + m_3 x_1 x_2) = 0$$

⁽¹⁾ Voir notre Note *Sur les triangles hexahomologiques* (C. R. Acad. Sc., 26 juillet 1915).

ou

$$(x_1 + jx_2 + j^2x_3)(m_2m_3x_1 + j^2m_3m_1x_2 + jm_1m_2x_3) \\ - (m_1 + j^2m_2 + jm_3)(m_1x_2x_3 + jm_2x_3x_1 + j^2m_3x_1x_2) = 0,$$

ce qui donne la décomposition de B pour

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

et pour

$$m_1 + j^2m_2 + jm_3 = 0.$$

La première formule montre que B est homothétique à

$$\Sigma m_1x_2x_3 = 0$$

dont le centre est précisément sur B.

Pour que B soit un cercle il faut que

$$m_1 = a_1^2, \quad m_2 = a_2^2, \quad m_3 = a_3^2.$$

M est donc dans ce cas le point de Lemoine.

La considération des points M_1, M_2 fournit immédiatement deux nouveaux triangles inscrits dans la brocardienne et dont les sommets sont

$$\begin{aligned} m_2 + m_3j - m_1j^2, \quad m_2j, \quad m_3; \\ m_1, \quad m_3 + m_1j - m_2j^2, \quad m_3j; \\ m_1j, \quad m_2, \quad m_1 + m_2j - m_3j^2; \\ m_2 + m_3j^2 - m_1j, \quad m_2j^2, \quad m_3; \\ m_1, \quad m_3 + m_1j^2 - m_2j, \quad m_3j^2; \\ m_1j^2, \quad m_2, \quad m_1 + m_2j^2 - m_3j. \end{aligned}$$

Nous appellerons *brocardienne générale* la conique ayant pour équation

$$\Sigma \lambda m_2m_3x_1^2 + 2m_1^2x_2x_3 = 0.$$

Son discriminant est

$$\Delta = -m_1m_2m_3[\lambda(m_1^3 + m_2^3 + m_3^3) + (\lambda^3 + 2)m_1m_2m_3].$$

Pour que la cubique figurant entre crochets se réduise à trois droites il faut (indépendamment des valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ qui donnent $m_1 m_2 m_3 = 0$) que $\frac{\lambda^3 + 2}{\lambda}$ soit égal à 3 ou à $3j$ ou à $3j^2$.

On a donc, pour déterminer λ , trois équations qui ont chacune : une racine simple

$$\lambda = -2, \quad -2j^2, \quad -2j,$$

et une racine double

$$\lambda = 1, \quad j^2, \quad j.$$

C'est la racine simple qui conduit à la brocardienne ordinaire réelle

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

et à ses deux associées imaginaires

$$(B_1) \quad j \Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0,$$

$$(B_2) \quad j^2 \Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0.$$

Si nous considérons les points

$$J_1^1 = (j, 1, 1), \quad J_1^2 = (j^2, 1, 1),$$

$$J_2^1 = (1, j, 1), \quad J_2^2 = (1, j^2, 1),$$

$$J_3^1 = (1, 1, j), \quad J_3^2 = (1, 1, j^2),$$

$$M_1^1 = (jm_1, m_2, m_3), \quad M_1^2 = (j^2 m_1, m_2, m_3),$$

$$M_2^1 = (m_1, jm_2, m_3), \quad M_2^2 = (m_1, j^2 m_2, m_3),$$

$$M_3^1 = (m_1, m_2, jm_3), \quad M_3^2 = (m_1, m_2, j^2 m_3),$$

les brocardiennes B_1 et B_2 sont respectivement circonscrites à $M_1^1 M_2^1 M_3^1$ et à $M_1^2 M_2^2 M_3^2$ et ont pour discriminants les cubiques formées par les côtés des triangles

$$J_1^1 J_2^1 J_3^1 \quad \text{et} \quad J_1^2 J_2^2 J_3^2$$

indépendamment du triangle de référence; nous les appellerons *brocardiennes circonscrites*.

A la racine double correspondent des brocardiennes qui ont mêmes discriminants que les précédentes, mais qui sont conjuguées par rapport aux triangles

$$MM_1M_2, \quad M_1^1M_1^2M_1^3, \quad M_1^1M_2^2M_3^3(^1);$$

nous les appellerons *brocardiennes conjuguées*. Leur équation est

$$\alpha \Sigma m_2 m_3 x_1^2 + 2 \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0 \quad (\alpha = 1, j, j^2)$$

et il est facile d'établir leurs nombreuses propriétés (²).

Si l'on pose

$$x_1 = m_1 y_1, \quad x_2 = m_2 y_2, \quad x_3 = m_3 y_3,$$

la brocardienne générale devient

$$\Sigma m_1 (\lambda y_1^2 + 2 y_2 y_3) = 0,$$

qui représente la conique d'un réseau linéaire de trois coniques.

Pour $\lambda = -2$, elle est circonscrite à GG_1G_2 et, pour $\lambda = 1$, elle est conjuguée à ce même triangle comme on pouvait s'y attendre.

Posant

$$y_1 = m_1 z_1, \quad y_2 = m_2 z_2, \quad y_3 = m_3 z_3,$$

il vient

$$\frac{\lambda}{2 m_1 m_2 m_3} \Sigma m_1^3 z_1^2 + \Sigma z_2 z_3 = 0.$$

Cette équation représente une conique d'un faisceau linéaire de deux coniques dont l'une est fixe et dont l'autre ne dépend que de m_1^3, m_2^3, m_3^3 ; c'est ce qui explique l'introduction des racines cubiques de

(¹) Les triangles $A_1A_2A_3, MM_1M_2, M_1^1M_2^2M_3^3$ et $M_1^1M_2^2M_3^3$ sont hexahomologiques entre eux deux à deux (voir *C. R. Acad. Sc.*, t. CLXI, p. 275).

(²) Voir, dans les *Exercices de Kœler*, l'étude d'un réseau remarquable de trois coniques.

l'unité dans les coordonnées des points considérés précédemment.

Soient deux points

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad Q = (q_1, q_2, q_3),$$

nous appellerons *droite brocardienne* de P, Q la droite

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_2 q_3 & p_3 q_1 & p_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 q_3 & p_2 q_1 \end{vmatrix} = \Sigma x_1 (p_2 p_3 q_1^2 - p_1^2 q_2 q_3) = 0.$$

Cette droite passe par les points S_1, S_2

$$p_2 q_3, \quad p_3 q_1, \quad p_1 q_2; \quad p_3 q_2, \quad p_1 q_3, \quad p_2 q_1,$$

que nous appellerons *brocardiens généraux* de P et de Q et par les points

$$(T_1) \quad p_2 q_3 + p_3 q_2, \quad p_3 q_1 + p_1 q_3, \quad p_1 q_2 + p_2 q_1,$$

$$(T_2) \quad p_2 q_3 - p_3 q_2, \quad p_3 q_1 - p_1 q_3, \quad p_1 q_2 - p_2 q_1,$$

qui sont conjugués harmoniques par rapport aux précédents et qui jouent un rôle important dans la géométrie du triangle (¹).

Pour que le point

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1^2 m_2 m_3 - p_2 p_3 m_1^2, & x_2 &= p_2^2 m_3 m_1 - p_3 p_1 m_2^2, \\ x_3 &= p_3^2 m_1 m_2 - p_1 p_2 m_3^2, \end{aligned}$$

situé sur la droite brocardienne de P et de M, appartenant à la brocardienne ordinaire B, il faut que le point P se trouve soit sur la droite $G_1 G_2$ (ou droite de l'infini), soit sur le périmètre du triangle $MM_1 M_2$.

(¹) Dans notre Note sur la lemoiniennne, le point de rencontre de deux axes d'homologie $\Delta_{12} \Delta_{13}$ est un point T_2 et le pôle de l'axe associé Δ_{23} par rapport à L est un point T_1 .

Nous avons ainsi une transformation de droite en brocardienne B.

En particulier, lorsque P est en G_1 ou G_2 , nous obtenons deux nouveaux points remarquables de la brocardienne B :

$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j^2(m_1 m_2 - m_3^2);$$

$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j^2(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j(m_1 m_2 - m_3^2).$$

L'équation tangentielle de la brocardienne générale est

$$\Sigma(m_1^2 u_1^2 - 2 m_2^2 m_3^2 u_2 u_3) \\ - \lambda m_1 m_2 m_3 \Sigma[m_1(\lambda u_1^2 - 2 u_2 u_3)] = 0.$$

Les coordonnées du centre de la brocardienne B sont ⁽¹⁾

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3} + K, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1} + K, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2} + K,$$

avec

$$K = \frac{3 m_1 m_2 m_3}{(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)};$$

celles du centre de la brocardienne conjuguée réelle sont

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3}, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1}, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2};$$

ce point se trouve à l'intersection des deux coniques circonscrites

$$\Sigma \frac{m_1}{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{m_1^2}{x_1} = 0;$$

il en résulte que les centres des deux brocardiennes

⁽¹⁾ Ces coordonnées s'écrivent également

$$m_1^2(m_2 + m_3 - m_1) + 2 m_1 m_2 m_3,$$

$$m_2^2(m_3 + m_1 - m_2) + 2 m_1 m_2 m_3,$$

$$m_3^2(m_1 + m_2 - m_3) + 2 m_1 m_2 m_3.$$

sont collinéaires avec G et avec le point

$$m_1^2(m_2 + m_3 - m_1), \quad m_2^2(m_3 + m_1 - m_2), \\ m_3^2(m_1 + m_2 - m_3).$$

Dans la brocardienne générale la coordonnée ξ , du centre est égale à

$$m_1^2(m_2^2 + m_3^2 - m_1^2) + \lambda m_1 m_2 m_3 (\lambda m_1 - m_2 - m_3);$$

il en résulte que ce point est collinéaire avec le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_i^2 x_2 x_3 = 0,$$

et le point

$$\lambda m_1 - m_2 - m_3, \quad \lambda m_2 - m_3 - m_1, \quad \lambda m_3 - m_1 - m_2.$$

Pour des valeurs de λ égales et de signe contraire, les centres des brocardiennes correspondantes sont collinéaires avec le point

$$m_2 + m_3, \quad m_3 + m_1, \quad m_1 + m_2.$$