Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 281-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__281_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

804.

(1867, p. 188.)

Étant donnés m nombres en progression arithmétique, trouver le nombre de leurs combinaisons n à n, ayant la propriété que la somme des n nombres composant chaque combinaison ne dépasse pas le plus grand des nombres donnés.

J. SACCHI.

SOLUTION.

Par M. T. ONO, à Kagoshima.

Soient

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad \ldots,\quad a+(n-1)d,\quad \ldots,\\ a+(s-1)d,\quad \ldots,\quad a+(m-1)d,$$

m nombres en progression arithmétique, et $F(m, n)$ le nombre cherché.

Supposons qu'on ait

$$a+(s-2)d < a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\\ +(a+\overline{n-1}\,d) \leqq a+(s-1)d;$$

si $m = s$, on a

$$F(s, n) = 1;$$

mais, si $m > s$, on constate aisément les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
F(s+1, n) &= F(s, n) \quad\quad\quad + 1,\\
F(s+2, n) &= F(s+1, n) + 2,\\
F(s+3, n) &= F(s+2, n) + 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
F(m, n) \quad &= F(s+m-s, n) = F(m-1, n) + m - s;
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
F(m, n) &= 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-s)\\
&= 1 + \frac{(m-s)(m-s+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Or

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + \overline{n-1}\,d) \leqq a + (s-1)d,$$

c'est à-dire

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \leqq a + (s-1)d$$

ou

$$\frac{(2a+nd)(n-1)}{2d} + 1 \leqq s.$$

Donc, si l'on pose :

$$\frac{(2a+nd)(n-1)}{2d} = E + f,$$

où E désigne la partie entière et f la partie fractionnaire, on a

$$\begin{aligned}
F(m, n) &= 1 + \frac{(m-E-1)(m-E)}{2} \qquad \text{(cas où } f = 0\text{)},\\
&= 1 + \frac{(m-E-2)(m-E-1)}{2} \qquad \text{(cas où } f \neq 0\text{)}.
\end{aligned}$$

1969.

(1903, p. 192.)

Soit PQ *une corde d'une ellipse de centre* O. *Montrer que, lorsque la corde* PQ **tend vers zéro**, *l'orthocentre* H *du triangle* OPQ *a une limite. Le lieu de ce point limite est une sextique unicursale dont l'aire est équivalente à la somme des aires de l'ellipse et de sa développée.*

E.-N. Barisien.

Solution.

Par M. W. Gaedecke.

Soient $M(\alpha, \beta)$ le pôle de la corde PQ par rapport à l'ellipse, G, C, H le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre de OPQ. On calcule d'abord les coordonnées de G et C, et l'on en déduira celles de H, sachant que G, C, H sont en ligne droite et que $HG = 2GC$.

Calcul du centre de gravité G. — La combinaison des équations de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et de sa seconde polaire PQ

$$b^2\alpha x + a^2\beta y = a^2b^2$$

donne les relations suivantes entre les coordonnées de $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Or

$$3x_G = x_1 + x_2, \qquad 3y_G = y_1 + y_2.$$

Donc

$$3x_G = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad 3y_G = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Calcul du centre du cercle circonscrit C. — Le cercle circonscrit au triangle OPQ a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + K\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - p\right) = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle passant par $x = 0$, $y = O$, il faut avoir

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}, \qquad p = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{a^2b^2c^2}\left(= \frac{1}{k}\right).$$

Par suite, l'équation du cercle considéré sera

$$a^2 b^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2) - b^2\alpha\, x(b^4\alpha^2+a^4\beta^2+a^2b^2c^2) \\ - a^2\beta\, y(b^4\alpha^2+a^4\beta^2-a^2b^2c^2) = 0.$$

Le centre de ce cercle a donc pour coordonnées

$$x_C = \frac{\alpha(a^4\beta^2 + b^4\alpha^2 + a^2b^2c^2)}{2a^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},$$
$$y_C = \frac{\beta(a^4\beta^2 + b^4\alpha^2 - a^2b^2c^2)}{2b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

Calcul de l'orthocentre H. — On voit facilement qu'on a

$$x_H = 3x_G - 2x_C, \qquad y_H = 3y_G - 2y_C;$$

donc

$$x_H = \frac{\alpha[a^2b^2(a^2+b^2) - a^4\beta^2 - b^4\alpha^2]}{a^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},$$
$$y_H = \frac{\beta[a^2b^2(a^2+b^4) - a^4\beta^2 - b^4\alpha^2]}{b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

Lorsque la corde PQ *tend vers zéro*, le point M *vient sur l'ellipse*; par conséquent, il faut poser $\alpha = a\cos\varphi$, $\beta = b\sin\varphi$. Alors les coordonnées du point limite H sont, en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$(1) \quad x_H = \frac{\cos\varphi}{a}(b^2 + c^2\cos^2\varphi), \qquad y_H = \frac{\sin\varphi}{b}(a^2 - c^2\sin^2\varphi).$$

Si M parcourt l'ellipse, le point limite H décrit une courbe unicursale du sixième degré, ce que l'on voit en posant $\tang\frac{\varphi}{2} = t$. L'équation cartésienne de H est facile à déduire; elle est

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^4x^2 + b^4y^2)^2.$$

Aire du lieu H. — Les équations (1) ont la forme générale

$$x = A\cos\varphi + B\cos^3\varphi, \qquad y = C\sin\varphi + D\sin^3\varphi.$$

La différentielle dU de l'aire est

$$\frac{dU}{d\varphi} = x - \frac{dy}{d\varphi} = (A\cos\varphi + B\cos^3\varphi)(C\cos\varphi + 3D\sin^2\varphi\cos\varphi)$$
$$= AC\cos^2\varphi + BC\cos^4\varphi + 3AD\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$+ 3BD\sin^2\varphi\cos^4\varphi.$$

Donc, l'aire totale de la courbe est

$$U = AC\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + BC\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi$$
$$+ AD\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi + 3BD\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi, \qquad \int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3\pi}{4},$$
$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Donc

$$U = \pi AC + \frac{3\pi}{4}(AD + BC) + \frac{3\pi BD}{8}.$$

En portant dans cette relation les valeurs de A, B, C, D, on obtient

$$U = \pi ab + \frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}.$$

Or, l'aire de l'ellipse donnée est $E = \pi ab$, celle de sa développée

$$D = \frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab};$$

donc

$$U = E + D.$$

Remarque. — Sur des questions semblables, *voir* E.-N. Barisien, *Sur certains points remarquables d'une conique* (Association française pour l'Avancement des Sciences : *Congrès d'Angers*, 1904, t. 12, p. 121-127, et *Mathesis*, 3e série, t. VIII, 1908, Question 1087, p. 219-221.

2095.

(1908, p. 240.)

Si deux quadriques ont en commun deux génératrices Ox, Oy, *le long desquelles elles se raccordent, elles ont en* O *un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'une perpendiculaire au plan* xOy *rencontre les deux quadriques en deux points* M *et* M' *dont la distance est un infiniment petit du quatrième ordre en prenant* OM *comme infiniment petit principal.*

G. F.

Seconde solution (¹).

(Par l'auteur.)

Les deux quadriques et le plan double tangent en O *font partie d'un faisceau ponctuel de quadriques.* Les axes de coordonnées étant deux droites quelconques menées par le point O dans le plan tangent en ce point et la normale en O, les équations des deux quadriques sont de la forme

$$z = ax^2 + by^2 + \lambda z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$
$$z = ax^2 + by^2 + \mu z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

on a donc, pour les points M et M' relatifs aux mêmes valeurs des coordonnées x et y,

$$(z' - z)(1 - 2fy - 2gx) = \mu z'^2 - \lambda z^2.$$

Avec OM comme infiniment petit principal, z et z' ont pour partie principale commune $ax^2 + by^2 + 2hxy$, et l'on voit que $z' - z$ a pour partie principale

$$(\mu - \lambda)(ax^2 + by^2 + 2hxy)^2,$$

ce qui démontre la proposition.

(¹) *Voir* une première solution, 1909, p. 55. *Voir* aussi la Note qui accompagnait l'énoncé 1908, p. 240, et qui montre l'intérêt de la question.

2200.

(1913, p. 48.)

Soient ABCD *un carré de centre* O, M *un point quelconque du cercle circonscrit au carré*, E *le point où la tangente en* M *au cercle rencontre la diagonale* BD. *Montrer que les centres des cercles tritangents au triangle* OME *sont chacun sur un des côtés du carré* ABCD.

E.-N. Barisien.

SOLUTION.

Par M. Parrod.

Supposons le point M sur l'arc AB et considérons le triangle symétrique de OME par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle MOE; on obtient le triangle OBE′, le côté BE′ est tangent au cercle; le cercle inscrit dans le triangle OBE′ est le même que celui qui est inscrit dans le triangle OME et la la bissectrice de l'angle OBE′ est BA; donc le centre de ce cercle inscrit est sur le côté AB du carré.

On voit de même que les deux cercles exinscrits dans l'angle EOE′ sont les mêmes et par suite le centre est situé sur le côté BC qui est la bissectrice extérieure de l'angle E′BE.

Par le même procédé, à l'aide de la bissectrice extérieure de l'angle MOE; on montrerait que les deux autres centres sont sur les côtés AD et CD.

Autres solutions, de MM. R. Bouvaist, R. Goormaghtigh, L. Klug et T. Ono.

2201.

(1913, p. 48.)

Démontrer la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta)^2}$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^6\sin^2\theta+b^6\cos^2\theta)^2}.$$

E.-N. Barisien.

Solution.

Par M. T. Ono, à Kagoshima.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta \cos^4\theta \, d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^2 (a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4\theta \, d\theta}{(a^2 + b^2\tan^2\theta)^2 (b^4 + a^4\tan^2\theta)} \qquad (\text{soit } \operatorname{tang}\theta = t)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^4 \, dt}{(a^2 + b^2 t^2)^2 (b^4 + a^4 t^2)^2 (1 + t^2)} \qquad \left(\text{soit } t = \frac{a}{b} u\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{abu^4 \, du}{(1+u^2)^2 (b^6 + a^6 u^2)^2 (b^2 + a^2 u^2)} \qquad (\text{soit } u = \operatorname{tang}\theta)$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^4\theta \, d\theta}{\text{séc}^2\theta (b^6 + a^6 \operatorname{tang}^2\theta)^2 (b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\theta)}$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta \cos^4\theta \, d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta)^2}.$$

N. B. — Dans le calcul ci-dessus, si l'on pose $t = \frac{a^2}{b^2} u$, on obtiendra aussi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta \cos^4\theta \, d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^2 (a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}$$

$$= a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta \cos^4\theta \, d\theta}{(a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta)(a^6\cos^2\theta + b^6\sin^2\theta)^2}.$$

De plus, d'après la méthode des résidus, on trouve pour valeur des deux intégrales :

$$\pi \left[\frac{1}{2(a^2 - b^2)^2 (a^4 - b^4)^2} + \frac{ab(a^2 - 3b^2)}{4(a^2 - b^2)^2 (a^6 - b^6)^2} - \frac{a^2 b^2 (3a^4 - b^4)}{4(a^4 - b^4)^2 (a^6 - b^6)^2} - \frac{a^2 b(a^7 + a^5 b^2 + b^7)}{(a^4 - b^4)(a^6 - b^6)^3} \right].$$