NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Construction du centre de courbure de la conchoïde de Kulp

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 354-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__354_1>

[$O^1 2e$]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE LA CONCHOÏDE DE KULP;

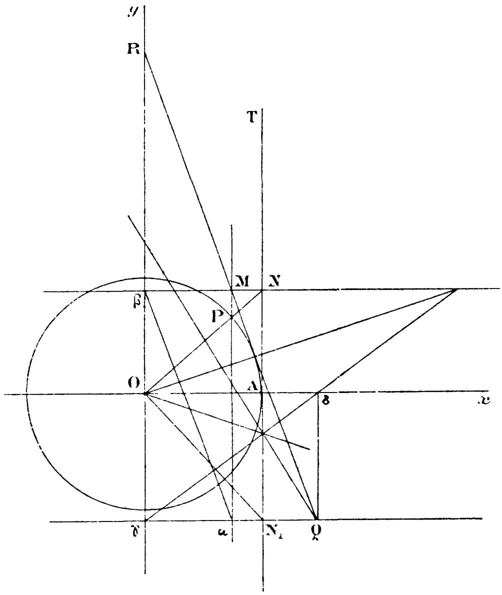
PAR M. F. BALITRAND.

La conchoïde de Kulp est définie de la façon suivante [1] : On donne un cercle C de centre O, de rayon a et la tangente AT à l'extrémité A du diamètre AA'; un rayon variable rencontre C en P et AT en N; les parallèles menées par P et N respectivement

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 1913, p. 193 et 575.

à AT et OA se coupent en un point M, dont le lieu est la conchoïde de Kulp.

Prenons comme axe des x le diamètre OA, comme



axe des y le diamètre perpendiculaire; désignons par x et y les coordonnées de P, par ξ et η celles de M, par X et Y les coordonnées courantes.

L'équation du cercle C est

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0.$$

On a entre les coordonnées de P et de M les relations

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{ay}{x},$$

$$x = \xi, \qquad y = \frac{\xi\eta}{a}.$$

La tangente en M à la conchoïde a pour équation

$$Y - \frac{ay}{x} = -\frac{a^3}{x^2 y}(X - x).$$

Elle passe par le point de coordonnées $2x$ et $-\frac{ax}{y}\cdot$

Menons la perpendiculaire en O à OP. Elle coupe la droite AT en un point N_1 dont l'ordonnée est égale à $-\frac{ax}{y}\cdot$ Soit $N_1 Q$ la parallèle à Ox menée par ce point. Si l'on projette M en α sur $N_1 Q$ et en β sur Oy, la tangente en M est parallèle à $\alpha\beta$. Autrement dit, si l'on prend sur $N_1 Q$ le point Q tel que $\alpha Q = \beta M$, la droite MQ est la tangente en M. Donc :

Pour avoir la tangente en M *à la conchoïde, il suffit de mener une droite qui, limitée à* Oy *et* $N_1 Q$, *ait son milieu en ce point.*

Les coordonnées de Q sont $2x$ et $-\frac{ax}{y}\cdot$ Lorsque P décrit le cercle C, Q décrit la courbe

$$\frac{4}{X^2} - \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Elle est bien connue; nous allons néanmoins donner explicitement la construction de sa tangente. Son équation est

$$Y + \frac{ax}{y} = -\frac{a^3}{2y^3}(X - 2x).$$

Elle passe par le point d'intersection des deux droites.

$$\frac{X}{2x} - \frac{Yy}{ax} - 1 = 0,$$

$$Xy + 2aY = 0.$$

La première représente la droite qui joint les projections γ et δ de Q sur Ox et Oy; la seconde, la symétrique par rapport à Ox, de celle qui va de l'origine au point de rencontre de MN et de $\gamma\delta$.

La connaissance de cette tangente suffit pour la construction du centre de courbure de la conchoïde.

En effet, prenons une seconde position $Q_1 M_1 R_1$ de la tangente QMR. Les points M et M_1 étant respectivement les milieux des segments QR et $Q_1 R_1$, il en résulte, d'après un théorème classique, que les deux droites QMR, $Q_1 M_1 R_1$ et les trois cordes QQ_1, MM_1, RR_1, sont cinq tangentes d'une parabole.

Soit S le point de rencontre des deux tangentes à la conchoïde. Considérons le cercle circonscrit au triangle MSM_1.

Par rapport à la parabole, il est circonscrit à un triangle circonscrit à la parabole. A la limite, lorsque les deux tangentes coïncident, il est tangent à la parabole en M et son rayon est le quart du rayon de courbure de la parabole.

Par rapport à la conchoïde, il est circonscrit à un triangle formé par deux points de cette courbe et le point de rencontre des tangentes en ces points. A la limite, il est tangent à la conchoïde et son rayon est la moitié du rayon de courbure de cette courbe.

Autrement dit, le rayon de courbure de la conchoïde est la moitié de celui de la parabole. Par suite, il est égal au segment de normale à la courbe compris entre le point M et la directrice de la parabole.

Or cette directrice est facile à construire. Il suffit d'appliquer deux fois le théorème de Steiner :

« *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice* »

aux deux triangles infiniment aplatis formés par la tangente QMR, le point de contact M et les tangentes en Q et R. On obtient ainsi la construction suivante :

Après avoir construit la tangente en Q *à la courbe lieu de ce point, on abaisse de* M *une perpendiculaire sur cette tangente et l'on prend son point de rencontre avec la perpendiculaire en* Q *à* MQ; *on construit de même le point de rencontre de la perpendiculaire en* R *à* MR *avec* MN; *la droite qui joint ces deux points de rencontre détermine sur la normale en* M *à la conchoïde un segment égal au rayon de courbure.*

On peut aussi arriver à la détermination de ce centre de courbure par voie analytique. Considérons la parabole

$$X^2 - \alpha X - \beta Y - \gamma = 0.$$

On peut choisir les coefficients α, β, γ de façon qu'elle passe en P et y oscule le cercle C. En effectuant les calculs, on trouve

$$a^2 X^2 - 2x(a^2 + y^2) X - 2y^3 Y + a^2(a^2 + y^2) = 0.$$

Si on lui fait subir la transformation qui fait correspondre la conchoïde de Kulp au cercle C, on trouve comme transformée une courbe, osculatrice en M à la conchoïde, et dont l'équation est

$$a^3 X^2 - 2y^3 XY - 2ax(a^2 + y^2) X + a^3(a^2 + y^2) = 0.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes sont en évidence. Elles ont pour équations

$$X = 0, \qquad a^3 X - 2y^3 Y - 2ax(a^2 + y^2) = 0.$$

Cette dernière représente une droite menée par Q, symétrique, par rapport à Ox, de la tangente en Q à la courbe lieu de ce point.

On connaît donc les deux asymptotes de l'hyperbole.

Dès lors, la construction de son cercle osculateur en M est un problème facile et connu. Il suffit, par exemple, de déterminer ses axes; ce qui est immédiat, pour retomber sur un problème tout à fait classique.