

V. THÉBAULT

Sur les polygones podaires d'un polygone donné

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14 (1914), p. 433-446

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K9a]

SUR LES POLYGOES PODAIRES D'UN POLYGOE DONNÉ;

PAR M. V. THÉBAULT,

Professeur à Ernée (Mayenne).

1. Considérons un polygone plan quelconque P de n côtés, un point M de son plan, et construisons de ce point les droites faisant avec les côtés du polygone, *dans le même sens de rotation*, un même angle aigu φ . Nous appellerons *polygone isopodaire de M* celui qui est obtenu en joignant les points où les précédentes droites rencontrent respectivement les côtés du polygone P. Dans le cas où $\varphi = 90^\circ$, le polygone ainsi obtenu est dit *orthopodaire* ou *podaire de M*.

LEMME. — *On considère un polygone quelconque P et un point M de son plan. On peut construire une infinité de polygones isopodaires de M par rapport à P, l'angle φ étant variable. Tous ces polygones isopodaires sont semblables entre eux.*

Nous démontrerons le cas où le polygone P est un triangle, les polygones isopodaires d'un point M, par rapport à un polygone quelconque, pouvant toujours être décomposés en un même nombre de triangles semblables, isopodaires de M par rapport aux triangles formés par les trois côtés correspondants de P.

Soient $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ les triangles isopodaires d'un point M du plan d'un triangle ABC, les angles de rotation étant respectivement φ_1 et φ_2 (fig. 1).

2. *Le lieu géométrique des points M du plan d'un triangle ABC tels que leur triangle isopodaire $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ par rapport à ce triangle (l'angle étant φ_1), soit d'aire constante, est une circonférence O concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC.*

Il importe tout d'abord, ici et pour ce qui va suivre, de considérer le cas où M est intérieur au cercle circonscrit à ABC ($\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ est de même sens que ABC), et celui où M est extérieur à ce cercle ($\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ est de sens contraire à ABC).

Posons

$$\text{const.} = \text{aire } \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \text{aire } \triangle ABC \frac{k}{2 \sin^2 \varphi_1},$$

k étant une constante qui peut être positive ou négative suivant que $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ est de même sens ou de sens contraire à ABC.

Le lieu de M, d'après ce qui précède, est celui des points du plan tels que leur *triangle podaire* par rapport à ABC soit d'aire constante :

$$\text{aire } \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \sin^2 \varphi_1 = \text{aire } \triangle ABC \frac{k}{2}.$$

Ce lieu, tel que

$$(1) \quad \overline{AM}^2 \sin 2A + \overline{BM}^2 \sin 2B + \overline{CM}^2 \sin 2C = 4S(1-k)$$

(S étant l'aire ABC), se compose comme l'on sait de deux circonférences concentriques au cercle circonscrit O à ABC. Les rayons de ces cercles sont donnés par la formule

$$(2) \quad \left. \begin{matrix} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \end{matrix} \right\} = R^2(1 \pm 2k),$$

R étant le rayon du cercle O.

Cette relation montre que pour une valeur donnée

de ρ_1 , par exemple,

$$\text{const.} = R^2 - \rho_1^2 = 2kR^2,$$

et pour un angle φ_1 donné, les triangles isopodaires de chacun des points d'une circonférence de rayon donné ρ_1 concentrique au cercle circonscrit à un triangle ABC, par rapport à ce triangle, ont une aire constante; ou encore si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les projections isogonales, dans un même sens de rotation, l'angle étant φ_1 , d'un point M du plan d'un triangle ABC sur les côtés de ce triangle, on a

$$(3) \quad \frac{\text{aire } \alpha_1 \beta_1 \gamma_1}{\text{aire ABC}} = \frac{\mu}{4 R^2 \sin^2 \varphi_1},$$

μ étant la valeur algébrique de la puissance de M par rapport au cercle circonscrit à ABC.

La relation (2) a été établie directement, notamment pour $\varphi_1 = 90^\circ$, donnant lieu à une suite de démonstrations élémentaires intéressantes (1).

La formule (1) donne

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 2R^2,$$

quel que soit k , et la somme des carrés des rayons des circonférences lieux des points M, du plan d'un triangle, tels que leurs triangles isopodaires soient d'aire constante, égale le carré du rayon du cercle orthoptique relatif au cercle circonscrit au triangle.

Si $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = R\sqrt{2}$ et $\frac{k}{2 \sin^2 \varphi_1}$ est maximum; ce rapport égale $\frac{1}{4}$ pour $\varphi_1 = 90^\circ$.

(1) *Proceedings of the Edinburgh mathematical Society*. 1893-1894. p. 85; *Journal de Vuibert*, 113-1914, p. 23, 61, 77.

Si $k = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = R$ et ce cas donne la propriété classique de la droite de Simson, ainsi que sa généralisation pour un angle φ_1 , quelconque. Nous nous sommes servi de cette généralisation pour en obtenir d'autres relatives aux propriétés de la droite de Simson, notamment une généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne sur l'orthopôle (*Nouvelles Annales*, 1914 : *Généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne*).

3. *Le lieu géométrique des points M du plan d'un quadrilatère ABCD tels que leur quadrilatère isopodaire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, par rapport à ce quadrilatère (l'angle étant φ_1), soit d'aire constante, est en général une circonférence. Il peut être une droite parallèle à une direction fixe lorsque l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ varie.*

Remarquons ici que l'expression algébrique de l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ peut être nulle sans que les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ soient en ligne droite. Le quadrilatère $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ est alors *croisé* et ses deux parties, qui sont de sens inverse, ont des aires équivalentes en valeur absolue.

Comme précédemment, la question se ramène à trouver le lieu des points M du plan de ABCD tels que leur quadrilatère *orthopodaire* $\alpha\beta\gamma\delta$ soit d'aire constante, aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \propto \sin^2 \varphi_1$.

La relation (1) devient

$$(4) \quad \overline{AM}^2 \sin 2A + \overline{BM}^2 \sin 2B \\ + \overline{CM}^2 \sin 2C + \overline{DM}^2 \sin 2D = \text{const.}$$

et le lieu de M est un cercle en général; une droite lorsque

$$(5) \quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 2D = 0,$$

A, B, C, D étant les angles que font les droites DA, AB, BC, CD, deux à deux, ces droites étant prises dans le même ordre que les sommets des quadrilatères $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ et les angles étant comptés dans le même sens.

La condition (5) est réalisée lorsque le quadrilatère ABCD est un *trapèze* ou un *quadrilatère inscriptible*.

Remarquons en effet que

$$D = 2k\pi - (A + B + C),$$

d'où

$$\sin \circ D = -\sin 2(A + B + C)$$

et

$$\begin{aligned} \sin \circ A - \sin \circ B + \sin \circ C + \sin \circ D \\ = \sin \circ A + \sin \circ B + \sin \circ C - \sin \circ (A + B + C) \\ = 4 \sin(A - B) \sin(B + C) \sin(A + C); \end{aligned}$$

or ce produit est nul si deux angles soit adjacents, soit opposés du quadrilatère sont égaux.

Les centres et rayons du lieu, dans le cas général, s'obtiennent en envisageant la question comme il suit.

Quatre droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, situées dans un même plan, se coupent deux à deux, Δ_1 et Δ_4 en A, Δ_1 et Δ_2 en B, Δ_2 et Δ_3 en C, Δ_3 et Δ_4 en D, Δ_1 et Δ_3 en E, Δ_2 et Δ_4 en F.

Ces droites déterminent ainsi un *quadrilatère convexe* ABCD, un *quadrilatère concave* AECF et un *quadrilatère croisé* BEDF. Soient O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par $\Delta_1\Delta_2\Delta_4$, $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, $\Delta_1\Delta_3\Delta_4$, $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, et $R_1, R_2, R_3, R_4, S_1, S_2, S_3, S_4$ les rayons respectifs de ces cercles et les surfaces de ces triangles.

Considérons d'abord le quadrilatère convexe ABCD,

un point M de son plan et soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère orthopodaire de ce point par rapport au quadrilatère, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant d'ailleurs dans l'ordre des côtés. On a

$$\begin{aligned} & \text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma\delta \\ &= \text{valeur algébrique } \alpha\beta\delta + \text{valeur algébrique } \beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

En appliquant la relation (3) (au cas où $\varphi_1 = 90^\circ$), aux triangles $\alpha\beta\delta$ et $\beta\gamma\delta$, on obtient pour équation du lieu

$$\begin{aligned} (6) \quad & S_1 R_1^2 \times \overline{MO_1}^2 - S_4 R_1^2 \times \overline{MO_4}^2 \\ &= R_1^2 R_4^2 (\text{surf. } ABCD - 4 \text{ surf. } \alpha\beta\gamma\delta) \\ &= R_1^2 R_4^2 \times S(1 - k), \end{aligned}$$

en posant

$$\text{surf. } ABCD = S, \quad \text{et} \quad \text{surf. } \alpha\beta\gamma\delta = \text{surf. } ABCD \frac{k}{4},$$

k désignant une constante positive ou négative, suivant que $\alpha\beta\gamma\delta$ et $ABCD$ ont même sens de rotation ou des sens opposés.

On a de même, en remarquant que

$$\begin{aligned} & \text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma\delta \\ &= \text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma + \text{valeur algébrique } \gamma\delta\alpha, \\ & S_3 R_2^2 \times \overline{MO_3}^2 - S_2 R_3^2 \times \overline{MO_2}^2 = R_2^2 R_3^2 \times S(1 - k). \end{aligned}$$

Le lieu de M est visiblement une circonférence dont le centre, situé à la fois sur $O_1 O_4$ et $O_2 O_3$, est à leur intersection Ω_4 . Son rayon est, par exemple,

$$\rho_1^2 = \frac{R_1^2 R_4^2 [(S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2) S(1 - k) + S_1 S_4 \overline{O_1 O_4}^2]}{(S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2)^2}.$$

Le lieu complet se compose évidemment de deux circonférences concentriques suivant que k est positif ou négatif.

On obtient des résultats analogues en remplaçant le quadrilatère convexe par les quadrilatères concave et croisé AECF et BEDF.

Dans le premier cas le lieu comprend deux circonférences concentriques de centre Ω_2 , intersection de O_1O_2 et O_3O_4 .

Dans le second cas le lieu est formé de deux circonférences concentriques de centre Ω_3 , point commun à O_1O_3 et O_2O_4 .

Ainsi le quadrilatère convexe $O_1O_2O_3O_4$ nous paraît remarquable :

Les points de rencontre de ses côtés opposés et de ses diagonales O_1O_2 et O_3O_4 sont les centres des circonférences lieux des points M, du plan des trois quadrilatères formés par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, tels que leurs quadrilatères isopodaires par rapport à ces trois quadrilatères, soient d'aire constante.

Ou bien encore :

Ces trois points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont les centres des distances proportionnelles des sommets des quadrilatères correspondants affectés chacun des coefficients $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C, \sin^2 D, \sin^2 E, \sin^2 F$, A, B, C, D, E, F étant les angles, comptés dans le même sens et formés par les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ deux à deux.

Reprenons le quadrilatère convexe ABCD. Nous avons observé au début que l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, et par suite l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$, pouvait être nulle, bien que $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ne soient pas en ligne droite.

La relation (6) devient ici

$$S_1 R_1^2 \times \overline{MO_1}^2 - S_4 R_1^2 \times \overline{MO_4}^2 = R_1^2 R_4^2 \times S.$$

D'ailleurs trois points de ce cercle apparaissent immédiatement : K commun aux cercles O_1, O_2, O_3, O_4 , foyer de la parabole tangente à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, et les sommets E, F pour qui les triangles isopodaires $\alpha_1\beta_1\delta_1$ et $\beta_1\gamma_1\delta_1$ sont équivalents en valeur absolue, mais ont des sens de rotation différents.

Les points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ donnent évidemment la valeur maximum de l'aire du quadrilatère isopodaire, le sens de rotation étant d'ailleurs le même que celui du quadrilatère.

Remarque. — Le diamètre EO_3 du cercle AED, coupe AD en ε_3 , et

$$\widehat{EO_3A} = 2\widehat{CDA}; \quad \widehat{EO_3D} = 2\widehat{BAD};$$

d'où

$$\frac{\varepsilon_3 D}{\varepsilon_3 A} = - \frac{\sin 2D}{\sin 2A}.$$

La résultante des vecteurs parallèles appliqués en A et D et proportionnels à $\sin 2A$ et $\sin 2D$, est appliquée en ε_3 . De même celle des vecteurs $\sin 2C$ et $\sin 2B$ est appliquée au point de rencontre ε_2 de EO_2 avec BC. Donc la droite $\varepsilon_3\varepsilon_2$ passe en Ω_1 . Les cercles FBA et FCD donnent aussi leurs points ε_1 et ε_4 tels que $\varepsilon_1\varepsilon_4$ passe encore en Ω_1 .

Cette détermination de Ω_1 , qui est une conséquence du raisonnement trigonométrique du début de ce paragraphe, donne, avec les résultats obtenus ensuite géométriquement, cette propriété :

Dans un quadrilatère quelconque les droites précédentes $\varepsilon_1\varepsilon_4, \varepsilon_2\varepsilon_3, O_1O_4$ et O_2O_3 , sont concourantes.

La relation (6) nous montre aussi que le lieu de M

est une droite lorsque

$$S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2 = 0,$$

condition remplie quand les triangles CDF et AFB sont semblables, c'est-à-dire lorsque le quadrilatère est un *trapèze* ou est *inscriptible*.

L'équation du lieu est alors

$$(7) \quad \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_4}^2 = \frac{R_1^2 \times S(1-k)}{S_1}.$$

Ce lieu se compose de deux droites perpendiculaires à $O_1 O_4$; ces droites sont confondues lorsque $k=0$, c'est-à-dire quand l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$ est nulle.

Cas du trapèze. — AB et CD sont parallèles. Lorsque $k=0$, F est un point du lieu qui est la perpendiculaire T à $O_1 O_4$ en F, c'est-à-dire la *tangente commune aux cercles O_1 et O_4* , qui se touchent en F.

Cas du quadrilatère inscriptible. — Dans ce cas $O_1 O_4$ et $O_2 O_3$ sont parallèles; Ω_1 est à l'infini, mais Ω_2 et Ω_3 restent réels.

Les cercles Ω_1 deviennent, pour $k \neq 0$, deux droites parfaitement déterminées en direction et position par l'équation (7). Quand $k=0$, les points E et F appartiennent au lieu qui est la droite EF de concours des côtés opposés. Nous répondons ainsi à la question 4154 posée par M. E.-N. Barisien dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, janvier 1913, p. 2 :

On sait que le lieu des points pour lesquels l'aire du polygone podaire d'un autre polygone donné a une grandeur donnée, est un cercle dont le centre est fixe, quelle que soit la grandeur donnée. Dans

le cas d'un triangle, le centre fixe est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Quel est ce point fixe, lorsque le polygone est un quadrilatère inscriptible dans un cercle?

Nous déduisons de plus de ces résultats quelques propriétés relatives au quadrilatère inscriptible :

1° *Les lignes des centres des cercles circonscrits O_1, O_2, O_3, O_4 aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère inscrit pris trois à trois, forment un trapèze $O_1 O_2 O_3 O_4$, dont les côtés $O_1 O_4$ et $O_2 O_3$ sont perpendiculaires à la diagonale EF. Les droites $O_1 O_4$ et $O_2 O_3$ sont parallèles à la droite OP, qui joint le centre du cercle circonscrit O au point de concours P des diagonales AC et BD.*

Le triangle EPF est, en effet, conjugué par rapport au cercle O; O est par suite orthocentre de ce triangle dans lequel OP est une hauteur.

2° *Le foyer φ de la parabole inscrite à un quadrilatère inscrit est situé sur la diagonale EF; c'est le point où OP rencontre cette diagonale.*

3° *On donne un cercle O et un point P intérieur à ce cercle. Il existe une infinité de quadrilatères ABCD inscrits à O et ayant P pour point de concours des diagonales. Les paraboles inscrites à ces quadrilatères ont pour foyer un point fixe φ tel que $O\varphi = \frac{R^2}{OP}$, R étant le rayon du cercle. De plus, les points E et F de ces quadrilatères décrivent une droite fixe Δ perpendiculaire à OP en φ .*

Enfin si, par deux points E, F en ligne droite avec le foyer φ d'une parabole, on mène les quatre tangentes

à la courbe, le quadrilatère formé par ces tangentes est inscriptible.

4. L'expression (5) et notre raisonnement géométrique du précédent paragraphe peuvent être étendus de proche en proche à un polygone plan quelconque de n côtés.

On a par exemple

$$(8) \quad \Sigma \overline{AM}^2 \sin 2A = \text{const.}$$

En particulier, si le polygone est régulier, les coefficients dans les expressions (4) et (6) sont égaux et le centre du cercle lieu de M est celui des distances proportionnelles des sommets affectés du coefficient $\sin 2A$; c'est le centre du polygone donné.

Steiner a donné ces résultats dans leur forme générale (*Œuvres*, t. I, p. 159; *Crelle*, t. I, p. 38-52).

5. Les expressions (1), (4) et (8) nous donnent encore quelques formules intéressantes. Prenons-les dans le cas général envisagé, l'angle φ_1 étant quelconque.

Dans le triangle $M\beta_1\gamma_1$ considéré au lemme donné au début de cette Note, on obtient (*voir* la figure)

$$\beta_1\gamma_1 = \frac{AM \sin A}{\sin \varphi_1};$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\overline{\beta_1\gamma_1}^2 \cot A = \frac{\overline{AM}^2 \sin 2A}{\sin^2 \varphi_1};$$

c'est-à-dire, φ_1 étant donné,

$$\overline{\alpha_1\beta_1}^2 \cot C + \overline{\beta_1\gamma_1}^2 \cot A + \overline{\gamma_1\alpha_1}^2 \cot B = \text{const.},$$

et dans le cas général d'un polygone quelconque,

$$\Sigma \overline{\alpha_1 \beta_1}^2 \cot C = \text{const.}$$

Soient ω_a le centre du cercle circonscrit au triangle $A \gamma_1 \beta_1$ et K_a le milieu de $\gamma_1 \beta_1$. Un calcul tout analogue au précédent donne

$$\overline{\omega_a K_a}^2 \tan A = \overline{\beta_1 \gamma_1}^2 \cot A;$$

d'où l'on déduit, dans le triangle,

$$\overline{\omega_a K_a}^2 \tan A + \overline{\omega_b K_b}^2 \tan B + \overline{\omega_c K_c}^2 \tan C = \text{const.}$$

et

$$\Sigma \overline{\omega_a K_a}^2 \tan A = \text{const.},$$

dans le cas d'un polygone quelconque.

En particulier, dans un polygone régulier :

La somme des carrés des côtés du polygone isopodaire d'un point M par rapport à un polygone donné P, est constante quand M décrit une circonférence donnée concentrique au polygone P, l'angle φ_1 étant donné.

La somme des carrés des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés du polygone isopodaire respectivement avec les deux côtés correspondants du polygone P, est constante, M décrivant une circonférence concentrique à P, l'angle φ_1 étant donné.

Enfin, appelant ρ_a le rayon du cercle $A \gamma_1 \beta_1$, les relations (1) et (4) peuvent être mises sous la forme

$$\rho_a^2 \sin 2A + \rho_b^2 \sin 2B - \rho_c^2 \sin 2C = \text{const.}$$

et

$$\Sigma \rho_a^2 \sin 2A = \text{const.};$$

et dans un polygone régulier donné P :

La somme des carrés des rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés du polygone isopodaire respectivement avec les deux côtés correspondants de P est constante, lorsque M décrit une circonférence concentrique à P, l'angle φ , étant donné.