

L. KOLLROS

Sur un problème de minimum

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 461-462

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__461_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C1f]

SUR UN PROBLÈME DE MINIMUM;

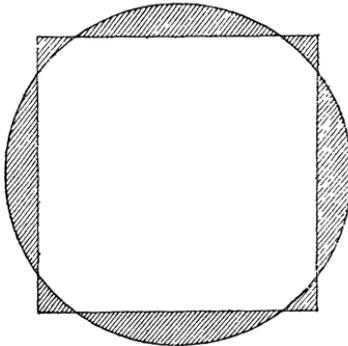
PAR M. L. KOLLROS.

Une question posée par un ingénieur m'a conduit au problème suivant :

Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre ; trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures.

On trouve un résultat inattendu au premier abord ; ce minimum est différent suivant que le cercle ou le carré varie. Il suffit évidemment de considérer la deuxième figure, qui est le huitième de la précédente.

Fig. 1.

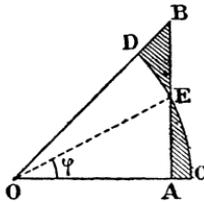


Si $OA = AB$ est fixe et si l'on donne un accroissement au rayon du cercle, on voit que l'accroissement de la surface $ACEDB$ est nul, aux infiniment petits du second ordre près, lorsque E est le milieu de

l'arc CD. On enlève alors à l'un des triangles ACE ou BDE ce qu'on ajoute à l'autre. Il y a donc *minimum* lorsque le carré fixe divise la circonférence en huit parties égales.

Si, au contraire, le cercle est fixe, un accroissement donné à OA montre que le minimum a lieu quand E est le milieu de AB. En d'autres termes, il y a *mini-*

Fig. 2.



um, cette fois, lorsque le cercle fixe divise le pourtour du carré en huit parties égales.

Il est très simple de vérifier ces résultats par l'analyse. Si l'on prend, la première fois, le demi-côté du carré fixe comme unité et l'angle $EOC = \varphi$ comme variable indépendante, on a à étudier la variation de la fonction

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} - \tan \varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{8} \right) (1 + \tan^2 \varphi),$$

qui présente bien un minimum pour $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Dans le second problème, si l'on prend le rayon du cercle fixe comme unité, c'est la fonction

$$F(\varphi) = \varphi - \frac{\pi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2 \varphi}{2}$$

qui exprime l'aire variable; elle a un minimum pour $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.
