

G. FONTENÉ

Mouvement d'un corps autour d'un point fixe, avec forces ; cas où l'ellipsoïde d'inertie reste tangent à un plan fixe

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 225-227

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__225_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R3a α]

**MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE,
AVEC FORCES; CAS OÙ L'ELLIPSOÏDE D'INERTIE RESTE
TANGENT A UN PLAN FIXE;**

PAR M. G. FONTENÉ.

THÉORÈME. — *Un corps étant mobile autour d'un point fixe O, et ce corps étant soumis à des forces extérieures, si le moment résultant OS de ces forces extérieures conserve une direction fixe pendant le mouvement du corps, et si, au début du mouvement, le moment résultant $(O\sigma)_0$ des quantités de mouvement a la même direction, le moment résultant $O\sigma$ des quantités de mouvement conserve indéfiniment cette direction OS, la force vive $2T$*

est proportionnelle au carré σ^2 du moment $O\sigma$, et l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O roule sans glissement sur un plan fixe, perpendiculaire à la direction des moments résultants OS et $O\sigma$, et dont la distance au point O est

$$\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}.$$

1° Le théorème des moments des quantités de mouvement consiste en ceci : la vitesse absolue du point σ est parallèle et égale à OS ; dans les conditions indiquées, la direction $O\sigma$ reste invariable.

2° En écrivant le parallélisme des directions OS et $O\sigma$ dans le système ordinaire d'axes mobiles (axes principaux d'inertie en O), on a les relations

$$\frac{A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr}{Ap} = \frac{B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp}{Bq} = \dots \left(= \frac{OS}{O\sigma} \right);$$

on en déduit

$$\frac{Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + \dots}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \frac{A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + \dots}{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2},$$

ou

$$\frac{d \cdot 2T}{2T} = \frac{d\sigma^2}{\sigma^2},$$

d'où

$$\frac{2T}{\sigma^2} = \text{const.};$$

on a une intégrale des équations du problème.

3° Considérons alors l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O , et soit OM le demi-diamètre dirigé suivant l'axe instantané de rotation dans le sens OI .

Avec les notations habituelles, les coefficients di-

recteurs de la normale en M sont $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$, ou Ap, Bq, Cr, de sorte que la normale en M est parallèle à la direction O σ ; par suite, dans le cas actuel, cette normale a une direction fixe, O σ ou OS.

Les coordonnées à l'origine du plan tangent en M sont $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$; on a donc pour la distance d du point O à ce plan tangent

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2} &= \frac{x^2}{a^4} + \dots + \dots = \frac{OM^2}{\omega^2} \left(\frac{p^2}{a^4} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{M\omega^2} (A^2 p^2 + \dots) = \frac{\sigma^2}{2T}; \end{aligned}$$

par suite, dans le cas actuel, cette distance est constante et a pour valeur $\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}$.

Ainsi l'ellipsoïde d'inertie reste ici tangent à un plan fixe, perpendiculaire à la direction O σ et dont la distance au point O est $\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}$, le point de contact M étant le pôle instantané de rotation.

4° Comme le point M possède à chaque instant une vitesse nulle, l'ellipsoïde d'inertie roule sans glissement sur le plan en question.

Remarque. — Avec OS \neq O, la vitesse ω de la rotation instantanée n'est pas proportionnelle à OM, la projection de la rotation instantanée sur la direction O σ n'est pas constante.

On a

$$\frac{\omega}{OM} = \sqrt{2T} = \sigma \times d,$$

avec

$$\frac{d\sigma}{dt} = S.$$