Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 425-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__425_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2203.

(1913, p. 48)

Soient AB *un diamètre d'un cercle* O *et* M *un point de la circonférence. Il existe deux paraboles* P *et* Q *passant par* A *et* B *et tangentes en* M *au centre. Montrer que les axes de ces deux paraboles concourent au milieu* I *de* OM.

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

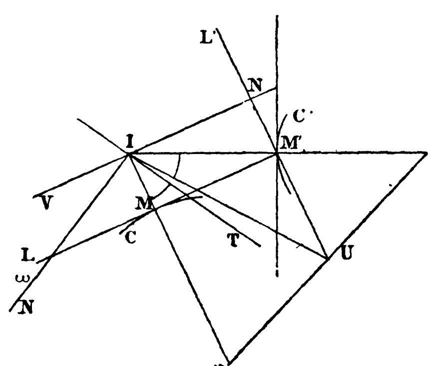
Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle-ci, bien connue d'ailleurs : « Le centre de gravité du quadrilatère ayant pour sommets les points d'intersection d'une parabole et d'un cercle est sur l'axe de la parabole. »

Autres solutions de MM. R. GOORMAGHTIGH, L. KLUG, T. ONO et PARROD.

2205.

(1913, p. 192.)

On donne, dans un même plan, deux courbes C *et* C'. *La*



tangente en un point M *de* C *rencontre* C' *au point* M'; *les normales en* M *à* C *et en* M' *à* C' *se coupent au point* I

Cela posé, construire la tangente et le centre de courbure en I *à la trajectoire de ce point.*

F. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par M. C. CLAPIER.

On peut envisager le point I comme le centre de rotation instantanée dans le mouvement d'un angle droit dont le sommet décrit la courbe C′, tandis que l'un de ses côtés L glisse sur la courbe C.

Nous connaissons deux couples de profils conjugués : (C, $\overline{MM'}$), (C′, point M′), et, pour construire la tangente IT commune aux deux roulettes, nous appliquerons le théorème d'Euler généralisé par Bobillier : Soient (γ, γ_1 à l'infini; γ', γ'_1, au point M′) les centres de courbure respectifs, les droites $\overline{\gamma\gamma'}$, $\overline{\gamma_1\gamma'_1}$ (qui n'est autre que le second côté de l'angle droit) vont se couper en un point u tel que l'angle $\widehat{\mathrm{TI}u}$ admet les mêmes bissectrices que $\widehat{\gamma \mathrm{I} \gamma'}$.

Pour obtenir le centre de courbure ω de la courbe lieu du point I, nous déterminerons le centre de courbure R de l'enveloppe du deuxième côté L′ de l'angle droit mobile; le point de contact N s'obtient en menant du centre I une normale à ce côté et la détermination de R résulte de l'application du théorème précédent qui nous a donné la tangente IT.

Cela posé, nous envisagerons le point I, non plus comme centre instantané de rotation, mais comme le sommet d'un angle droit MIN dont les côtés enveloppent les deux courbes développées P et Δ; relativement à ce nouveau mouvement, nous connaissons deux couples de profils conjugués et nous pourrons construire le point K′ qui permet de trouver tous les éléments des courbures (*cf.* KŒNIGS, *Cours de Cinématique*). Nous en déduirons le centre de courbure de la trajectoire du point I.

2207.

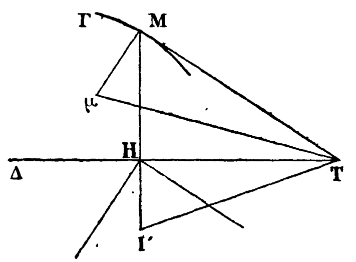
(1913, p. 288.)

On considère l'angle droit mobile $\widehat{\mathrm{H}}$ *formé par les parallèles à la tangente et à la normale en* M *à la courbe* Γ, *menées par le pied* H *de la perpendiculaire abaissée de* M *sur une droite fixe* Δ. *Si* T *est le point où la tangente en* M *à la courbe* Γ *coupe la droite* Δ, μ *le centre de courbure de* Γ *répondant au point* M, *démontrer que le centre instantané* I *de l'angle droit* $\widehat{\mathrm{H}}$ *est à la rencontre de* MH *et du cercle circonscrit au triangle* $\mathrm{M}\mu\mathrm{T}$.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION
Par M. THIÉ.

Plus généralement, soit F une figure mobile de grandeur invariable dont un point M a pour trajectoire une courbe Γ. Soit F′ une seconde figure dont la position se déduit à chaque instant de celle de F, au moyen d'une translation de direction constante, telle que le point M′ correspondant à M décrive une courbe Γ'. Soit I le centre instantané de rotation de la figure F.



Le point I appartient à la normale à C en M. Proposons-nous de trouver le centre instantané de rotation I′ de la figure F′.

Ce point I′ appartient à la normale à C′ en M′. Soit T le point d'intersection des tangentes en M et en M′ aux deux courbes C et C′.

Les déplacements infiniment petits simultanés des figures F et F′ se réduisent à deux rotations, d'un même angle $d\varphi$, effectués respectivement autour des points I et I′. On a

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{IM}\, d\varphi,$$
$$d(\mathrm{M'}) = \mathrm{IM'}\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IM'}} = \frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{M'})} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{M'I}}.$$

On en conclut que les deux triangles rectangles MTI, M′TI′

sont semblables (on peut ajouter, *directement* semblables, comme on le reconnaît par un examen plus approfondi que nous omettons pour abréger). Les angles $\widehat{\mathrm{MTI}}$, $\widehat{\mathrm{M'TI'}}$ sont donc égaux et de même signe, ce qui fournit une construction simple du point I'.

Dans le cas visé par l'énoncé, le point I se confond, comme l'on sait, avec le centre de courbure μ en M à la courbe Γ. On a, d'après ce qui précède,

$$\widehat{\mathrm{MT}\mu} = \widehat{\mathrm{HTI'}}, \qquad \text{d'où} \qquad \widehat{\mathrm{I'M}\mu} = \widehat{\mathrm{HTM}} = \widehat{\mathrm{I'T}\mu},$$

ce qui établit la proposition.

Autres solutions par MM. Balitrand, Bouvaist, Clapier, Guttenberg, Lemaire, Ono, Parrod, Sicard.

2208.

(1913, p. 288.)

Si M *est un point quelconque d'une conique dont* A *est un sommet,* α *étant le centre de courbure répondant à ce sommet, la tangente en* M *à la conique coupe la tangente en* A *sur la perpendiculaire menée de* α *à la corde* AM.

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. G. F.

L'hyperbole d'Apollonius relative au point α se compose de l'axe AA' et de la tangente en A. Si d'un point de cette tangente, on mène la perpendiculaire à la polaire AM de ce point, cette perpendiculaire passe en α, d'après le théorème bien connu qui fait de l'hyperbole d'Apollonius un lieu géométrique.

Autres solutions de MM. Bouvaist, Goormaghtigh, Guttenberg, Lemaire, Ono et Parrod.

2209.

(1913, p. 336.)

Démontrer géométriquement que :

1° *Si sur la tangente en* M *à un cercle passant par* O, *on considère le segment* MP, *qui est vu de* O *sous un angle droit, le lieu de* P, *lorsque* M *décrit le cercle, est une cissoïde de Diocles;*

2° *La normale en* P *à la cissoïde coupe la normale en* M *au cercle sur la perpendiculaire élevée à* OP *en son milieu.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient ω le centre du cercle considéré, O' le point de ce cercle diamétralement opposé au point O, la droite O'M rencontre la tangente en O en P', le quadrilatère OMPP' est un rectangle; la droite PP' enveloppe donc une parabole π, ayant pour foyer le point O' et OP' pour tangente au sommet; le lieu de P est donc la cissoïde droite, podaire de la parabole π par rapport à son sommet.

Les droites O'O, ωM étant également inclinées sur PP', le point de contact de cette droite avec son enveloppe sera le point T, intersection de cette droite avec la parallèle à ωM, menée par O'; la droite ωM, et la perpendiculaire au milieu de OP se couperont au milieu μ de OT, et l'on sait par la construction classique de la tangente à une podaire que Pμ est la normale à la cissoïde en P.

Remarque. — La proposition précédente est un cas particulier de la suivante :

Si un triangle OMP *se déplace de telle sorte que le sommet* O *reste fixe, que le point* M *décrive un cercle passant par* O, *que le côté* MP *soit tangent à ce cercle en* M, *et que l'angle* $\widehat{MOP}$ *reste constant, le sommet* P *décrit une cissoïde de Diocles, et la normale en* P *à cette courbe passe par le point d'intersection de la normale en* M *au cercle donné et de la perpendiculaire élevée au milieu de* OP.

On démontre immédiatement cette proposition en remarquant que la perpendiculaire en P à la droite OP enveloppe une parabole ayant pour foyer le point D' diamétralement opposé au point O sur le cercle donné.

Autres solutions de MM. BALITRAND, CLAPIER, FOURAGGÉ, GOORMAGHTIGH, GUTTENBERG, LEMAIRE, ONO, PARROD et SICARD.

2211.

(1913, p. 480.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux demi-diamètres conjugués,* F *et* F′ *les foyers d'une ellipse* E. *Les droites* M′F′, MF *se coupent en* P, *et les deux droites* M′F, MF′ *se rencontrent en* Q. *Montrer que, quels que soient les demi-diamètres* OM *et* OM′, *le quadrilatère* PMQM′ *est circonscriptible à un cercle de rayon constant (égal au demi petit axe).*

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Soient $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ les coordonnées de M; $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ sont celles de M′ et le sommet N du parallélogramme MOM′N a pour coordonnées $[a(\cos\theta - \sin\theta),\ b(\cos\theta + \sin\theta)]$, l'équation de MF est alors

$$bx\sin\theta - y(a\cos\theta - c) - bc\sin\theta = 0.$$

On voit que la distance de N à MF est égale à b. Il en est de même pour MF′, M′F, M′F′; donc, etc.

Autre solution de M. BOUVAIST.

2212.

(1913, p. 575.)

Si un rayon mobile OP *d'un cercle de centre* O *coupe ce cercle en* P *et la tangente en un point fixe* A *du cercle en* N, *le point de rencontre* M *des parallèles à* OA *et* AN *menées respectivement par* N *et* P *décrit une conchoïde de Külp* (*N. A.*, 1913, p. 193). *Le point* T *où la tangente en* M *à la conchoïde coupe la tangente fixe* AN *au cercle peut être obtenu comme suit :* U *étant le point où cette tangente fixe est rencontrée par la tangente en* P *au cercle, si l'on porte sur le rayon* OP *le vecteur* OV = PN, *la droite* OT *est parallèle à* UV.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Prenons comme axe des x le rayon OA, comme axe des y le diamètre perpendiculaire. Si l'on désigne par φ l'angle AOP et par a le rayon OA, on a successivement les coordonnées des points ci-après :

$$(\mathrm{M}) \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\varphi; \end{cases}$$

$$(\mathrm{U}) \qquad \begin{cases} x = a. \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \dfrac{a(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases} x = a(1-\cos\varphi), \\ y = a(1-\cos\varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi; \end{cases}$$

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} x = a, \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\varphi - \dfrac{a(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi\cos^2\varphi}; \end{cases}$$

et l'on voit facilement que la droite UV est parallèle à OT.

Autres solutions de MM. BARISIEN et BOUVAIST.

2213.

(1913, p. 576.)

Soient c et C une section droite et une section oblique d'un cylindre de révolution, tangentes entre elles en un point par lequel passe la génératrice G du cylindre. On sait que les droites rencontrant G à un angle droit, qui s'appuient d'autre part sur la conique C, engendrent un cylindroïde (ou conoïde de Plucker). Démontrer que le volume du tronc de cylindre limité aux plans des sections c et C est double du volume du tronc de cylindroïde limité à sa directrice G et au plan de la section C.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Prenons comme plan XOY la section C et soit $y^2 = ax - x^2$ l'équation du cercle c. Soit $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ l'équation du plan C, On obtient les résultats suivants :

Volume du tronc de cylindre :

$$\int_0^b dz \int_0^{a\left(1-\frac{z}{b}\right)} 2\sqrt{ax - x^2}\, dx = \frac{a^2 b \pi}{8};$$

Volume du tronc de cylindroïde :

$$\int_0^b \sqrt{a\left(1 - \frac{z}{b}\right)\frac{az}{b}} \cdot \frac{az}{b}\, dz = \frac{a^2 b \pi}{16}.$$

Donc, etc.

Autre solution de M. BOUVAIST.