Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur une courbe sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__320_0>

[O¹2q]

SUR UNE COURBE SPHÉRIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Si l'on cherche en coordonnées polaires une courbe plane telle que la longueur de l'arc MM' soit proportionnelle à l'angle $\widehat{MPM'}$, P étant le pôle, on a

$$ds = l\,d\theta, \qquad dr^2 + r^2\,d\theta^2 = l^2\,d\theta^2, \qquad d\theta = \frac{dr}{\sqrt{l^2 - r^2}};$$

on a donc les deux solutions :

$$r = l, \tag{1}$$

$$r = l\sin\theta; \tag{2}$$

la seconde courbe est un cercle passant en P.

Le problème analogue sur la sphère donne lieu au calcul suivant :

$$\frac{ds}{R} = k\,d\theta, \qquad \left(d\,\frac{r}{R}\right)^2 + \sin^2\frac{r}{R}\,d\theta^2 = k^2\,d\theta^2,$$

ou

$$d\theta = \frac{d\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{k^2 - \sin^2\dfrac{r}{R}}};$$

on a donc les deux solutions

$$\frac{r}{R} = \operatorname{arc}\sin k, \tag{3}$$

$$\sin\frac{r}{R} = k \times \sin\operatorname{am}\theta = k \times \operatorname{sn}\theta, \tag{4}$$

la fonction elliptique sn ayant pour module le nombre k.

Si R devient infini, k tendant vers zéro et la limite du produit Rk étant l, $\operatorname{sn}\theta$ devient $\sin\theta$ et les formules (3) et (4) deviennent les formules (1) et (2).