

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 179-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__179_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Équation générale des paraboles qui passent en un point donné et ont en ce point un rayon de courbure donné. (On prendra le point pour origine, la tangente en ce point pour axe des x , et l'on désignera par α l'angle de la direction de l'axe avec Ox .)*

2° *Enveloppe des axes de ces paraboles. Construire la courbe.*

3° *Longueur totale de la courbe. Rayon de courbure en un point.*

4° *Surface comprise à l'intérieur de la courbe.*

5° *Trajectoires orthogonales des axes des paraboles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer, par la méthode trigonométrique ou la méthode de Newton avec trois décimales, les racines de l'équation*

$$x^3 + 3x^2 - 16x - 10 = 0.$$

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x \frac{dy}{dx} - y = k \left(x + y \frac{dy}{dx} \right).$$

Équation de la courbe en coordonnées polaires.

III. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = \cos x + x \sin x.$$

(Juin 1914.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère le système d'équa-*

tions différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dB}{ds} = pC - rA, \\ \frac{dC}{ds} = -pB, \\ \frac{dA}{ds} = rB, \end{cases}$$

système par lequel on veut déterminer les fonctions inconnues A, B, C, de la variable s, connaissant les fonctions données p et r.

Vérifier que ce système dont l'ensemble $A_1 B_1 C_1$ désigne une solution particulière possède toujours les deux intégrales suivantes :

$$A^2 + B^2 + C^2 = \text{const.}; \quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = \text{const.}$$

II. En n'envisageant que les solutions du système (1) vérifiant la relation

$$(2) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

on fait le changement suivant de fonctions

$$(3) \quad \begin{cases} B = \cos \theta, \\ C = \sin \theta \cos \omega, \\ A = \sin \theta \sin \omega, \end{cases}$$

aux nouvelles fonctions inconnues θ et ω ; on demande de former les deux équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions θ et ω de la variable s.

Introduire, dans le résultat obtenu, les données nouvelles ω et u fonctions de s, liées aux anciennes p et r par les relations

$$(4) \quad \begin{cases} r = \omega \cos u, \\ p = \omega \sin u. \end{cases}$$

III. Que sera la fonction inconnue ω si θ se réduit à une constante?

IV. On sait que, si p et r désignent respectivement la

torsion et la courbure d'une courbe gauche en fonction de l'arc s de cette courbe, le système (1) sera satisfait quand on y remplace A, B, C par les cosinus des angles que forment avec toute direction fixe de l'espace les directions respectives suivantes :

- 1° La direction de la tangente T à la courbe;
- 2° La direction de la normale principale N ;
- 3° La direction de la binormale Q à la courbe;

$$(5) \quad \begin{cases} A = \cos(\widehat{T, U}), \\ B = \cos(\widehat{N, U}), \\ C = \cos(\widehat{Q, U}). \end{cases}$$

Considérons alors les courbes gauches G dont la normale principale fait un angle constant avec une direction fixe OZ .

On demande d'appliquer la solution trouvée pour la question III à la détermination des fonctions correspondantes A'', B'', C'' qui doivent remplacer les fonctions A, B, C lorsque la direction U coïncide avec OZ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0.$$

2° Que représente la surface

$$(x + y - 3z)^2 + x + y - 5z = 0.$$

(Juin 1914.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\sin x \cos x \frac{dy}{dx} - y + 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1 = 0.$$

2° Désignant par $y_1(x)$ la solution particulière de

l'équation précédente qui prend la valeur numérique $\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$, construire la courbe représentative de cette solution.

3° Calculer les termes du développement en série de $y_1(x)$ suivant les puissances entières de x jusqu'au terme de degré 3 en x inclusivement.

II. Les axes OX, OY, OZ étant supposés rectangulaires, on considère la surface (S) représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)z^2 - R^2x^2 = 0,$$

où R désigne une longueur donnée :

1° Construire les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés.

2° Vérifier que la surface est un conoïde de plan directeur XOY et d'axe OZ, dont les génératrices sont tangentes à la sphère (Σ) de rayon R qui est tangente en O au plan YOZ. Soit (C) le lieu du point de contact de la génératrice avec la sphère (Σ) : montrer qu'en un point quelconque de (C) la surface (S) et la sphère (Σ) ont même plan tangent.

3° Projections de la courbe (C) sur les trois plans coordonnés.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient une ellipse de centre O et de sommets A, B, tels qu'on ait*

$$OA = 10^m, \quad OB = 5^m;$$

A', B' les milieux respectifs de OA, OB; M, M' les points d'intersection de la droite A'B' avec l'ellipse :

1° Calculer à 1^{mm} près les distances aux axes des points M et M'.

2° Calculer l'aire comprise entre la droite MM' et l'arc d'ellipse MABM'. Indiquer l'approximation du résultat obtenu.

(Juin 1914.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Pour quelles valeurs des con-*

stantes α et β l'expression

$$\left[\frac{1}{(x^2+1)^2} + \sin(\alpha y) - y \sin(\alpha x) \right] dx \\ + \left[\frac{1}{(y^2+1)^2} + x \cos(\beta y) + \cos(\beta x) \right] dy$$

est-elle la différentielle d'une fonction $U(x, y)$? Calculer $U(x, y)$ dans ce cas.

II. Une parabole (P) de paramètre constant p tourne dans son plan autour de son sommet O. Dans chaque position, on lui mène la tangente (T) parallèle à une droite fixe. On demande :

1° Le lieu du point de contact M de (P) avec la tangente (T);

2° Le lieu du point C, centre de courbure de (P) en M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1. Construire, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy , la courbe représentée par l'équation

$$y = x^3 Lx - x - 1,$$

où Lx désigne le logarithme népérien de x .

2 Calculer, avec trois décimales exactes, la racine de l'équation

$$x^3 Lx - x - 1 = 0.$$

(On rappelle que $L10 = 2,3026$.) (Novembre 1914.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soit le plan (II) représenté par l'équation

$$x \cos u + y \sin u + vz + \cos 2u + v^2 = 0.$$

1° Quand u et v varient, (II) enveloppe une surface (Σ). Calculer les coordonnées du point de contact M, en fonction de u et v . Montrer que (Σ) admet les trois plans de coordonnées pour plans de symétrie.

2° Lorsque v seul varie, montrer que (Π) enveloppe un cylindre, circonscrit à (Σ) le long d'une parabole, section droite du cylindre. Équation de ce dernier. Déterminer le plan (P) , l'axe (A) et le sommet S de la parabole.

Déterminer et construire le lieu (L) de S et l'enveloppe (E) de (A) . Quelle relation y a-t-il entre ces deux courbes? Calculer leurs rayons de courbure.

Soient α, β les points de rencontre de (A) avec Ox et Oy , I leur milieu, γ la projection de O sur (A) . Prouver que S est au milieu de $I\gamma$.

3° Quel est le lieu de M quand u seul varie? Le construire dans les cas $v = 0$ et $v = \sqrt{3}$. Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de (Π) et montrer que c'est une hélice sur le cylindre dont (E) est section droite.

4° Calculer les rayons de courbure principaux de (Σ) au point $Q(u = 0, v = 0)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation

$$2y'' - 5y' + 3y = xe^x + e^{\frac{3}{2}x};$$

déterminer les constantes de manière que, pour $x = 0$, y et y' soient nuls. (Juin 1914.)

Lyon.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. Intégrer l'équation différentielle

$$\cos x \frac{dy}{dx} - 2y \sin x = \cos^3 x.$$

II. Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, on donne les deux surfaces qui ont pour équations

$$(S) \quad x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$(C) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

1° Nature et position respective des deux surfaces.

2° Étudier la projection de leur intersection sur les divers plans de coordonnées. Montrer que cette intersection se compose de deux ellipses. Calculer l'aire de ces ellipses.

(185)

3° Calculer l'aire de la portion de surface (C) comprise à l'intérieur de (S).

4° Volume du solide commun aux deux surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° Construire la courbe représentée par l'équation

$$y = \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}.$$

Minimum de y . Asymptotes. Position de la courbe par rapport aux asymptotes.

2° Nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite $y = 3$. Calculer à $\frac{1}{10}$ près l'abscisse de l'un de ces points.

II. Déterminer les fonctions $z(x, y)$ telles qu'on ait

$$dz = \frac{(y^2 + y) dx + (x^2 + x) dy}{(x + y + 1)^2}.$$

(Juillet 1914.)

Marseille.

COMPOSITION ÉCRITE. — 1. Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\lambda - y},$$

où a et λ sont deux constantes positives données.

2. L'intégrale, à une constante près, peut se mettre sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= a \sin \varphi - \lambda \varphi, \\ y &= a \cos \varphi. \end{aligned}$$

Discuter les différentes formes de courbes déterminées par ces équations quand λ varie.

3. Calculer la longueur de l'arc de courbe quand on a

$$\lambda = a.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Une barre pesante et homo-

gène OA de longueur a est mobile dans un plan vertical autour de son extrémité O qui est fixe.

A l'origine des temps, cette barre est horizontale et elle est lancée vers le bas avec une vitesse angulaire $\sqrt{\frac{3g}{a}}$.

On demande de trouver la vitesse angulaire :

1° Quand la barre est verticale et dirigée vers le bas;

2° Quand elle est verticale et dirigée vers le haut.

Au bout de combien de temps atteint-elle la première ou la seconde position?

2° Calculer, par la méthode de Simpson, l'intégrale

$$\int_0^1 \cos \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right] dx.$$

On divisera l'intervalle d'intégration en dix parties égales. (Juin 1914.)

COMPOSITION ÉCRITE. — 1. Trouver une courbe C passant par l'origine des coordonnées et satisfaisant à l'équation différentielle

$$x \frac{dy}{dx} + y = ax^2 + b.$$

Choisir b de sorte que la courbe C soit symétrique par rapport à l'axe des y , les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

2. A chaque point M de coordonnées x et y de la courbe C on fait correspondre un point M_1 de coordonnées x et $y_1 = \lambda y$ d'une seconde courbe C_1 . Le point M_1 est donc obtenu en augmentant l'ordonnée y de M dans un rapport constant λ . On mène ensuite le rayon qui va de l'origine O des coordonnées au point M de la courbe C. Ce rayon coupe la courbe C_1 en un point M' évidemment différent de M_1 . Démontrer que la tangente en M à la courbe C et la tangente en M' à la courbe C_1 sont parallèles.

3. Calculer les courbures en M, en M_1 et en M'.

4. Le rayon vecteur détermine deux segments de courbes. Calculer leurs aires et l'aire de leur différence.

SOLUTION.

On a, pour la courbe C,

$$y = \frac{a}{3} x^2$$

et, pour la courbe C₁,

$$y_1 = \frac{a\lambda}{2} x^2.$$

On a donc, au point M',

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\frac{a\lambda}{3} x'^2}{\frac{a}{3} x^2}$$

et, par suite, en appelant r et r' les longueurs des rayons vecteurs,

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{r'}{r} = \frac{1}{\lambda},$$

c'est-à-dire que les courbes C et C₁ sont homothétiques par rapport à l'origine et, par suite, les tangentes aux points homologues M et M' sont parallèles.

Pour les courbures, on a, en M,

$$\frac{1}{R} = \frac{2a}{9(9 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

en M₁,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2a\lambda}{9(9 + 4a^2\lambda^2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et, en M',

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{\lambda R}.$$

Pour le segment parabolique OM, soit P le pied de l'ordonnée du point M, on sait que

$$\text{secteur OM} = \frac{1}{3} \text{ triangle OPM.}$$

On aura, de même,

$$\text{secteur OM'} = \frac{1}{3} \text{ triangle OP'M'}$$

et, pour la différence δ des deux secteurs, on aura

$$\delta = \frac{1}{3} \text{ trapèze rectiligne PMM'P' }.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire avec précision la courbe

$$y = \frac{\sin x}{x} - x$$

quand x varie de zéro à 2π .

2° Trouver le mouvement d'un point pesant, mobile dans un plan vertical, et sollicité par une force horizontale égale à son poids, sachant que primitivement le point est lancé avec une vitesse horizontale égale à 2^m par seconde.

(Novembre 1914.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — On donne une ellipse et les tangentes aux sommets A, A' du grand axe. Une tangente quelconque coupe ces tangentes fixes aux points T et T' :

1° Démontrer que le produit des segments AT et A'T' est constant et que la circonférence C, ayant pour diamètre TT', passe par les foyers de l'ellipse.

2° Par l'un des foyers on mène le diamètre de la circonférence C. A l'autre extrémité M de ce diamètre on mène la tangente MM' au cercle C; trouver l'enveloppe de cette tangente, lorsque la tangente TT' à l'ellipse se déplace. Si M' est le point de contact de la droite MM' avec son enveloppe, montrer que M est le milieu de la portion de cette droite comprise entre M' et le grand axe de l'ellipse prolongé.

3° On considère une tangente au cercle C perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Trouver le lieu de son point de contact. Montrer comment se déplace ce point, lorsque le point de contact de la tangente à l'ellipse décrit l'ellipse dans un sens déterminé, et préciser les parties du lieu qui correspondent à des tangentes réelles.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'aire de la portion du paraboloïde

$$x^2 + y^2 = 2az$$

(189)

comprise à l'intérieur du cylindre

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

(Juin 1914.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une lemniscate est représentée par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega.$$

1° Calculer les angles que forme la tangente avec le rayon vecteur OM et avec l'axe Ox.

2° Calculer les distances de l'origine à la tangente et aux points où cette tangente coupe les axes rectangulaires Ox et Oy. Calculer l'aire du triangle formé par la tangente et ces deux axes.

3° Exprimer cette aire en fonction de $\tan 2\omega$ et étudier sa variation lorsque le point de contact décrit la lemniscate; en particulier, lorsque le point de contact reste entre les points où la tangente coupe les parties positives des axes Ox et Oy.

4° Étant donné un point M sur la lemniscate, déterminer un autre point M', sur la même boucle, tel que les tangentes en M et M' soient rectangulaires. Calculer l'aire limitée par l'arc MM' et les deux rayons vecteurs OM et OM'. Quel est le minimum de cette aire.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Que deviennent les intégrales

$$\int_0^1 \frac{x - x^3}{1 - x^6} dx, \quad \int_1^\infty \frac{x^3 - x}{x^6 - 1} dx,$$

si l'on pose $x = \frac{1}{y}$ et $y = +\sqrt{t}$.

Calculer $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t+t^2}$ et en déduire les valeurs des deux premières intégrales.

(Novembre 1914.)

Rennes.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. Développées des courbes planes.

II. On considère l'hélice définie en coordonnées rectan-

gulaires par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

où t désigne un paramètre variable, a et b des constantes.

En un point quelconque M de l'hélice, on mène la tangente MP qui rencontre en P le plan XOY . Montrer que les coordonnées X, Y du point P s'expriment en fonction de la variable t par les formules

$$(2) \quad X = a \cos t + at \sin t, \quad Y = a \sin t - at \cos t.$$

Quand le paramètre t varie, le point P décrit une courbe (C). Étudier cette courbe : tangente, normale, longueur d'arc, rayon de courbure, centre de courbure, développée.

Expliquer, par des considérations géométriques, les résultats trouvés.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit un point M de masse unité, mobile sur Ox , soumis : 1° à une force répulsive égale à OM ; 2° à une force fonction du temps et égale à $e^{\omega t}$, où ω est une constante.

I. Trouver la relation qui lie x au temps t . On supposera successivement $\omega \neq \pm 1$, $\omega = 1$ et $\omega = -1$.

II. Construire la courbe $x = e^t + e^{-t} + \frac{t}{2} e^t$ et trouver l'aire de cette courbe comprise entre l'axe des t , la courbe et les droites $t = 0, t = T$. (Juin 1914.)