

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14 (1914), p. 570-581

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__570_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

1° Déterminer l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4x + \sin ax$$

en exposant sur cet exemple la méthode d'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

2° Déterminer les constantes arbitraires d'intégration de façon que la courbe représentant les variations de y soit tangente à l'origine à la droite $y = x$.

3° En supposant $a = 1$, étudier la forme de la courbe. Points d'inflexion. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les abscisses $x = 0$, $x = \pi$.

4° Que devient l'intégrale générale si $a = 2$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — La normale en un point M d'une courbe rencontre l'axe des x en N .

1° Déterminer les courbes telles que le rayon de courbure en un point quelconque soit proportionnel à la portion de normale MN, $\rho = k \cdot MN$.

2° Cas particuliers : $k = \pm 1, \pm 2$.

(Novembre 1913.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° On considère une courbe plane C_0 qui, à l'égard d'un de ses points O convenablement choisi et à l'égard de deux droites OX et OY issues de ce point, jouit de la propriété suivante :

Traçons le parallélogramme $OAMB$ ayant deux côtés contigus portés par OX et OY et ayant comme sommet M opposé à O un point QUELCONQUE de l'arc continu de la courbe partant de O ; l'aire du triangle mixtiligne compris entre les segments OA , AM et l'arc de courbe OM est dans un rapport constant h avec l'aire du parallélogramme. Former l'équation explicite de cette courbe C_0 .

2° Parmi les courbes C_0 variables avec h , on considère une courbe γ qui, à l'égard d'un second point particulier M_0 de la courbe et à l'égard de deux droites particulières M_0U et M_0V issues de ce point, possède une propriété analogue à la première propriété relative à O ; en sorte que si $M_0A'MB'$ est un second parallélogramme, on aura avec un coefficient k analogue à h , et quel que soit M ,

$$\frac{\text{aire } M_0MA'}{\text{aire } M_0A'MB'} = k; \quad \frac{\text{aire } OAM}{\text{aire } OAMB} = h.$$

En adoptant le système d'axe OX et OY , on montrera que ces deux propriétés permettent l'élimination du rapport $\frac{dy}{dx}$ entre deux équations différentielles concernant les coordonnées x et y de M ; on effectuera cette élimination et l'on discutera sur l'équation résultante obtenue les cas où celle-ci sera ou ne sera pas une identité. Conclure de cette discussion la nature spéciale de la courbe γ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv}{(h^2 + a^2 u^2 + b^2 v^2) \sqrt{h^2 + a^2 u^2 + b^2 v^2}}.$$

2° Aire de l'ellipse

$$(5x + y)^2 + (4x + y)^2 = \frac{C^2}{\pi}.$$

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On envisage les courbes planes dont une propriété, supposée indépendante des axes de coordonnées, se traduit par l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \quad F(x, y; y', y'') = 0.$$

On sait d'autre part que chacune des courbes de la famille

$$(2) \quad \varphi(x, y; \alpha) = 0 \quad (\alpha \text{ paramètre variable})$$

possède la propriété indiquée.

La famille (2) est supposée d'ailleurs ne pas représenter les diverses positions d'une courbe invariable dans un déplacement particulier.

Démontrer, en quelques lignes, que l'intégrale générale de l'équation (1) s'obtient alors immédiatement en donnant à chacune des courbes de la famille (2) un déplacement continu compatible avec la forme (2).

On appliquera cette remarque au problème suivant :

II. 1° Vérifier que le rayon de courbure R en un point M d'une conique est lié à la distance p de son centre O à la tangente et à la distance r du point M au centre O par la relation

$$(3) \quad R = \frac{K^2 - r^2}{p} \quad (K^2 \text{ constante déterminée}).$$

2° En s'appuyant sur la question précédente, trouver toutes les courbes planes qui jouissent de cette propriété à l'égard d'un point O pris pour origine des coordonnées.

3° Former effectivement l'équation différentielle qui

traduit la propriété (3), la transformer en coordonnées polaires de pôle O et, si l'on a le temps, intégrer cette équation transformée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les deux bases respectives (de longueurs $2a$ et $2b$) d'un trapèze isoscèle sont distantes du centre de gravité de l'aire du trapèze de longueurs respectivement égales à p et à q .

1° Calculer a et b en fonction de p , de q et de la base moyenne $2c$ du trapèze ;

2° Calculer a et b en fonction de p , de q et de la largeur 2γ du trapèze estimée sur la parallèle à ses bases menée par le centre de gravité. (Novembre 1913.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — A partir d'un point variable P sur Ox et d'abscisse u on mène le segment de longueur constante $PM = \lambda$ faisant avec Ox l'angle φ . Si l'on suppose que u est une fonction donnée de φ , le point M décrit une courbe C.

1° Déterminer u en fonction de φ de manière qu'en tout point M de la courbe C la tangente soit précisément la droite correspondante MP et exprimer les coordonnées du point M en fonction de la seule variable φ . La fonction u de φ sera déterminée à une constante près qu'on déterminera de manière que pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on ait $u = 0$.

2° La courbe C étant ainsi déterminée, trouver l'aire comprise entre cette courbe et l'axe Ox.

3° Calculer en fonction de φ le rayon de courbure en M de la courbe C et les coordonnées du centre de courbure N. Montrer que le point N se trouve sur la parallèle à Oy menée par le point P.

4° Trouver l'équation du lieu décrit par le point N.

5° Déterminer l'enveloppe du cercle variable ayant N comme centre et NP comme rayon.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère un pendule simple formé d'un poids $M = 10$ kilogrammes, placé à l'extrémité d'une tige rigide OM sans masse de longueur l oscillant

autour d'un point O. La durée d'oscillation du pendule, exprimée en secondes, est égale à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, l exprimée en mètres, $g = 9^m,80650$ à Bordeaux. On suppose l telle que cette durée d'oscillation est égale à une seconde.

On ajoute un curseur C de masse $\mu = 10$ grammes, de dimensions infiniment petites, mobile le long de la tige entre O et M, si x est sa distance au point O, la durée d'oscillation devient

$$T = \pi\sqrt{\frac{Ml^2 + \mu x^2}{g(Ml + \mu x)}}.$$

1° Étudier la variation de T quand on fait varier la position du curseur entre O et M.

2° Étant donnée une valeur quelconque mais fixe de x , on peut mettre l'expression de T sous la forme

$$T = 1 + A\left(\frac{\mu}{M}\right) + B\left(\frac{\mu}{M}\right)^2 + C\left(\frac{\mu}{M}\right)^3 + \dots$$

(formule de Maclaurin où T est considéré comme fonction du rapport $\frac{\mu}{M}$). Calculer les expressions des deux premiers coefficients A et B. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 y = 0,$$

où p et q sont des fonctions données de x . On suppose que cette équation admet simultanément comme intégrales particulières une certaine fonction inconnue z et sa $n^{\text{ième}}$ puissance z^n ($n > 0$).

1° Déterminer cette intégrale inconnue z (z n'est déterminée qu'à un facteur constant près).

2° Quelle relation doit exister entre les fonctions p et q pour que la condition de l'énoncé soit satisfaite et, supposant p seule donnée, en conclure l'expression de q .

3° On fait le changement de variable indépendante

défini par

$$t = \int_0^x e^{-p} dx,$$

t devenant la nouvelle variable indépendante, que devient l'équation différentielle proposée (1), *y* étant regardée comme fonction de *t* par l'intermédiaire de *x*, *p* et *q* restant liés par la relation précédemment trouvée, mais devenant à leur tour des fonctions de *t* par l'intermédiaire de *x*.

II. Intégration des équations différentielles du premier ordre linéaires par rapport à *y* et $\frac{dy}{dx}$; montrer qu'on peut ramener à ces équations celles de la forme

$$\frac{dy}{dx} + uy + v y^m = 0,$$

u et *v* désignant des fonctions données de *x*.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer à 0,0001 près l'intégrale définie

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit OA un axe faisant avec Ox l'angle variable θ et portant un vecteur OP dont l'équivalent algébrique par rapport à OA est donné par

$$OP = p = f(\theta),$$

f(θ) étant une fonction donnée.

Par P on mène une perpendiculaire PB à OA; la droite PB, quand θ varie, enveloppe une certaine courbe C qu'elle touche en Q.

1° Calculer, en fonction de θ , les coordonnées du point Q ainsi que l'équivalent algébrique du vecteur PQ par rapport à l'axe PB faisant avec Ox l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$.

2° Calculer le rayon de courbure R en Q de l'enveloppe C en fonction de l'angle θ .

3° Quelles doivent être les formes de la fonction $f(\theta)$ pour que l'on ait : 1° $R = \text{const.}$; 2° $R = a \cos \theta$?

Question de cours. — II. Établir la formule du changement de variable dans le calcul d'une intégrale définie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer

$$\int_0^1 \frac{-6x}{(1+x^2)^4} I(x) dx.$$

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Démontrer que si la série entière

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

est convergente pour une valeur $x = x_0$, la série dérivée

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

est convergente pour toute valeur de x telle que $|x| < |x_0|$.

II. Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + p y' + q y = 0,$$

où p et q sont des fonctions de x . On suppose que cette équation admet une intégrale particulière y telle que sa dérivée y' soit aussi une intégrale de la même équation : 1° Déterminer cette intégrale; 2° Trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions p et q ; 3° Application à l'équation

$$(2) \quad y'' + \frac{4x}{(x-x^2)(1+x^2)} y' - \frac{1+3x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2} y = 0;$$

4° Montrer que si la dérivée de toute intégrale de l'équation (1) est aussi une intégrale de la même équation, p et q sont des constantes.

N. B. — On ne cherchera pas à vérifier que les coefficients p et q de l'équation (2) satisfont à la condition générale précédemment trouvée. On calculera simplement l'intégrale y (supposée exister) dont la dérivée est aussi une intégrale et l'on vérifiera directement que y et y' sont bien des intégrales de l'équation (2).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit l'ellipse E dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit

$$r = \frac{16}{5 - 3 \cos \theta}.$$

On mène par l'origine F deux rayons vecteurs FP, FQ faisant respectivement avec l'axe Fx les angles α et β .
1° Calculer l'aire comprise entre l'ellipse et ces deux rayons vecteurs; 2° l'angle α étant seul donné et choisissant β de manière que

$$\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4},$$

exprimer cette aire en fonction de α . Quelle valeur faut-il donner à α pour que l'aire considérée soit égale au quart de celle de l'ellipse? (Novembre 1913.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(1) \quad xy' - y = k(y' + x),$$

où k désigne une constante donnée.

2° Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, M un point variable d'une courbe intégrale (C) de l'équation (1), T le point de rencontre avec Oy de la tangente en M à (C), N le point de rencontre avec Ox de la normale en M à (C), montrer que le triangle OTN reste semblable à un triangle fixe.

3° Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes intégrales (C) de l'équation (1). Expliquer le résultat obtenu.

4° Former en coordonnées polaires l'équation différentielle des courbes (C). Construire l'une de ces courbes.

II. 1° Déterminer la constante λ de façon que l'expression

$$\frac{x + \lambda y}{(x - y)^3} dx - \frac{\lambda x + y}{(x - y)^3} dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$. Calculer toutes les fonctions $U(x, y)$, et déterminer parmi elles la fonction $U_1(x, y)$ qui prend la valeur -1 lorsqu'on donne simultanément à x et y les valeurs respectives

$$x = 1, \quad y = 0.$$

2° On considère la surface

$$z = U_1(x, y)$$

rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . Étudier les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Déterminer les génératrices rectilignes de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy , on considère :

1° L'ellipse ayant pour axes de symétrie Ox, Oy , et pour sommets deux points A, B , respectivement situés sur Ox, Oy , et tels que

$$OA = 10 \text{ mètres}, \quad OB = 5 \text{ mètres}.$$

2° L'hyperbole ayant pour axes de symétrie Ox, Oy ; pour foyer le point A , et pour sommet le milieu A' du segment OA .

I. Calculer, à un décimètre carré près, l'aire qui se trouve à la fois à l'intérieur de l'ellipse et entre les deux branches de l'hyperbole.

II Calculer, à un décimètre cube près, le volume engendré par cette aire tournant autour de Ox .

III. En désignant par P et P' les deux points d'intersection de l'ellipse avec la branche d'hyperbole qui passe par A' , calculer l'abscisse du centre de gravité de l'aire, supposée homogène, que limitent l'arc d'ellipse PAP' et l'arc d'hyperbole $PA'P'$. (Novembre 1913.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe définie par les équations paramétriques

$$(1) \quad x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t.$$

2° Soient M un quelconque de ses points, C le centre de courbure correspondant, N et T les points où la normale et la tangente rencontrent respectivement Ox. Démontrer qu'on a

$$(2) \quad \overline{MT}^2 = \overline{MN} \overline{MC}.$$

3° Soit M' un autre point de la courbe situé du même côté que M par rapport à Oy. Calculer, en fonction des ordonnées de M et de M', la longueur de l'arc MM', ainsi que son moment d'inertie et son rayon de giration par rapport à Ox, en le supposant homogène et de densité linéaire égale à 1.

4° On suppose que l'axe Oy est placé verticalement, le sens positif étant dirigé vers le bas. Un point matériel pesant, assujéti à glisser sans frottement le long de la courbe, est abandonné sans vitesse initiale à partir du point situé sur Oy. Calculer le temps qu'il met pour s'abaisser d'une longueur égale à 1 au-dessous de son niveau primitif. L'unité de longueur est le mètre et l'on prend $g = 9^m,81$.

N. B. — On rappelle les formules

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = (1+x) \cos 2x + e^x.$$

(Novembre 1913.)

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Soient trois axes rectangulaires Oxyz et une sphère de centre O et de rayon a; on considère sur cette sphère une courbe C telle que la portion de chaque tangente comprise entre le point de contact M et le point T où cette droite coupe le plan Oxy soit constamment égale au rayon a.

1° Soient ρ et ω les coordonnées polaires d'un point M de la courbe C', projection de C sur Oxy; trouver la relation différentielle qui lie ρ et ω .

2° Exprimer ρ , puis ω , en fonction de l'angle V que fait la tangente en M' avec le rayon vecteur. (On rappelle la formule $\text{tang } V = \frac{\rho \omega'}{\rho}$.)

3° Indiquer la forme de C' .

4° Calculer, à l'aide de V , l'aire du secteur limité par un arc donné AB de C' et par les rayons OA et OB .

5° On développe sur un plan le cylindre dont C' est la section droite. Quelle est la transformée de C ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0.$$

1° Représenter, par une série entière en x , l'intégrale $\varphi(x)$ qui prend la valeur 1 pour $x = 0$, sa dérivée seconde s'annulant pour $x = 0$. Démontrer que cette série converge quel que soit x . Calculer la somme.

2° Dédire de $\varphi(x)$ la solution générale de l'équation différentielle donnée. (Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — On considère, dans un système d'axes rectangulaires xOy , les courbes représentées par l'équation

$$(1) \quad (t^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2t^3x - 2y = 0,$$

où t est un paramètre arbitraire. Que représente cette équation?

Construire le lieu (C) du centre de la courbe (1).

Étudier l'enveloppe (E) de la courbe (1). On formera l'équation de (E) en coordonnées cartésiennes, en coordonnées polaires; on exprimera les coordonnées d'un point de (E) en fonction de t . On indiquera comment (E) peut se déduire géométriquement de (C) . Dire si (E) a des branches infinies. [On ne demande pas la construction complète de (E) .]

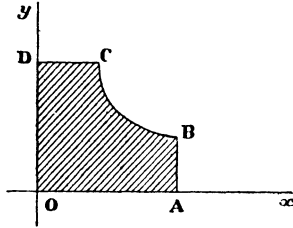
Deuxième question. — Exposer brièvement la résolution et la discussion d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues dans le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est nul.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'aire OABCDO définie comme il suit :

$$OA = OD = 2,$$

$$AB = DC = \frac{1}{2};$$

AB est parallèle à Oy, DC à Ox; BC est un arc d'hyper-



bole équilatère dont les asymptotes sont Ox et Oy. Déterminer :

- 1° L'aire OABCDO;
- 2° La position du centre de gravité de cette aire supposée homogène;
- 3° Le volume du solide engendré par l'aire OABCDO en tournant autour de Oy;
- 4° La position du centre de gravité de ce volume supposé homogène.

On calculera ces divers éléments à 0,01 près. Pour faciliter le calcul on a :

$$\text{logarithme népérien de } e = 0,6931.$$

(Novembre 1912.)