

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 334-335

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__334_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2202.

(1913, p. 96)

Soient A, B, C, D quatre sommets d'un parallélépipède, tels que deux quelconques d'entre eux soient les sommets opposés d'une même face du polyèdre. Soient G_a un cône du second ordre inscrit dans le trièdre formé par les trois faces qui se coupent en A; G_b , G_c et G_d les cônes parallèles à G_a ayant leurs sommets respectifs en B, C, D.

Démontrer que les quatre cônes passent par un même point.

THIÉ.

SOLUTION.

Par M. R. B.

Prenons comme tétraèdre de référence ABCD, et soit

$$(1) \quad x + y + z + t = 0$$

l'équation du plan de l'infini.

Les faces du parallélépipède qui se coupent en A sont les plans menés par AB, AC et AD parallèlement aux arêtes CD, DB et BC respectivement. Elles ont pour équations

$$z + t = 0, \quad t + y = 0, \quad y + z = 0.$$

L'équation d'un cône G_a inscrit à ce trièdre peut s'écrire

$$(2) \quad \pm \sqrt{a(z+t)} \pm \sqrt{b(t+y)} \pm \sqrt{c(y+z)} = 0.$$

On forme immédiatement l'équation du cône G_b en remplaçant dans l'équation (2) $t+y$ par $-(x+z)$ et $y+z$ par $-(x+t)$, ce qui donne

$$(3) \quad \pm \sqrt{a(z+t)} \pm \sqrt{-b(x+z)} \pm \sqrt{-c(x+t)} = 0.$$

En effet, cette équation est bien celle d'un cône ayant son sommet en B et ayant la même conique à l'infini que le cône G_a , à cause de l'équation (1).

On formera de même les équations des cônes G_c et G_d :

$$(4) \quad \pm \sqrt{-a(x-y)} \pm \sqrt{b(t+y)} \pm \sqrt{-c(x+t)} = 0,$$

$$(5) \quad \pm \sqrt{-a(x+y)} \pm \sqrt{-b(x+z)} \pm \sqrt{c(y+z)} = 0.$$

Dans les équations (2), (3) (4) et (5), les signes radicaux sont arbitraires. On peut les choisir de manière à mettre en évidence le fait que les quatre cônes ont un point commun. On prendra par exemple les formes

$$\begin{aligned} \sqrt{a(z+t)} + \sqrt{b(t+y)} + \sqrt{c(y+z)} &= 0, \\ -\sqrt{a(z+t)} + \sqrt{-b(x+z)} + \sqrt{-c(x+t)} &= 0, \\ \sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{b(t+y)} - \sqrt{-c(x+t)} &= 0, \\ -\sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{-b(x+z)} - \sqrt{c(y+z)} &= 0. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on obtient une identité, ce qui établit la proposition énoncée.

Remarque. — On peut supposer que les quatre cônes G_a , G_b , G_c , G_d sont de révolution. Si M est leur point commun, ils sont tangents à un même cône de révolution, de sommet M et parallèle à chacun d'eux.

Si l'on coupe la figure par un plan P, perpendiculaire aux axes des cônes de révolution G_a , G_b , etc., il est facile de voir qu'on est conduit au théorème suivant :

Soient α , β , γ les trois côtés d'un triangle et α' , β' , γ' les côtés d'un second triangle respectivement parallèles à ceux du premier. Les cercles inscrits dans les quatre triangles $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta'\gamma')$, $(\alpha'\beta\gamma')$, $(\alpha'\beta'\gamma')$ sont tangents à un même cercle.

J'ai démontré autrement ce théorème (dont on précise l'énoncé en introduisant la considération des demi-droites et des cycles), dans un article des *Nouvelles Annales* (4^e série, t. VII, 1907, p. 491). Voir aussi, dans le même recueil, un article de M. M. Fouché (4^e série, t. VIII, 1908, p. 116).

Autre solution de M. T. ONO.