

AURIC

Note sur la lemoinienne

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 273-276

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__273_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

K'5c]

NOTE SUR LA LEMOINIENNE ;

PAR M. AURIC.

D'après un théorème bien connu, lorsque deux triangles T_1, T_2 sont homologues, les points d'intersection des côtés non homologues sont sur une conique L que nous appellerons *lemoinienne*, parce que le premier cercle de Lemoine est un cas très particulier de cette proposition.

Nommons 1, 2, 3, 4, 5, 6 ces points d'intersection ; avec les quinze droites qui les joignent deux à deux on peut former quinze triangles homologues deux à deux.

Chacun de ces triangles est homologue à huit autres : ainsi $T = 12.34.56$ est homologue à

$$(1) \begin{cases} T_2 = 14.25.36 & 13.26.45 & 13.25.46 & 14.26.35 \\ T_3 = 16.23.45 & 15.24.36 & 16.24.35 & 15.23.46 \end{cases}$$

Les six autres triangles ont un côté commun avec T_1 et ne lui sont pas proprement homologues :

12.35.46	15.34.26	13.24.56
12.36.45	16.34.25	14.23.56

On peut grouper les triangles trois par trois, de façon qu'ils aient même centre d'homologie C et les trois axes d'homologie concourant en un point P. Un triangle tel que T_1 peut être ainsi groupé de quatre manières différentes suivant les colonnes du Tableau (1).

Prenons T_1 comme triangle de référence.

Appelons $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}$ les coordonnées barycentriques du centre d'homologie C, commun à T_1, T_2, T_3 et soit

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$$

l'équation de l'axe d'homologie de T_2 et T_3 ou Δ_{23} .

La lemoinienne L aura pour équation

$$\Sigma(m_1^2 - n_1^2)x_1^2 - 2(m_2 m_3 + n_2 n_3)x_2 x_3 = 0$$

ou

$$\Sigma m_1^2 x_1^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 - (\Sigma n_1 x_1)^2 = 0.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que L est bitangente à une conique inscrite dans T_1 , les points de contact avec les côtés de T_1 étant les pieds des céviennes de C et la corde de contact étant l'axe Δ_{23} .

Les deux autres axes d'homologie sont

$$\Delta_{12} : \quad \Sigma(m_1 - n_1)x_1 = 0,$$

$$\Delta_{13} : \quad \Sigma(m_1 + n_1)x_1 = 0.$$

Les trois axes $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{31}$ forment donc un faisceau harmonique avec la polaire trilineaire de C par rapport à T_1 dont l'équation est

$$\Sigma m_1 x_1 = 0.$$

La polaire de C par rapport à L s'écrit

$$\sum m_1 x_1 + \sum \frac{n_1}{m_1} \sum n_1 x_1 = 0;$$

elle passe également par le sommet du faisceau ci-dessus défini.

Nous obtenons ainsi sept droites concourantes savoir : les trois axes d'homologie qui sont également les cordes de contact, les polaires trilinéaires de C par rapport aux triangles T_1, T_2, T_3 qui sont les conjugués harmoniques d'un axe par rapport aux deux autres et enfin la polaire de C par rapport à L.

La lemoinienne est, en définitive, bitangente à soixante coniques inscrites par groupes de quatre dans chacun des quinze triangles, les points de contact avec les côtés étant les pieds des céviennes du centre d'homologie correspondant. Ces coniques et les triangles correspondants peuvent être groupés par trois, de manière que la corde de contact soit l'axe d'homologie des deux autres triangles du groupe.

L₁ lemoinienne s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum x_1 \sum (m_1^2 - n_1^2) x_1 \\ & = \sum (m_2 + m_3 + n_2 - n_3) (m_2 + m_3 - n_2 + n_3) x_2 x_3, \end{aligned}$$

elle est donc homothétique à la conique circonscrite représentée par le second membre.

En particulier, si Δ_{12} est la droite de l'infini

$$\sum x_i = 0, \quad m_i - n_i = \text{const.},$$

et cette conique devient

$$\sum m_2 m_3 x_2 x_3 = 0.$$

Si C est le point de Lemoine

$$\bullet \quad \frac{1}{m_i} = a_i^2$$

(276)

et la conique

$$\Sigma a_i^2 x_2 x_3 = 0$$

est le cercle circonscrit comme on devait s'y attendre, puisque dans ce cas la lemoinienne est un cercle.

La lemoinienne s'écrit également

$$\Sigma(m_1 + n_1)x_1 \Sigma(m_1 - n_1)x_1 = 4 \Sigma m_2 m_3 x_2 x_3.$$

On en déduit la proposition :

Les points d'intersection des deux axes Δ_{12} , Δ_{13} avec L sont sur une conique circonscrite à T_1 , qui est précisément l'inverse de la polaire trilinéaire de C

$$\Sigma \frac{1}{m_i x_i} = 0.$$

Si l'on appelle q_1, q_2, q_3 les coordonnées du pôle Q de Δ_{23} par rapport à L on a

$$q_1 = m_2 n_3 + m_3 n_2,$$

$$q_2 = m_3 n_1 + m_1 n_3,$$

$$q_3 = m_1 n_2 + m_2 n_1.$$

Les coordonnées du centre de L sont

$$q_1(q_1 + q_2 + q_3) - 2k(m_2 + m_3),$$

$$q_2(q_1 + q_2 + q_3) - 2k(m_3 + m_1),$$

$$q_3(q_1 + q_2 + q_3) - 2k(m_1 + m_2)$$

avec

$$k = m_1 m_2 m_3 + m_1 n_2 n_3 + m_2 n_3 n_1 + m_3 n_1 n_2.$$

L'équation tangentielle de L est

$$(q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3)^2 - 4k \Sigma m_i u_2 u_3 = 0.$$