NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Expression simple de l'intégrale $\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}} dx$, pour m quelconque et p entier

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 289-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__289_0>

[C2a]

EXPRESSION SIMPLE DE L'INTÉGRALE $\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}dx$, POUR m QUELCONQUE ET p ENTIER;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note contient les expressions de quelques intégrales de la forme $\int_0 \mathrm{U}\, x^p\, dx$, p étant entier. Le résultat obtenu pour $\mathrm{U} = \frac{1}{(1+x)^{m+1}}$ (m quelconque) est surtout intéressant, parce que l'intégration par parties ne le donnerait pas aisément, au moins d'une manière formelle; et l'on remarquera le cas singulier où m est entier, avec $p \overset{=}{>} m$.

1. On a, d'une part,

$$(1)\qquad (-1)^p \int_0 \frac{x^p}{1+x}dx = \mathrm{L}(1+x) - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots - (-1)^p \frac{x^p}{p}\right);$$

$$(2)\qquad (-1)^p \int_0 \frac{x^{2p}}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tang} x - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots - (-1)^p \frac{x^{2p-1}}{2p-1}\right);$$

$$(1,2)\qquad (-1)^p \times 2 \int_0 \frac{x^{2p+1}}{1+x^2}dx = \mathrm{L}(1+x^2) - \left(\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \ldots - (-1)^p \frac{x^{2p}}{p}\right);$$

une intégration par parties conduirait aux intégrales

$$\int_0 x^{p+1}\,\mathrm{L}(1+x)\,dx,\qquad \int_0 x^{2p-1}\operatorname{arc\,tang} x\,dx,$$
$$\int_0 x^{2p}\operatorname{arc\,tang} x\,dx.$$

On a, d'autre part,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}\displaystyle\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx \\[2ex] \qquad = 1-\dfrac{1+\mathrm{A}_1x+\ldots+\mathrm{A}_px^p}{(1+x)^m}, \\[2ex] \qquad\text{pour } m \text{ quelconque, en posant} \\[1ex] \mathrm{A}_1=\dfrac{m}{1},\quad \mathrm{A}_2=\dfrac{m(m-1)}{2!},\quad \ldots, \\[2ex] \mathrm{A}_p=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}; \end{array}\right.$$

cette formule est illusoire si, m étant entier, on a $p \geqq m$;

$$(4)\qquad \frac{1}{p!}\int_0 \frac{x^p}{e^x}\,dx = 1-\frac{1+\dfrac{x}{1}+\ldots+\dfrac{x^p}{p!}}{e^x};$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \qquad\qquad p=2q. & \qquad\qquad p=2q-1. \\[1ex] \dfrac{(-1)^q}{p!}\displaystyle\int_0 x^p\cos x\,dx & \\[2ex] = \left\{\begin{array}{l} \sin x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\right) \\[1ex] -\cos x\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right) \end{array}\right. & 1-\left\{\begin{array}{l} \cos x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\right) \\[1ex] +\sin x\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right) \end{array}\right. \\[4ex] \dfrac{(-1)^q}{p!}\displaystyle\int_0 x^p\sin x\,dx & \\[2ex] = 1-\left\{\begin{array}{l} \cos x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\right) \\[1ex] +\sin x\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right) \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} -\sin x\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\ldots\right) \\[1ex] +\cos x\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où le degré de chaque polynome en x est le degré de la puissance de x qui figure sous le signe $\int$, ou ce degré moins 1; on remarquera la forme des expressions placées dans les deux diagonales du Tableau.

Dans celles de ces formules qui contiennent des fonctions circulaires, on peut introduire des fonctions hyperboliques en changeant x en xi; dans la formule (1, 2) on peut remplacer x^2 par $-x^2$.

Les intégrales (1, 3, 4, 5), par exemple, sont *a priori* des infiniment petits d'ordre $p+1$ si x est infiniment petit principal; c'est pour cela que, au second membre de la formule (3), l'expression

$$(1+x)^m - (1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p),$$

après qu'on a développé $(1+x)^m$ par la formule du binome, commence au terme en x^{p+1}.

Pour m entier et $p \gtreqless m$, la formule (3) est illusoire. On a alors, en désignant par M le produit

$$m(m-1)\ldots(m-p)$$

débarrassé du facteur égal à zéro,

$$(3') \quad \frac{M}{p!}\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx$$
$$= L(1+x) - \frac{A'_1 x + A'_2 x^2 + \ldots + A'_p x^p}{(1+x)^m},$$

avec

$$A'_1 = \frac{1}{1}, \quad A'_2 = \frac{[m(m-1)]'}{2!}, \quad \ldots, \quad A'_m = \frac{[m(m-1)\ldots 1]'}{m!},$$

ou

$$A'_1 = \frac{1}{1}, \qquad A'_2 = \frac{m(m-1)}{2!}\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1}\right], \qquad \ldots,$$

et, pour $p > m$,

$$A'_{m+1} = \overline{A}_{m+1}, \qquad A'_{m+2} = \overline{A}_{m+2}, \qquad \ldots,$$

le trait indiquant que l'on supprime le facteur égal à zéro.

2. On vérifierait directement ces diverses formules, à l'exception de la formule (3'), par dérivation; nous obtiendrons chacune d'elles par une intégration, simple quadrature pour les formules (1) et (2), intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à partir de la formule (3).

La formule (1) s'obtient en écrivant

$$y = \mathrm{L}(1+x),$$
$$y' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{p-1} x^{p-1} + (-1)^p \frac{x^p}{1+x}$$

et en intégrant; on a réellement ainsi le développement de $\mathrm{L}(1+x)$, le terme complémentaire étant sous forme d'intégrale (Vallès, *Des formes imaginaires en Algèbre*, Chap. X); au point de vue où nous nous plaçons, on déduit au contraire de là l'expression de cette intégrale.

Pour la formule (2), on considère arc tang x.

La formule (1, 2) n'est pas autre chose que la formule (1) où l'on remplace x par x^2; elle complète la formule (2).

Pour la formule (3), on pose (Vallès, *loc. cit.*)

$$y = (1+x)^m = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_p x^p + \mathrm{R}(x),$$

les A étant des coefficients indéterminés, et l'on se sert de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - my = 0,$$

qui donne pour $\mathrm{R}(x)$ une équation différentielle linéaire. On la simplifie, en disposant des A de manière que le polynome en x obtenu se réduise au terme de degré p; cela revient, en supposant que l'on a écrit

$$(1+x)y' = my,$$

à identifier dans la mesure du possible les polynomes placés dans les deux membres. On obtient $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{m}{1}$, $\dots$, et l'équation différentielle se réduit à

$$(1+x)R'(x) - mR(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{p!}x^p;$$

l'équation sans second membre admettant la solution $R(x) = (1+x)^m$, on pose $R(x) = (1+x)^m \times v$, et l'on arrive à la formule

$$(1+x)^m = 1 + A_1 x + \dots + A_p x^p + \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{p!}(1+x)^m \times \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx.$$

On en déduit la formule (3).

Pour m entier et $p \gtreqless m$, le calcul précédent ne peut rien donner relativement à l'intégrale considérée; nous reviendrons sur ce cas singulier.

La formule (4) est un cas limite de la formule (3); on l'obtient en remplaçant x par $\frac{x}{m}$ et en faisant m infini. Le traitement direct est d'ailleurs plus aisé.

Les formules (5) se déduisent de la formule (4) en remplaçant x par xi, et en mettant $\cos x - i \sin x$ au lieu de e^{-xi}. Au premier membre de la formule (4), on a alors le facteur i^{p+1}, et il faut distinguer deux cas, $p = 2q$, $p = 2q - 1$ [colonnes du Tableau (5)].

3. On obtient directement les formules (5), sous une forme plus condensée, en opérant comme il suit. Considérons les fonctions

$$y = \cos x, \qquad y = \sin x,$$

qui satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = 0.$$

Prenons, par exemple,

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^q \frac{x^p}{p!} + R(x),$$

avec $p = 2q$; nous aurons ainsi les deux formules de la première colonne du Tableau (5). On a pour $R(x)$

$$R''(x) + R(x) = -(-1)^q \frac{x^p}{p!}.$$

L'équation sans second membre admettant les solutions $R(x) = \cos x$, $R(x) = \sin x$, posons, par exemple,

$$R(x) = \cos x\, v,$$

ce qui donne

$$v'' \cos x - 2v' \sin x = -(-1)^q \frac{x^p}{p!}.$$

Ainsi la fonction

$$w = v' = \left(\frac{R(x)}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\cos x}\right)'$$

satisfait à l'équation différentielle linéaire *du premier ordre*

$$w' \cos x - 2w \sin x = -(-1)^q \frac{x^p}{p!},$$

et c'est cette fonction w qui fournira une intégrale. L'équation sans second membre admettant la solution $w = \frac{1}{\cos^2 x}$, posons

$$w = \frac{1}{\cos^2 x} r,$$

ce qui donne

$$r' = -\frac{(-1)^q}{p!} x^p \cos x;$$

d'ailleurs, la fonction v étant paire, on a $v'(0) = 0$, ou $r(0) = 0$. On a par suite, *avec* $p = 2q$,

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \cos x\, dx = -r = -\cos^2 x \times w$$
$$= \cos^2 x \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\cos x}\right)',$$

formule équivalente à la première des formules (5). Si l'on pose $R(x) = \sin x \times v$, on obtient

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \sin x\, dx = 1 + \sin^2 x \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\sin x}\right)',$$

avec $p = 2q$.

Pour $y = \sin x$, on obtient les deux formules de la seconde colonne du Tableau (5) lue en remontant, sous les formes suivantes :

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x_p \sin x\, dx = -\sin^2 x \left(\frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{\sin x}\right)',$$
$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \cos x\, dx = 1 - \cos^2 x \left(\frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{\cos x}\right)',$$

avec $p = 2q - 1$.

4. L'application réitérée du procédé d'intégration par parties donne généralement

$$\int U x^p\, dx = V x^p - p x^{p-1} V_1 + p(p-1) x^{p-2} V_2 - \ldots$$
$$+ (-1)^p p(p-1)\ldots 1\, V_p + C,$$

V étant une primitive de U, V_1 étant une primitive de V, ... Cela permet d'obtenir très aisément les formules (4) et (5). *Mais il n'en est pas de même de la* *formule* (3), les intégrales V, V_1, ..., V_p étant alors

$$\frac{-1}{m(1+x)^m},\quad \frac{1}{m(m-1)(1+x)^{m-1}},\quad \ldots,$$
$$\frac{-(-1)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)(1+x)^{m-p}};$$

on a ainsi

$$[3]\quad \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}dx$$
$$= -\frac{x^p}{m(1+x)^m} - \frac{p\,x^{p-1}}{m(m-1)(1+x)^{m-1}} - \ldots$$
$$- \frac{p(p-1)\ldots 2x}{m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+x)^{m-p+1}}$$
$$- \frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1)\ldots(m-p)(1+x)^{m-p}}$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1)\ldots(m-p)};$$

il faudrait, pour arriver à la formule (3), *connaître* a priori *l'identité*

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}$$
$$\times\left[\frac{x^p}{m} + \frac{p\,x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)} + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots 1(1+x)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)}\right]$$
$$= (1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p).$$

On pourrait dire toutefois que la formule [3] peut prendre la forme (3) avec des valeurs convenables des coefficients A, et déterminer ces coefficients par la condition que le second membre de la formule (3) soit un infiniment petit d'ordre $p+1$ si x est infiniment petit principal.

5. Reprenons la formule (3), pour en déduire la formule (3′) dans le cas où, m étant entier, on a $p \gtreqless m$. Soit pour cela un entier μ, et supposons que m tende vers μ, avec $p \gtreqless \mu$. En appelant $\mathfrak{M}$ le produit $m(m-1)\ldots(m-p)$, débarrassé du facteur $m-\mu$

qui tend vers zéro, la formule (3) peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{M}(m-\mu)}{p!}\int_0 = \frac{(1+x)^m - (1+A_1x+\ldots+A_px^p)}{(1+x)^m};$$

pour $m=\mu$, en désignant par $a_1, \ldots, a_p$ les valeurs correspondantes de $A_1, \ldots, A_p$, on peut écrire, avec $(1+x)^m$ au dénominateur,

$$0 = \frac{(1+x)^\mu - (1+a_1x+\ldots+a_px^p)}{(1+x)^m};$$

on a donc, en retranchant membre à membre et en divisant par $m-\mu$,

$$\frac{\mathfrak{M}}{p!}\int_0 = \frac{\dfrac{(1+x)^m-(1+x)^\mu}{m-\mu}}{(1+x)^m} - \frac{\dfrac{(A_1-a_1)}{m-\mu}x+\ldots}{(1+x)^m}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{1-(1+x)^\varepsilon}{-\varepsilon}$$

et a pour limite $L(1+x)$, quand m tend vers μ.

Le second terme a pour limite

$$-\frac{A'_1x+A'_2x^2+\ldots+A'_px^p}{(1+x)^\mu},$$

les accents indiquent des dérivées par rapport à m, et ces dérivées étant calculées pour $m=\mu$. On a d'ailleurs, pour $p>\mu$,

$$A'_{\mu+1}=\overline{A}_{\mu+1}, \qquad A'_{\mu+2}=\overline{A}_{\mu+2}, \qquad \ldots,$$

le trait indiquant que l'on supprime le facteur égal à zéro; en effet, les fractions $\dfrac{A_{\mu+1}-a_{\mu+1}}{m-\mu}, \ldots$ se réduisent à $\dfrac{A_{\mu+1}}{m-\mu}, \ldots$ On a ainsi la formule (3').

Ce calcul revient d'ailleurs à multiplier les deux membres de la formule (3) par $(1+x)^m$, à prendre les dérivées des deux membres par rapport à m pour faire ensuite $m = \mu$, et à diviser par $(1+x)^\mu$.

6. Cherchons ce que devient la formule [3], résultat d'une intégration par parties, quand m tend vers une valeur entière μ, avec $p \overline{\gtrless} \mu$. Si l'on fait, par exemple, $m = 3+\varepsilon$, $p = 5$, la formule [3] peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon+3)(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\\
&\quad\times\int_0 = -\frac{x^5}{(1+x)^{3+\varepsilon}}(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)-\ldots\\
&\qquad\qquad -\frac{5.4x^3}{(1+x)^{1+\varepsilon}}\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\\
&\qquad\qquad -5.4.3x^2(1+x)^{-\varepsilon}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\\
&\qquad\qquad -5.4.3.2x(1+x)(1+x)^{-\varepsilon}(\varepsilon-2)\\
&\qquad\qquad -5.4.3.2.1(1+x)^2(1+x)^{-\varepsilon}\\
&\qquad\qquad +5.4.3.2.1;
\end{aligned}$$

en retranchant de cette formule celle que l'on obtient pour $\varepsilon = 0$, en divisant par ε, en faisant tendre ε vers zéro et en divisant par $3.2.1.-1.-2$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0 &= -\frac{x^5}{3(1+x)^3}-\ldots-\frac{5.4x^3}{3.2.1(1+x)}\\
&\quad -\frac{5.4.3x^2}{3.2.1}\lim\left[\frac{(1+x)^{-\varepsilon}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)-(-1)(-2)}{(-1)(-2)\varepsilon}\right]\\
&\quad -\frac{5.4.3.2x(1+x)}{3.2.1(-1)}\lim\left[\frac{(1+x)^{-\varepsilon}(\varepsilon-2)-(-2)}{(-2)\varepsilon}\right]\\
&\quad -\frac{5.4.3.2.1(1+x)^2}{3.2.1(-1)(-2)}\lim\left[\frac{(1+x)^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right];
\end{aligned}$$

les limites en question sont des dérivées par rapport à ε, dérivées prises pour $\varepsilon = 0$, savoir

$$\begin{aligned}
&-L(1+x)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right),\\
&-(1+x)-\left(\frac{1}{2}\right),\\
&-L(1+x),
\end{aligned}$$

en se rappelant que

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

D'une manière générale, on a

$$[3'] \quad \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx$$

$$= -\frac{x^p}{m(1+x)^m} - \ldots$$

$$- \frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)x^{p-m+1}}{m(m-1)\ldots 1(1+x)}$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)x^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1}$$

$$\times \left[L(1+x) + \left(\frac{1}{1} - \ldots + \frac{1}{p-m}\right)\right]$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-m)x^{p-m-1}(1+x)}{m(m-1)\ldots 1(-1)}$$

$$\times \left[L(1+x) + \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-m}\right)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots 1(1+x)^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1(-1)\ldots[-(p-m)]} L(1+x).$$

Le calcul précédent revient à multiplier les deux membres de la formule [3] par $m(m-1)\ldots(m-p)$, à prendre les dérivées des deux membres par rapport à m pour faire ensuite $m = \mu$, et à diviser par $\mathfrak{M}$.

Pour $p = m$, on a simplement

$$\int_0 \frac{x^m}{(1+x)^{m+1}}\,dx$$

$$= -\frac{x^m}{m(1+x)^m} - \frac{x^{m-1}}{(m-1)(1+x)^{m-1}} - \ldots$$

$$- \frac{x}{1+x} + L(1+x).$$

7. D'après la formule (3′), le facteur qui multiplie $L(1+x)$ dans la formule [3′] doit se réduire à $\frac{p!}{M}$; et, en effet, ce facteur est

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{m!}\left[x^{p-m}-\frac{p-m}{1}x^{p-m-1}(1+x)+\ldots\right],$$

ou

$$(-1)^{p-m}\frac{p!}{m}[x-(1+x)]^{p-m},$$

ou

$$\frac{p!}{M}.$$

D'autre part, la comparaison des formules (3′) et [3′] donne l'identité

$$\begin{aligned}\frac{M}{p!}\Bigg\{ & \frac{x^p}{m}+\frac{p x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)}+\ldots \\ & +\frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)x^{p-m+1}(1+x)^{m-1}}{m(m-1)\ldots 1} \\ & -\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)x^{p-m}(1+x)^m}{m(m-1)\ldots 1}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right) \\ & -\frac{p(p-1)\ldots(p-m)x^{p-m-1}(1+x)^{m+1}}{m(m-1)\ldots 1(-1)}\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right) \\ & -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -\frac{p(p-1)\ldots 2x(1+x)^{p-1}}{m(m-1)\ldots 1(-1)\ldots[-(p-m-1)]}\left(\frac{1}{p-m}\right)\Bigg\} \\ & = A'_1 x+\ldots+A'_p x^p,\end{aligned}$$

pour m entier et $p \overset{=}{>} m$. Avec $p=m$, le premier membre se réduit à la première ligne.

On déduirait cette identité de celle du n° 4 en faisant d'abord entrer le facteur $m(m-1)\ \ldots\ (m-p)$ dans la parenthèse, etc., comme au n° 6.

8. Si l'on fait directement l'intégration par parties

dans le cas actuel, on a

$$\begin{aligned}
V_{m-1} &= \frac{(-1)^m}{m!\,(1+x)},\\
V_m &= \frac{(-1)^m}{m!}\,L(1+x),\\
V_{m+1} &= \frac{(-1)^m}{m!}\,\frac{1+x}{1!}\left[L(1+x)-\frac{1}{1}\right],\\
V_{m+2} &= \frac{(-1)^m}{m!}\,\frac{(1+x)^2}{2!}\left[L(1+x)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule qui diffère de la formule [3′] en ce que

$$L(1+x)+\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)$$

est remplacé par $L(1+x)$, le dernier terme étant

$$\frac{p(p-1)\ldots 1(1+x)^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1(-1)\ldots[-(p-m)]} \times \left[L(1+x)-\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)\right];$$

mais il faut ajouter une constante

$$\begin{aligned}
C &= \frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1\ldots[-(p-m)]}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)\\
&= (-1)^{p-m}\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{m(m-1)\ldots 1}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right).
\end{aligned}$$

Voici la raison de cette différence. Dans la formule générale d'intégration par parties données au début du n° 4, on peut remplacer V, V_1, ... par

$$V+C,\quad V_1+C\frac{x}{1!}+C_1,\quad \ldots;$$

et, à partir de V_m, les intégrales V écrites au début du n° 7 ne sont pas les limites des intégrales correspondantes du n° 4. On avait

$$V_\mu = \frac{(-1)^\mu}{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)} \frac{-(1+x)^{\mu-m}}{m-\mu},$$

et il faut considérer

$$\frac{-(1+x)^{\mu-m}+1}{m-\mu}$$

pour avoir comme limite $L(1+x)$; etc. On serait arrivé à la formule [3'] en remplaçant, au début du n° 8, $L(1+x)$ par $L(1+x)+\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)$, comme on le pouvait.

Pour passer de la formule [3'] à celle que l'on vient d'obtenir, on pose

$$L(1+x)+\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right) = X;$$

le facteur qui multiplie X est, d'après ce qu'on a vu au début du n° 7,

$$(-1)^{p-m}\frac{p!}{M}[x-(1+x)]^{p-m},$$

ou

$$\frac{p!}{M};$$

on retrouve ainsi la constante C. Inversement, si l'on multiplie la constante C par le développement de l'expression

$$[(1+x)-x]^{p-m}$$

qui est égale à 1, afin de rendre le second membre de la formule actuelle homogène par rapport à x et $1+x$, et si l'on réduit les termes semblables, on obtient la formule [3'] qui présente cette homogénéité.