

V. THÉBAULT

Sur quatre triangles homothétiques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 193-213

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

(193)

[K'2b][K'5b]

SUR QUATRE TRIANGLES HOMOTHÉTIQUES;

PAR M. V. THÉBAULT,

Professeur à Ernée (Mayenne).

M. Neuberg a proposé, dans *Mathesis*, mai 1914, p. 144, sous le n° 1967 bis, la question suivante :

« H étant l'orthocentre du triangle ABC, on prolonge les droites HA, HB, HC des quantités $AA' = r_a$, $BB' = r_b$, $CC' = r_c$, où r_a , r_b , r_c désignent les rayons des cercles exinscrits à ABC. Trouver quelques propriétés du triangle A'B'C'. »

qui nous paraît un intéressant sujet d'études, rapprochée de la question de Mathématiques élémentaires posée en 1873 au concours d'Agrégation des Sciences mathématiques.

Le triangle A'B'C' et le triangle DEF (D, E, F étant les contacts du cercle inscrit I respectivement avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC) ayant beaucoup d'analogie, nous essaierons de réunir ici leurs plus importantes propriétés. Nous associerons ces triangles entre eux, puis aux deux suivants : $I_a I_b I_c$ des centres des cercles exinscrits à ABC et MNP des milieux de Π_a , Π_b , Π_c .

Pour ce qui suivra nous appellerons, dans le triangle ABC, A_1 , B_1 , C_1 les milieux des côtés ; A_2 , B_2 , C_2 les pieds des hauteurs ; D_a , E_a , F_a , D_b , E_b , F_b , D_c , E_c , F_c

les contacts des cercles exinscrits I_a, I_b, I_c avec les côtés BC, CA, AB respectivement; r_a, r_b, r_c les rayons

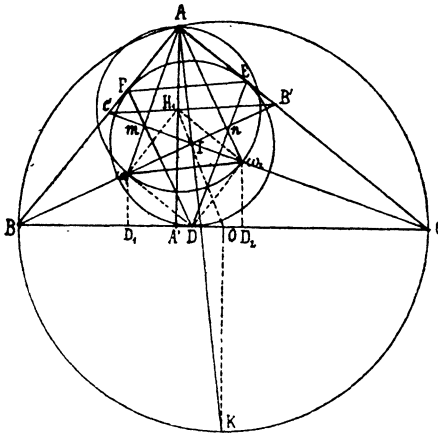


Fig. 1

de ces cercles; O le centre du cercle circonscrit de rayon R et H l'orthocentre.

1. Le triangle DEF des points de contact du cercle inscrit I avec les côtés du triangle ABC a ses angles égaux à

$$90^\circ - \frac{A}{2}, \quad 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Soit γ l'intersection de EF avec la bissectrice CI. Les deux droites CE et I γ sont antiparallèles par rapport à EF et CI, car

$$\widehat{CI\gamma} = \frac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \frac{A}{2} = \widehat{AEF}.$$

Les quatre points C, I, γ , E sont donc sur un cercle

de diamètre CI et l'angle $I\gamma C$ est droit. γ , qui est le pied de la hauteur du triangle IBC, est donc sur DE; de même β pied de la hauteur $B\beta$ est aussi sur DE, et les côtés du triangle DEF contiennent respectivement les pieds de deux des hauteurs des triangles IBC, ICA, IAB.

Nous avons montré de plus que les points β , γ sont situés respectivement sur A_1C_1 et A_1B_1 , ce qui est évident, l'angle $B\gamma C$ par exemple étant droit (*Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1910, p. 256, question 2743).

Les triangles DEF et $I_aI_bI_c$ sont homothétiques; leur centre d'homothétie L_1 est l'intersection des droites I_aD , I_bE , I_cF . Le cercle O est évidemment celui des neuf points du triangle $I_aI_bI_c$ qui a pour orthocentre I; donc le centre O_1 du cercle circonscrit à $I_aI_bI_c$ est le symétrique de I par rapport à O. La droite IOO_1 est donc la droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$.

Les droites I_aD_a , I_bE_b , I_cF_c perpendiculaires aux côtés du triangle orthique ABC de $I_aI_bI_c$ passent par O_1 . Le rayon du cercle $I_aI_bI_c$ est donc égal à $2R$; par suite le rapport de similitude des triangles DEF et $I_aI_bI_c$ est $\frac{r}{2R}$.

I et O_1 étant des points homologues de ces triangles, L_1 est situé sur IO_1 et l'on a

$$(1) \quad \frac{L_1I}{L_1O_1} = \frac{r}{2R}.$$

Le centre I, l'orthocentre H_1 du triangle DEF et L_1 sont en ligne droite; autrement dit H_1 est sur la droite IOO_1 et, dans un triangle ABC, l'orthocentre et par suite le centre de gravité du triangle DEF des contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB, sont

(196)

situés sur la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC (1).

On a de plus

$$\frac{L_1 H_1}{L_1 I} = \frac{r}{2R},$$

et avec (1)

$$\overline{L_1 I}^2 = L_1 O_1 \times L_1 H_1.$$

Donc, si I' est le symétrique de I par rapport à L_1 , la distance $O_1 H_1$ est divisée harmoniquement par les points I et I' .

La droite d'Euler $L_1 I O_1$ de $I_a I_b I_c$ contient les centres de gravité g et g' des triangles $I_a I_b I_c$ et DEF , et l'on a aussi

$$\frac{L_1 g'}{L_1 g} = \frac{r}{9R}.$$

Nous avons déduit du théorème précédent le suivant, fondamental dans l'étude du point φ de Feuerbach d'un triangle, rappelé du reste dans ce Journal, 1914, p. 110 : *les côtés du triangle DEF qui a pour sommets les points de contact du cercle inscrit et des côtés de ABC, sont tangents à la parabole dont le foyer est le point de Feuerbach φ et la directrice la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit à ABC.*

La hauteur DD' du triangle DEF rencontre AA_2 en R , et la figure $DRAI$ est un parallélogramme dans lequel $AR = ID = r$ et les hauteurs AA_2 et DD' , par exemple, des triangles ABC et DEF , et la droite $A_1 I$ qui joint le milieu de BC au centre I du cercle inscrit, sont concourantes.

(1) J. NEUBERG, *Géométrie et Mécanique : Journal de G. de Longchamps*, 1888; *Journal de Vuibert*, 34^e année, p. 78; V. THEBAULT, *Journal de Vuibert*, 1911, p. 2.

Ce point R est remarquable, en le joignant à l'extrémité D₁ du diamètre DI du cercle inscrit, *la droite* RD₁, *passé au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC. C'est la construction de φ donnée par Mannheim.

Calculons les distances x₁, y₁, z₁ de L₁ aux côtés du triangle ABC. On a, par exemple,

$$\frac{L_1 I}{I_1 O_1} = \frac{r}{2R} = \frac{r - x_1}{O_1 D_a - x_1},$$

d'où

$$x_1 = \frac{r r_a}{2R - r}, \quad y_1 = \frac{r r_b}{2R - r}, \quad z_1 = \frac{r r_c}{2R - r},$$

et

$$x_1 + y_1 + z_1 = \frac{r(4R + r)}{2R - r}.$$

De ces valeurs on déduit aussi les relations suivantes entre les aires L₁BC, L₁CA, L₁AB, désignées par s_a, s_b, s_c

$$\frac{s_a}{a \operatorname{tang} \frac{A}{2}} = \frac{s_b}{b \operatorname{tang} \frac{B}{2}} = \frac{s_c}{c \operatorname{tang} \frac{C}{2}} = \frac{S}{2(2R - r)},$$

S désignant l'aire ABC; ou encore

$$\frac{s_a}{ar_a} = \frac{s_b}{br_b} = \frac{s_c}{cr_c} = \frac{r}{2(2R - r)}.$$

Les coordonnées normales de L₁ par rapport à ABC sont donc

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{C}{2}, \quad \text{ou} \quad r_a, \quad r_b, \quad r_c.$$

Les triangles DEF et MNP sont aussi homothétiques. Leur centre d'homothétie L₂ est également situé sur OI, et

$$\frac{L_2 I}{L_2 O} = \frac{r}{R}.$$

L_2 qui est extérieur au segment OI est le centre de similitude externe des cercles circonscrits aux triangles DEF et MNP , c'est-à-dire I et O . L'orthocentre H de ABC est le centre de similitude externe des cercles O et des neuf points de ABC .

Par conséquent, la droite qui joint l'orthocentre d'un triangle ABC au centre d'homothétie des triangles DEF et MNP passe au point φ de Feuerbach du triangle ABC . D'ailleurs le conjugué harmonique L'_2 de L_2 par rapport à O et I , joint au centre de gravité G de ABC , donne une droite qui passe aussi en φ .

Les droites L_2D , L_2E , L_2F , rencontrent le cercle circonscrit O en K_1 , K_2 , K_3 . Les tangentes au cercle O en ces points rencontrent respectivement les côtés BC , CA , AB en trois points de l'axe radical des cercles O et I . D et K_1 , par exemple, sont en effet antihomologues par rapport à ces cercles O et I .

Les distances x_2 , y_2 , z_2 de L_2 aux côtés du triangle ABC s'obtiennent comme celles de L_1 :

$$x_2 = \frac{r(R - OA_1)}{R - r}, \quad y_2 = \frac{r(R - OB_1)}{R - r},$$

$$z_2 = \frac{r(R - OC_1)}{R - r};$$

d'où

$$x_2 + y_2 + z_2 = \frac{r(2R - r)}{R - r},$$

et en désignant par s_a , s_b , s_c les aires des triangles L_2BC , L_2CA , L_2AB

$$\frac{s_a}{a \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{s_b}{b \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{s_c}{c \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{Rr}{R - r};$$

de sorte que L_2 a pour coordonnées normales par rap-

port à ABC

$$\sin^2 \frac{A}{2}, \quad \sin^2 \frac{B}{2}, \quad \sin^2 \frac{C}{2}.$$

2. Dans le cas d'un triangle ABC *rectangle en A*, l'orthocentre H_1 du triangle DEF est particulièrement curieux. En voici quelques propriétés élémentaires dont certaines sont d'ailleurs visibles au seul examen de la figure 1 :

1° Les droites suivantes passent par l'orthocentre H_1 du triangle DEF :

a. Les parallèles aux bissectrices intérieures des angles du triangle ABC, menées des contacts D, E, F.

b. La droite joignant le milieu de l'hypoténuse au centre du cercle inscrit; car le milieu de l'hypoténuse n'est autre que le centre du cercle circonscrit à ABC; comme on sait d'ailleurs que :

Les droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle au centre du cercle inscrit découpent sur les hauteurs, à partir des sommets, des segments égaux au rayon r du cercle inscrit au triangle $AH_1 = r$.

c. La hauteur AA' .

Soient H_2 le point où OI rencontre AA' et K celui où AI coupe le cercle circonscrit au triangle. K est sur la perpendiculaire en O à BC, et

$$KI = KB = KC = R\sqrt{2}.$$

Les triangles semblables A_1H_2I et KOI donnent

$$AH_2\sqrt{2} = AI = r\sqrt{2},$$

et H_2 n'est autre que H_1 orthocentre du triangle DEF.

d. Les droites qui joignent les contacts D_b et E_b ,

D_c et F_c des cercles exinscrits I_b et I_c avec l'hypoténuse et les côtés CA et AB; en effet, dans le triangle rectangle, les contacts D_b , E_b , F sont en ligne droite ⁽¹⁾, et comme $CD_b = CE_b = r$, D_bE_b est parallèle à CI et D_bE_bF n'est autre que l'une des droites de α . On en peut conclure, puisque $CE_b = r$, que CA, FH_1 et C_1I sont concourantes ainsi que AB, EH_1 et B_1I .

On a aussi l'égalité des triangles I_cBF_c et BID , d'où

$$r_c = p - b, \quad r_b = p - c,$$

et la démonstration particulièrement simple de cette propriété :

Dans un triangle rectangle les rayons des cercles inscrit et exinscrits égalent respectivement $p - a$, $p - b$, $p - c$, p et la somme des rayons des cercles exinscrits dans les angles aigus égale l'hypoténuse.

e. La droite qui joint les pieds B' et C' des bissectrices intérieures des angles aigus.

$B'C'$ est en effet le lieu des points du plan du triangle ABC dont la somme des distances à AB et à CA égale la distance à BC, les distances algébriques étant comptées positivement pour les points intérieurs au triangle. Il est aisé de montrer que le point H_1 a bien cette propriété. Ses distances aux côtés sont H_1A' , H_1R , H_1S . Or

$$H_1A' = AA' - r,$$

$$H_1R + H_1S = (A'P + A'Q) \frac{r}{AA'} = (AB + CA) \frac{r}{a};$$

donc

$$H_1R + H_1S - H_1A' = (b + c) \frac{r}{a} + r - AA' = 0;$$

(1) *Mathesis*, 1913, p. 107.

et l'orthocentre H_1 du triangle DEF est tel que sa distance à l'hypoténuse égale la somme de ses distances aux côtés de l'angle droit.

f. La droite de Mannheim $D_1\varphi$ du triangle ABC (puisque $AH_1 = r$) et dans un triangle rectangle le point φ de Feuerbach est l'intersection avec le cercle inscrit de la droite qui joint le milieu du côté EF à l'orthocentre H_1 du triangle DEF.

2° La hauteur AA' du triangle ABC détermine deux triangles rectangles ABA' et $AA'C$; soient ω_1 et ω_2 les centres de leurs cercles inscrits et ρ_1, ρ_2 leurs rayons, O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle $A\omega_1\omega_2$, D_1, D_2 les contacts de ω_1 et ω_2 sur BC. Les triangles ABA' et $AA'C$ sont directement semblables et l'on peut les rendre homothétiques en faisant tourner l'un d'eux autour de A' d'un angle droit. Il en résulte que le triangle $A\omega_1\omega_2$ est directement semblable à chacun d'eux. Les triangles ABC, ABA' , $AA'C$ sont semblables et les rayons r, ρ_1 et ρ_2 sont des lignes homologues; par suite

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{\rho_2}{r} = \frac{AC}{BC},$$

et l'on a

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = r^2.$$

Alors

$$\omega_1 A' = \rho_1 \sqrt{2}, \quad \omega_2 A' = \rho_2 \sqrt{2},$$

et

$$\omega_1 \omega_2 = r \sqrt{2}.$$

Comme

$$\widehat{\omega_1 A \omega_2} = 45^\circ, \\ O_2 \omega_1 = O_2 A = O_2 \omega_2 = r,$$

et le rayon du cercle $A\omega_1\omega_2$ égale celui du cercle inscrit à ABC.

I est d'ailleurs l'orthocentre du triangle $A\omega_1\omega_2$ et comme

$$\text{angle } IA\omega_2 = \frac{C}{2} = A'A\omega_1,$$

AA' est isogonale de AI et contient O_2 . Puisque le rayon du cercle O_2 est r , O_2 est l'orthocentre H_1 du triangle DEF , ou encore, dans un triangle rectangle les centres des cercles circonscrits à ABC , DEF et $A\omega_1\omega_2$ sont en ligne droite.

3° La droite K_1K_2 qui joint les intersections des bissectrices CI et BI avec le cercle $A\omega_1\omega_2$, passe en H_1 ; cette droite est un diamètre parallèle à l'hypoténuse.

4° On a la relation

$$\frac{IH_1}{OI} = \frac{r}{R},$$

d'où

$$\frac{a}{b+c} = \frac{R}{R+r}.$$

5° D'après le 2°, H_1 est le sommet d'un carré $H_1\omega_1D\omega_2$ de côté r .

Aux précédentes relations on peut donc ajouter

$$\overline{DD_1}^2 + \overline{DD_2}^2 = r^2, \quad \overline{H_1D}^2 = 2r^2,$$

$$H_1A' = \rho_1 + \rho_2, \quad AA' = r + \rho_1 + \rho_2.$$

Cette dernière relation n'est qu'un cas particulier de la suivante dans un triangle quelconque

$$AA' = \rho_1 + \rho_2 + p \left(1 - \frac{2r}{AA'} \right).$$

6° L'hexagone $AF\omega_1D\omega_2E$ a ses côtés égaux à r et parallèles deux à deux. Les triangles DEF et $A\omega_1\omega_2$ sont égaux et leurs centres de gravité G_1

et G_2 sont situés sur IH_1 , de telle façon que

$$IG_2 = G_2G_1 = G_1H_1 = \frac{1}{3} IH_1,$$

car IH_1 est la droite d'Euler commune aux deux triangles DEF et $A\omega_1\omega_2$.

7° Les bissectrices CI et BI passent chacune à l'intersection de DF et $A\omega_1$, DE et $A\omega_2$.

DF et DE contiennent, en effet, les projections m et n de A sur CI et BI. m et n étant milieux de AM et AN, les pieds des hauteurs EH_1 et FH_1 du triangle DEF sont sur B_1C_1 .

8° Enfin, en remarquant que H_1 est le point de concours de deux diagonales du quadrilatère complet formé par B_1C_1 et les côtés de DEF, on a ce résultat :

Le point φ de Feuerbach d'un triangle rectangle est la projection orthogonale de l'orthocentre H_1 du triangle DEF sur la droite d'Hamilton relative au contact D du cercle inscrit avec l'hypoténuse.

3. Le concours d'Agrégation des Sciences mathématiques en 1873 comportait la question suivante :

On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC et l'on joint les points de contact de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle A'B'C'. On demande : 1° d'évaluer les angles du triangle A'B'C'; 2° de démontrer que les droites AA', BB', CC' sont les hauteurs du triangle ABC; 3° de déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

Une solution trigonométrique de cette question, due

à M. Gambey, a paru dans les *Nouvelles Annales*, janvier 1874, p. 43.

M. Neuberg a repris ce sujet en 1874 (*Nouvelle Correspondance mathématique*, p. 44-47), par une solution géométrique accompagnée d'intéressantes propriétés qu'il a d'ailleurs réunies pour la plupart dans la question 51 du *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse (*Exercices sur la Géométrie du triangle*, p. 513 de la septième édition, 1900) :

On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC et l'on joint les points de contact de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle A'B'C'. Soient O, I, I_a, I_b, I_c les centres et R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits à ABC. Démontrer que : 1° les côtés des triangles A'B'C' et I_aI_bI_c se coupent deux à deux aux pieds des hauteurs des triangles I_aBC, I_bCA et I_cAB; 2° les droites AA', BB', CC' sont les hauteurs de ABC et leur point de concours H est le centre du cercle circonscrit à A'B'C'; 3° AA' = r_a, BB' = r_b, CC' = r_c, HA' = 2R + r = $\frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}$; 4° les droites A'I_a, B'I_b, C'I_c sont les symédianes des deux triangles A'B'C' et I_aI_bI_c.

La question 1967 bis de *Mathesis* est en quelque sorte une réciproque des deux questions ci-dessus. Nous allons maintenant l'étudier directement en indiquant d'autres propriétés curieuses de la figure (1).

(1) Le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* a donné en 1909, page 267, la réciproque des 2° et 3° de la question 51 de M. Neuberg. Nous avons alors montré, page 268, que les côtés de A'B'C' sont les cordes des contacts des cercles exinscrits avec les côtés du triangle.

1° Les points A', B', C' sont extérieurs au triangle ABC .
 La bissectrice AI_a coupe le cercle O au milieu M de I_a
 et $A_1M = \frac{1}{2}(r_a - r)$; comme

$$A_1M = OM - OA_1 = R - \frac{HA}{2},$$

$$HA + r_a = HA' = 2R + r.$$

Pareillement,

$$HB' = HC' = 2R + r = HA'.$$

Le triangle $A'B'C'$ est donc inscrit dans un cercle de rayon $2R + r$ dont le centre est l'orthocentre H du triangle ABC .

2° Les droites HA', HB', HC' étant égales entre elles et respectivement parallèles aux droites égales ID, IE, IF , mais de sens contraire, le triangle $A'B'C'$ est inversement homothétique aux triangles DEF et $I_aI_bI_c$. On en conclut que les angles du triangle $A'B'C'$ sont respectivement

$$A' = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad B' = 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad C' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Ceci permet de calculer les éléments du triangle. Ainsi les côtés et la surface ont pour valeurs

$$B'C' = 2(2R + r) \cos \frac{A}{2}, \quad C'A' = 2(2R + r) \cos \frac{B}{2},$$

$$A'B' = 2(2R + r) \cos \frac{C}{2},$$

$$S = 2(2R + r)^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A'B'C'$, DEF et $I_aI_bI_c$ étant $2R + r, r, 2R$, on a cette propriété remarquable :

Toute droite du triangle A'B'C' égale la somme des droites homologues dans les triangles DEF et I_aI_bI_c.

Ainsi les côtés du triangle A'B'C' égalent respectivement la somme des côtés homologues dans les triangles DEF et I_aI_bI_c.

Nous tirerons tout à l'heure d'autre parti de cette proposition.

3° Soient Q, Q' les points de rencontre de B'C' avec AB et une parallèle menée par B à AC. B'C' étant perpendiculaire à AI_a,

$$\text{angle } BQC' = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad \text{angle } BB'Q = \frac{A}{2};$$

d'où

$$\text{angle } BQQ' = \text{angle } BQ'Q, \quad \text{et} \quad BQ = BQ'.$$

Mais les triangles BB'Q' et E_bI_bA sont égaux, puisque

$$BB' = I_b E_b \quad \text{et} \quad \text{angle } Q' = \text{angle } E_b A I_b.$$

Il en résulte que

$$BQ' = BQ = AE_b = p - C,$$

et Q n'est autre que le contact F_a du cercle exinscrit I_a.

En d'autres termes *les côtés du triangle A'B'C' sont les cordes E_aF_a, D_bF_b, E_cD_c des contacts des cercles exinscrits dans les angles du triangle ABC, ou encore les polaires des sommets A, B, C par rapport aux cercles-exinscrits I_a, I_b, I_c.*

De façon tout analogue à notre démonstration relative au triangle DEF, on obtient le 2° de la question de M. Neuberg :

Les côtés du triangle A'B'C' contiennent les pieds de deux des hauteurs des triangles I_aBC, I_bCA et

I_cAB , c'est-à-dire les intersections des côtés des triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$.

Soient $X_a, Y_a, X_b, Y_b, X_c, Y_c$ ces points; ils sont aussi situés, comme β et γ , sur les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ et l'on a, par exemple,

$$X_a\gamma = BC = Y_a\beta.$$

De plus chacun des côtés de $A_1B_1C_1$ contient deux points tels que X_a et deux tels que γ ; ces quatre points sont alignés de façon que leurs distances respectives deux à deux sont $p, p - a, p - b, p - c, a, b, c, p$ étant les éléments du triangle ABC . Ainsi sur A_1B_1 sont placés X_a sur BI_a , δ sur CI , γ sur BI et Y_b sur AI_b , et

$$\begin{aligned} X_a\delta &= p - b, & \delta\gamma &= p - c, \\ \gamma Y_b &= p - a, & X_a Y_b &= p. \end{aligned}$$

Les trois droites $X_a Y_b, Y_a X_c, X_b Y_c$, étant égales et $X_a, Y_a, X_b, Y_b, X_c, Y_c$ étant les pieds des perpendiculaires, issues des sommets du triangle orthique ABC de $I_aI_bI_c$, sur les côtés de ce triangle, ces six points, intersections des côtés des triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$, sont situés sur le cercle de Taylor du triangle $I_aI_bI_c$. Ce cercle est orthogonal aux cercles exinscrits $I_aI_bI_c$.

Nous avons donné cette propriété des six points précédents, considérés comme intersections des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ avec les cercles décrits sur BC, CA, AB comme diamètres (*Bulletin de mathématiques élémentaires*, 1909, p. 248, question 2422).

Le centre Ω du cercle de Taylor de $I_aI_bI_c$ est le centre du cercle inscrit au triangle $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire le centre de gravité du périmètre du triangle ABC . Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ étant homothétiques, le

centre étant le centre de gravité G commun à ces triangles et le rapport $\frac{1}{2}$, les droites HI et $O\Omega$, qui joignent les orthocentres aux centres des cercles inscrits, sont parallèles et $O\Omega = \frac{1}{2} HI$.

Nous avons vu que $OO_1 = IO$, donc Ω est le milieu de O_1H .

4° La droite $A'I_a$, qui joint deux sommets homologues des triangles $A'B'C$ et $I_aI_bI_c$, rencontre BC en un point S tel que

$$\frac{A'S}{SD_a} = \frac{h_a + r_a}{r_a} = \frac{b + c}{a} = \frac{A_2A_1}{A_1D_a},$$

c'est-à-dire au milieu A_1 de BC . De même $B'I_b$ et $C'I_c$ passent respectivement en B_1 et C_1 . $A'I_a$, $B'I_b$ et $C'I_c$ se coupent au centre K de similitude des triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$.

Par suite, ABC étant le triangle orthique de $I_aI_bI_c$, les droites $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ qui passent aux milieux de BC , CA , AB sont les symédianes du triangle $I_aI_bI_c$. Leur point d'intersection K , centre de similitude des triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$, est donc le point de Lemoine de ces deux triangles.

C'est le 4° de la question de M. Neuberg dont l'auteur a donné aussi une solution très simple, Article cité précédemment.

Cette propriété remarquable nous a donné les suivantes :

La droite qui joint les centres des cercles circonscrits aux triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$ passe au point de Lemoine commun de ces triangles ainsi que par les centres des cercles de Taylor relatifs à ces triangles.

Plus généralement : dans un triangle le centre du

cercle circonscrit, le point de Lemoine, l'orthocentre du triangle orthique et le centre de gravité du périmètre de ce dernier triangle, sont quatre points en ligne droite.

Ce théorème doit être rapproché de celui donné au paragraphe 1 et relatif à l'orthocentre H_1 de DEF.

On en déduit cet autre, comparable aussi à celui que nous avons donné relativement au point de Feuerbach :

Le triangle médian $A_1B_1C_1$ et le triangle orthique $A_2B_2C_2$ relatifs à un triangle ABC sont circonscrits à une même parabole ayant pour foyer le point de Steiner et pour directrice la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle ABC.

5° Soit H_2 l'orthocentre de $A'B'C'$. H étant le centre du cercle circonscrit à ce triangle, HH_2 est la droite d'Euler de $A'B'C'$, laquelle est par suite parallèle à la droite d'Euler IO_1 de $I_aI_bI_c$, et la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$ est parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

6° D'après la propriété donnée au 2°,

$$H_1I + IO_1 = HH_2,$$

car H_1I , IO_1 et HH_2 sont respectivement les droites d'Euler de DEF, $I_aI_bI_c$, $A'B'C'$, limitées en des points homologues. *Le quadrilatère $HH_1O_1H_2$ est donc un parallélogramme.*

Soit L_3 le centre d'homothétie des triangles $A'B'C'$ et DEF. Ce point est situé à l'intersection des droites H_1H_2 et HI .

Nous avons vu que le centre de gravité du périmètre du triangle ABC est le milieu Ω de HO_1 . Comme

$HH_1O_1H_2$ est un parallélogramme, H_1H_2 passe en Ω .

D'où cette propriété de L_3 :

Le centre d'homothétie L_3 des triangles $A'B'C'$ et DEF , les orthocentres H_2 et H_1 , de ces triangles et le centre de gravité Ω du périmètre du triangle ABC sont quatre points en ligne droite.

Les distances x_3, y_3, z_3 de L_3 aux côtés de ABC peuvent s'exprimer

$$x_3 = \frac{r(2R + r + HA')}{2(R + r)}; \quad y_3 = \frac{r(2R + r + HB')}{2(R + r)};$$

$$z_3 = \frac{r(2R + r + HC')}{2(R + r)}.$$

7° *Les droites $A'D_a, B'E_b, C'F_c$ parallèles à AI, BI, CI , sont les hauteurs du triangle $A'B'C'$.*

En effet AA' et D_aI_a , par exemple, sont des droites équipollentes. Le rayon OA rencontre en M la hauteur $A'D_a$, et comme

$$\text{angle } AA'M = \frac{1}{2} (\hat{C} - \hat{B}) = \text{angle } OAI_a = \text{angle } AMA',$$

les hauteurs du triangle $A'B'C'$ découpent, sur les rayons OA, OB, OC de ABC , respectivement trois segments

$$OM = r_a, \quad ON = r_b, \quad OP = r_c;$$

ou les symétriques des sommets A', B', C' par rapport à I_bI_c, I_aI_c et I_aI_b sont situés sur les rayons OA, OB, OC .

Soit X l'intersection de OA et de I_aD_a . Le triangle MD_aX est isocèle et l'on trouve

$$OX + XO_1 = R.$$

En supposant fixes les cercles O et I , ABC étant variable tout en restant inscrit à O et circonscrit à I , O_1 est fixe, et le lieu des points X, Y, Z , d'intersections des rayons OA, OB, OC avec I_aD_a, I_bE_b, I_cF_c respectivement, est une ellipse de foyers O et O_1 .

4. Le triangle $I_aI_bI_c$ est très connu et beaucoup de ses propriétés sont classiques. Nous signalerons cependant les deux suivantes :

a. M. Neuberg a donné dans *Mathesis*, 1882, p. 111, ce théorème : *La droite qui joint les pieds α', β', γ' des bissectrices extérieures d'un triangle ABC est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit, dont voici une démonstration bien simple.*

D'après ce qui précède, α', β', γ' sont les intersections des côtés du triangle $I_aI_bI_c$ avec les côtés de son triangle orthique ABC . Or on sait que ces côtés se coupent deux à deux en trois points de l'axe radical des cercles circonscrit O_1 et des neuf points de $I_aI_bI_c$.

Mais OO_1 n'est autre que la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit à ABC .

b. Considérons sur les hauteurs AI_a, BI_b, CI_c du triangle $I_aI_bI_c$ les trois points $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, symétriques de l'orthocentre I par rapport aux milieux des hauteurs. Ces points sont remarquables.

Les cercles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ tangents respectivement à CA et AB , AB et BC , BC et CA , ont pour rayons

$$\rho_a = r_a - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}; \quad \rho_b = r_b - r = 4R \sin^2 \frac{B}{2};$$

$$\rho_c = r_c - r = 4R \sin^2 \frac{C}{2},$$

car si la parallèle $I\mu$ à BC , par exemple, rencontre I_cF_c

en μ et si N est le contact du cercle ω_c avec BC , les triangles égaux $\Pi_c\mu$ et $CN\omega_c$ donnent

$$\omega_c N = I_c \mu = r_a - r.$$

Les cercles ω_a , ω_b , ω_c touchent donc les côtés du triangle ABC en P et P_1 , Q et Q_1 , N et N_1 , tels que

$$NC = CN_1 = c; \quad AP = P_1A = a; \quad QB = BQ_1 = b$$

et

$$BP = BN = a - c; \quad Q_1C = P_1C = a - b;$$

$$N_1A = Q_1A = b - c.$$

A , B , C sont donc des points des axes radicaux des cercles ω_b et ω_c , ω_a et ω_c , ω_a et ω_b .

D_a , D_b , D_c étant respectivement milieux des segments NQ_1 , P_1N_1 , QP , sont aussi de même puissance par rapport aux couples de cercles précédents dont les axes radicaux sont par suite AD_a , BD_b , CD_c et le centre radical le point de Nagel n du triangle ABC .

Les droites PN , N_1Q et P_1Q_1 passent, comme l'on sait, au point de Nagel de ABC et l'on a par exemple, deux triangles homothétiques QnN et $E_cF_cD_c$, ce qui montre que le cercle ω_c passe en n . Il en est de même des cercles ω_a , ω_b et les trois cercles ω_a , ω_b , ω_c se coupent au point Nagel du triangle ABC .

Les distances α , β , γ du point de Nagel aux côtés de ABC étant respectivement

$$\alpha = 2r \times \frac{p-a}{a} = \frac{r^2}{2R} \sin^2 \frac{A}{2};$$

$$\beta = 2r \times \frac{p-b}{b} = \frac{r^2}{2R} \sin^2 \frac{B}{2};$$

$$\gamma = 2r \times \frac{p-c}{c} = \frac{r^2}{2R} \sin^2 \frac{C}{2};$$

on a

$$2\rho_a\alpha = 2\rho_b\beta = 2\rho_c\gamma = 4r^2,$$

et les cercles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ sont respectivement inverses des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, le point n de Nagel étant le centre d'inversion et la puissance $4r^2$.

Considérons alors le diamètre nn' de ω_c , par exemple, perpendiculaire sur AB en T et les points γ_1 et γ_2 d'intersection de AB avec ω_c . Dans le triangle rectangle $n\gamma_1n'$,

$$4r^2 = 2\gamma\rho_c = nT \times Tn' = \overline{n\gamma_1}^2 = \overline{n\gamma_2}^2.$$

De même on a

$$2r = n\gamma_1 = n\gamma_2 = n\alpha_1 = n\alpha_2 = n\beta_1 = n\beta_2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ étant analogues à γ_1 et γ_2 sur BC et CA, et les cercles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ coupent en général les côtés du triangle ABC en six points concycliques $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Le centre du cercle est le point de Nagel du triangle ABC et le rayon, le diamètre du cercle inscrit à ce triangle.

La condition nécessaire et suffisante pour que les six points du cercle existent est, par exemple,

$$2\rho_a \geq a,$$

soit

$$r_a - r \geq r \times \frac{p-a}{a}$$

ou

$$3a \leq b + c.$$

Dans le cas de l'égalité, deux points sont confondus et le cercle précédent touche l'un des côtés du triangle. On obtient ainsi une propriété nouvelle de ce triangle, dans lequel un côté est le tiers de la somme des deux autres, que nous avons signalé dans *Mathesis*, juillet-août 1914, p. 181.