NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 262-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__262_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux points pesants, ayant chacun une masse égale à l'unité, sont reliés par un fil élastique de masse négligeable.*

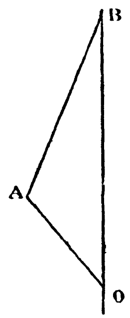
Lorsque le fil n'est pas tendu, sa longueur naturelle est a; s'il est tendu, de manière à prendre la longueur l ($l > a$) sa tension est égale à $\frac{1}{2}(l - a)$.

On place le fil verticalement, et on le tend de manière à lui donner la longueur $2a$; puis, le point placé le plus haut étant maintenu fixe, on imprime à l'autre point une vitesse horizontale ω, et l'on abandonne le système aux forces qui le sollicitent.

Étudier le mouvement que prend le système.

Nota. — *S'il arrive que le fil reprenne la longueur* a, *il sera inutile de poursuivre l'étude du mouvement.*

Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA, *de longueur* r, *tourne autour du point* O *avec la vitesse angulaire* ω. *Elle est articulée en* A *avec une bielle* AB *de lon-*



gueur l ($l > r$), *dont l'extrémité* B *glisse sans frottement sur une droite fixe* Ox.

1° *Calculer la vitesse du point* B, *lorsque la manivelle fait l'angle* α *avec* Ox.

2° *On suppose que la manivelle ait une longueur de* 1^{dm}, *et fasse* 1000 *tours à la minute, et l'on demande de calculer la longueur de la bielle ainsi que la valeur de la vitesse maximum du point* B *sur* Ox, *sachant que cette vitesse maximum est atteinte pour un angle* α *dont la tangente a pour valeur* 2. (Juin 1912.)

Nancy.

Epreuve théorique. — *Une barre rigide homogène* AB *de longueur* $2l$ *et de masse* M *est mobile dans un plan horizontal* π; *l'une de ses extrémités* A *ne peut quitter une droite donnée* (d) *de ce plan* π.

A l'instant initial, la barre A_0B_0 *est inclinée de* 30° *sur* (d) *et elle est au repos. On lui imprime une percussion* B_0P_0 *appliquée en* B_0, *située dans le plan* π *et normale à la barre* A_0B_0 *dans le sens qui tend à augmenter l'angle aigu de* A_0B_0 *avec* (d).

On demande l'état initial des vitesses et la percussion de réaction en A_0.

L'extrémité B *de la barre* AB *est, à chaque instant* t, *attirée par la droite* (d); *la force d'attraction* BF *est, à chaque instant, perpendiculaire à* (d); *on désignera par* MK^2 *l'intensité de cette force à l'unité de distance de* (d); *l'intensité de* BF *est, à chaque instant, inversement proportionnelle au carré de la distance de* B *à* (d) *à cet instant.*

On suppose que l'intensité P_0 *de la percussion* B_0P_0 *est donnée par*

$$P_0 = \frac{2MK}{7}\sqrt{\frac{13}{l}}.$$

On demande quel sera le mouvement de la barre et quelle sera la réaction de (d) *sur la barre en* A?

Les frottements sont supposés nuls.

(Juin 1911.)

Épreuve théorique. — *Une sphère homogène pesante de* 5^{cm} *de rayon et de masse égale à* 1^{kg} *repose sur un plan horizontal rugueux; elle est mise en mouvement par un choc appliqué en un de ses points* B *dans une direction* DB *dont le prolongement rencontre le plan horizontal sous un angle de* $30°$. *Le plan vertical* π, *mené par la droite* DB, *est à une distance* OO_1 *du centre de la sphère égale à* $2^{cm},5$; *la distance du point* O_1 *à la droite* DB *est aussi égale à* $2^{cm},5$.

On prendra pour plan des xz *un plan vertical parallèle à* DB, *pour axe des* x *une horizontale de ce plan, pour axe des* z, *une verticale de ce plan; l'axe des* y *est perpendiculaire au plan des* xz.

On suppose que les intensités F_x, F_y *des composantes de la percussion du frottement suivant les axes des* x *et des* y *sont liées à l'intensité* ϖ *de la percussion résultant du choc par les relations*

$$F_x = \frac{5+2\sqrt{3}}{14}\varpi, \qquad F_y = \frac{5}{28}\varpi.$$

On demande :

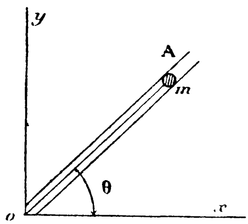
1° *D'exprimer les composantes* u_0, v_0, w_0 *de la vitesse* *initiale de* O *et les composantes* p_0, q_0, r_0 *de la vitesse angulaire initiale de la sphère autour de* O *au moyen de* ϖ *et de l'intensité de la percussion de réaction;*

2° *D'évaluer la vitesse initiale du point de contact de la sphère et du plan;*

3° *D'étudier le mouvement de la sphère sur le plan rugueux.* (Octobre 1911.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Sur un plan horizontal fixe* xOy *peut glisser sans frottement un tube rigide rectiligne* OA, *de section infiniment petite, en tournant autour de son extrémité* O *qui est fixe; dans l'intérieur du tube, peut glisser sans frottement, un point matériel* m, *de même masse* m *que le tube attaché au point* O *par un fil élastique* Om, *dont on néglige la masse; la tension de ce fil*



est proportionnelle à son allongement, de telle sorte qu'en appelant a *la longueur naturelle du fil et* r, *sa longueur* Om *quand il est allongé, la valeur absolue de sa tension soit*

$$m\lambda(r-a) \quad \text{où} \quad r \geq a,$$

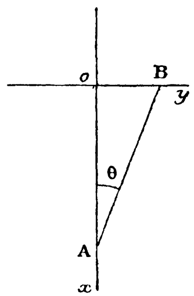
λ *désignant une constante positive.*

Trouver le mouvement de ce système, placé dans des conditions initiales quelconques, telles que la valeur initiale r_0 *de* r *soit supérieure à* a.

Notations. — *On appellera* $m\mathrm{K}^2$ *le moment d'inertie du tube par rapport au point* O, θ *l'angle polaire* xOm, r'_0 *et* θ'_0 *les valeurs initiales des dérivées* $\dfrac{dr}{dt}$ *et* $\dfrac{d\theta}{dt}$.

Cas particulier. — *Dans l'hypothèse $r'_0 = 0$, on cherchera si, à partir de l'instant initial, r augmente ou diminue; on déterminera, dans cette même hypothèse, la valeur qu'il faut donner à θ'_0 pour que r reste constamment égal à r_0.*

Épreuve pratique. — *Étant donnés deux axes rectangulaires fixes Ox et Oy, Ox étant vertical descendant, on considère deux points matériels pesants A et B, de*



masses a et b, glissant sans frottement, l'un sur Ox, l'autre sur Oy, et reliés l'un à l'autre par une ligne rectiligne AB sans masse, *de longueur l.*

1° *En appelant θ l'angle OAB de BA avec Ox, déterminer la valeur de θ pour laquelle le système est en équilibre stable.*

2° *Le système étant écarté de cette position et abandonné à lui-même sans vitesses, écrire l'intégrale des forces vives.*

3° *Calculer la durée T des oscillations infiniment petites (aller et retour) du système, autour de la position d'équilibre.*

4° *Calculer T en secondes avec les données numériques suivantes :*

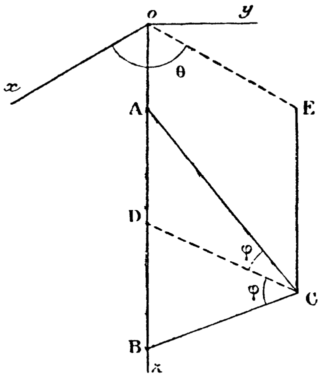
$$l = 1^{\text{m}},$$
$$a = 8^{\text{g}},$$
$$b = 2^{\text{g}}.$$

On prendra dans le système C.G.S., pour valeur de *l'accélération due à la pesanteur,*

$$g = 980.$$

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — *Deux barres rectilignes, infiniment minces, homogènes et pesantes,* AC *et* BC, *de même longueur* $2l$ *et de même masse* m, *sont articulées sans*



frottement à leur extrémité commune C, *tandis que leurs autres extrémités* A *et* B *peuvent glisser sans frottement sur un axe vertical* Oz.

Trouver le mouvement du système des deux barres, supposé placé dans des conditions initiales quelconques compatibles avec les liaisons.

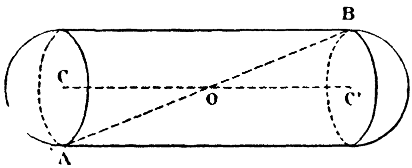
Notations. — *Le triangle* ABC *reste isoscèle :* AC = BC. *En menant la hauteur* CD, *on appellera* u, *le segment variable* $\overline{\mathrm{OD}}$; φ, *les deux angles égaux* DCA, DCB; θ, *l'angle* xOE *que fait le plan du triangle* ABC *avec le plan* xOz. (*Dans la figure,* E *est la projection du point* C *sur le plan horizontal* xOy.) *On pourra supposer qu'à l'instant initial* $t = 0$, *on a*

$$u_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0, \qquad \varphi = \varphi_0$$

et

$$\frac{du}{dt} = u'_0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta'_0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'_0.$$

Épreuve pratique. — *Un solide homogène de masse* M *a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur* $CC' = h$ *et de rayon de base* R, *surmonté à ses deux bases de deux hémisphères ayant ces bases pour grands cercles.*



1° *Déterminer l'ellipsoïde d'inertie de ce solide relatif à son centre* O.

2° *Calculer le moment d'inertie* I *de ce solide par rapport à un axe* AB *passant par* O *et rencontrant les deux circonférences de base du cylindre.*

3° Calcul numérique en unités C.G.S. — *En supposant* $M = 700^g$, $h = 10^{cm}$, $R = 5^{cm}$, *on fait tourner le solide autour de l'axe* AB *supposé fixe avec une vitesse angulaire de* 3 *tours à la minute. Calculer, en unités* C.G.S., *la force vive* $\sum mv^2$ *du solide.* (Octobre 1912.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Un certain nombre de barres homogènes minces identiques sont articulées sans frottement en leur extrémité commune* A *qui glisse sans frottement sur une verticale fixe* V.

1° *Chercher si l'ensemble de ces barres peut être en équilibre quand les barres font entre elles des angles successifs égaux et reposent tangentiellement sur une sphère polie fixe* S *dont le centre est sur* V.

2° *Calculer la période des petites oscillations du système près d'une position d'équilibre stable, chaque barre restant dans un plan diamétral vertical fixe, les plans diamétraux qui correspondent aux diverses barres faisant encore des angles égaux entre eux.*

On appellera l *la longueur commune des barres,* θ *le demi-angle au sommet du cône de révolution sur lequel* *se trouvent les barres, α la valeur de θ dans la position d'équilibre,* R *le rayon de la sphère* S.

II. *Trois billes* P, Q, R, *très petites, de poids p, q, r, sont reliées par un fil léger flexible et inextensible qui glisse ainsi que les billes dans un tube poli de très petite section.*

Ce tube, fixé dans un plan vertical, a la forme d'un triangle ABC. *A l'instant initial,* P *est dans* BC, Q *dans* CA, R *dans* AB. *Étudier le mouvement du fil depuis l'instant initial jusqu'au moment où, pour la première fois, l'une des billes passe en l'un des sommets du triangle.*

On appellera α, β, γ les angles que font avec la verticale ascendante les côtés du triangle orientés dans les sens respectifs BC, CA, AB.

Épreuve pratique. — *Un solide* S *homogène a la forme d'un secteur sphérique dont la méridienne est formée par un arc de cercle* ABC *et par deux rayons* OA, OB *faisant entre eux un angle droit. Ce solide est mobile sans frottement autour de son axe* OC *placé verticalement, le sommet* O *en haut. A l'instant initial, il tourne avec une vitesse de* 400 *tours par minute.*

Un anneau circulaire mince homogène de poids égal au huitième de celui du solide S, *de rayon r égal aux deux tiers de* $R = OA$ *et dont l'axe coïncide avec* OC *est abandonné sans vitesse à une hauteur assez petite au-dessus de* S.

Au bout de peu de temps l'anneau participera au mouvement de rotation de S *autour de* OC. *Calculer à ce moment la nouvelle vitesse de* S.

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — 1° *Une barre homogène mince polie* AB *repose sur un plan horizontal. On applique une percussion horizontale* P *perpendiculaire à* AB *en un point* M *de la barre. Celle-ci se met en mouvement.*

On demande de déterminer la position initiale de son centre instantané de rotation C. *Peut-on choisir* M *de sorte que* C *soit en* A ?

(*On appellera* $2l$ *la longueur de la barre,* $a + l$ *la distance* AM.)

2° *Un bloc homogène rugueux ayant la forme d'un cylindre droit est placé dans une cavité ayant la forme d'un cylindre droit dont le rayon* R *est plus grand que le diamètre* $2r$ *du bloc et dont l'axe est horizontal. A l'instant initial, les deux cylindres se touchent le long d'une génératrice commune plus basse que l'axe de la cavité et sont abandonnés sans vitesse initiale.*

On formera les équations du mouvement dans l'hypothèse où il se produit un roulement sans glissement et l'on montrera que l'axe du bloc est animé d'un mouvement pendulaire.

On calculera l'angle de réaction totale et de la réaction normale et on le comparera avec l'angle de frottement. On en conclura que le mouvement ne peut avoir lieu sans glissement dans des conditions initiales données que si le coefficient de frottement est suffisamment grand.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer la position du centre de pression d'une lame mince immergée dans l'eau et ayant la forme d'un secteur circulaire. On suppose que les deux rayons limites de ce secteur font un angle de* 59° *et que le sommet,* O, *de cet angle affleure au niveau de l'eau. Les rayons ont pour longueur* 1^{dm}, *et leur bissectrice fait un angle de* 46° *avec l'horizontale* Ox *du plan du secteur.*

La position du centre de pression sera déterminée par ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy *du plan de la lame.*

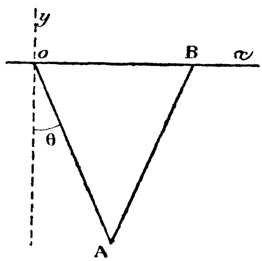
(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux barres minces homogènes de même masse* m *sont articulées sans frottement en* A. *L'extrémité* O *de l'une est fixe ; l'extrémité* B *de l'autre peut glisser sur une horizontale fixe* Ox *issue de* O.

1° *Trouver les positions d'équilibre du système. On appellera* $2a$ *la longueur commune des barres et* f *le coefficient de frottement de* AB *sur* Ox.

Étudier le mouvement du système quand on néglige le frottement en B, *en supposant qu'à l'instant initial* $OB = 4a$ *et que le système est au repos. On ne s'occupera que de la période où* B *reste du même côté de* O.

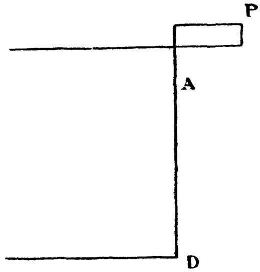
3° *Dans les hypothèses précédentes calculer la vitesse angulaire maximum de* OA. *Comparer la valeur de la vitesse angulaire de* OA *quand* OA *est verticale avec la vitesse qu'elle aurait dans la même position, si à l'instant initial on avait supprimé* AB. OA *tournant seul sans vitesse initiale à partir de la position horizontale.*



4° *Pendant le mouvement étudié dans* (2°), *on a à un certain instant une percussion* P *parallèle à* OB *et de même sens en un point déterminé* T *de* OA ($OT = b$). *Déterminer la variation de vitesse angulaire de* OA *produite par la percussion* P.

5° *Dans les mêmes conditions, calculer la percussion de liaison en* B *provoquée par la percussion* P.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une lame mince pesant* 50^{kg} *a la forme d'un carré de* 1^{m} *de côté. Elle attire, suivant la loi*



de Newton, une petite particule P *de* 1^{g} *qui, placée comme dans la figure, est à* 12^{cm} *de* AB *et à* 30^{cm} *de* AD.

On demande de calculer l'attraction totale de la lame *sur* P *en milligrammes-poids. On pourra retrouver approximativement le coefficient d'attraction en tenant compte de ce que l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre est, dans le système* C. G. S., $g = 981$ *et que la densité moyenne de la terre est* 5.

(Juin 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Effet d'un système de percussions sur un corps solide. Cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe.*

II. *Une tige horizontale homogène* AOB *tourne librement autour d'une verticale passant par son milieu* O. *Un petit anneau* M, *qui glisse sans frottement sur la tige, est attiré vers le point* O *proportionnellement à la distance.*

Étudier le mouvement du système, les conditions initiales étant quelconques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un pendule formé d'un solide* (S) *mobile autour d'un axe horizontal* (O), *et d'un curseur* (S′) *dont le centre de gravité* G′ *se trouve dans le plan* P *déterminé par l'axe* (O) *et le centre de gravité* G *du solide* (S). *On désigne par m la masse du solide* (S), *par a l'abscisse de son centre de gravité* G, *comptée à partir de l'axe* (O) *dans le plan* P, *par k son rayon de gyration autour d'un axe central parallèle à* (O). *Les éléments analogues pour le curseur* (S′) *sont désignés respectivement par* μ, x, ρ.

1° *Déterminer, en fonction de ces quantités, la longueur l du pendule simple synchrone.*

2° *La masse μ du curseur ayant été mesurée, x et ρ étant inconnus, on détermine expérimentalement la longueur l; puis on déplace le curseur* (S′) *de manière à augmenter l'abscisse x d'une quantité connue d et l'on détermine encore la longueur analogue l'. On demande de déduire de ces mesures les valeurs des inconnues x et ρ.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équilibre d'un fil tendu sur une surface, avec ou sans frottement.*

II. *Une tige horizontale* OA *tourne uniformément autour de la verticale de son extrémité* O. *Une barre pesante, homogène* AB, *articulée en* A, *peut se mouvoir librement dans le plan perpendiculaire à* OA. *Étudier le mouvement relatif de cette barre dans le plan considéré. Conditions d'équilibre. Petits mouvements.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule composé est constitué par un solide homogène ayant la forme d'un cône de révolution de hauteur h et dont le demi-angle au sommet est désigné par θ. L'axe de suspension est perpendiculaire à l'axe de révolution et passe par le sommet du cône :*

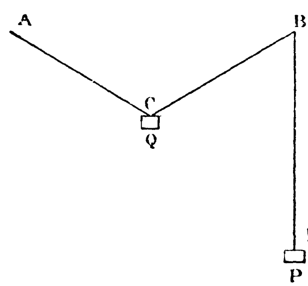
1° *Trouver la longueur du pendule simple synchrone.*

2° *Est-il possible de déterminer θ de telle façon que l'axe conjugué de l'axe de suspension soit situé dans le plan de la base.*

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un fil* ACBD, *flexible, inextensible, de masse négligeable, de longueur l, a l'une de ses extrémités fixée en* A *et passe en* B *sans frottement sur une poulie infiniment petite.*

Au point C *il supporte un poids* Q *de masse q, par l'intermédiaire d'un petit anneau dans lequel il glisse*



sans frottement; la portion BD *pend verticalement et supporte un poids* P *de masse p. Les points fixes* A *et* B *sont sur une même horizontale ; le point mobile* C *reste à égale distance de* A *et de* B *et* BD *reste verticale. Étudier dans ces conditions le mouvement des deux masses pesantes*

P *et* Q. ***Reconnaître si l'équilibre est possible et étudier les petits mouvements. On néglige les masses de l'anneau*** C ***et de la poulie*** B.

II. *Les ponts suspendus.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un plan vertical* P *on considère une tige* AB, *homogène, pesante, de longueur a et de masse m, qui porte à son extrémité* B *un disque homogène pesant, de masse* M, *situé dans le plan* (P) *et dont le centre se trouve en* B. *Le point* A *étant fixe, la tige oscille sans frottement autour de ce point dans le plan* (P) *et le disque tourne librement sans frottement autour de* B *dans le même plan. Démontrer que la vitesse de rotation du disque est constante, et trouver la durée des petites oscillations de la tige.*

(Juin 1913.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque homogène, pesante, est mobile dans un plan vertical qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'une droite verticale Oy fixe dans ce plan. Chaque élément de la plaque est attiré par le point fixe* O *proportionnellement à la masse et à la distance. On désignera par k l'intensité de cette attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance.*

1° *Trouver et discuter le mouvement de la plaque.*

2° *La plaque étant supposée en équilibre relatif, qu'arrivera-t-il si on l'écarte légèrement de cette position sans vitesse initiale ?*

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide invariable est constitué par une sphère homogène, pesante, de centre* G, *traversée par une aiguille sans masse* GO, *dont un point* O *est fixe dans l'espace. Soient Oz la verticale ascendante du point* O, *et* P *la projection sur Oz d'un point quelconque* M *de la sphère.*

L'élément de masse m qui entoure le point M *est sollicité par une force dirigée de* P *vers* M *et ayant pour valeur $2m\frac{g}{l}$* MP, *l désignant la longueur* OG, *et g l'accélération de la pesanteur :*

1° *Étudier les positions d'équilibre du système.*

2° *Étudier le mouvement du système. Examiner en particulier le cas où le mouvement initial serait une rotation très grande autour de* OG. *Donner dans ce cas une valeur approchée de l'amplitude de la nutation, et indiquer le sens de la précession.*

On rappelle les formules suivantes : Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires liés au solide et dont le dernier coïncide avec* OG, *les composantes* p, q, r *de la rotation du corps sur ces axes sont données par les formules*

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \sin\varphi - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi',$$

dans lesquelles θ, Ψ, φ *sont respectivement les angles de nutation, de précession et de rotation propre.*

On désignera par C *le moment d'inertie de la sphère par rapport à nn diamètre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une droite* AB *de longueur invariable est tracée dans un plan mobile qui glisse sur un plan fixe. Le point* A *décrit une droite* Δ *du plan fixe, et la droite* AB *passe constamment par un point fixe* O *de ce plan :*

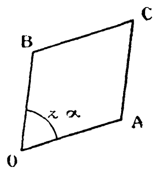
1° *Trouver la base et la roulette qui définissent le mouvement du plan mobile. Construire le cercle des inflexions.*

2° *On considère* AB *comme la diagonale d'un rectangle matériel, homogène, tracé dans le plan mobile et entraîné dans son mouvement. Calculer à un instant donné la force vive de ce rectangle, sachant qu'à l'instant considéré* AB *fait avec la droite* Δ *un angle de* 30° *et que la vitesse du point* A *est égale à l'unité.*

La distance de O *à* Δ *est égale à* 1^m, *les côtés du rectangle ont* 6^m *et* 8^m, *la densité du rectangle est égale à l'unité.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un losange articulé* AOBC *formé de quatre tiges égales et homogènes est mobile sans frottement dans un plan horizontal autour d'un de ses sommets* O *qui est fixe. Étudier le mouvement du système, et* *en particulier les variations de l'angle* 2α *que font entre eux les deux côtés qui aboutissent en* O. *A l'instant initial,*



ces deux côtés OA *et* OB *sont rectangulaires et ont des vitesses angulaires que l'on désigne par* ω_1 *et* ω_2.

On examinera notamment les deux cas particuliers où l'on a

$$\omega_1 - \omega_2 = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

(*S'il arrive que les côtés du losange se disposent en ligne droite, on signalera le fait sans continuer l'étude du mouvement ultérieur.*)

II. *Trouver la courbe plane tautochrone pour une attraction centrale constante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un disque circulaire pesant ayant un rayon égal à* 1^m, *la densité* ρ *à la distance* x *du centre a pour valeur* $\rho = \rho_0 e^x$. *Ce disque peut rouler et glisser sur une droite horizontale dans un plan vertical. A l'intant initial, la vitesse du centre est* 3^m *par seconde, celle du point de contact est* 1^m, *toutes deux dirigées dans le même sens. On tiendra compte à la fois de la résistance au glissement et de la résistance au roulement.*

1° *Au bout de combien de temps le mouvement se réduira-t-il à un simple roulement, et quel sera le chemin parcouru pendant cette première période ?*

2° *Combien de temps s'écoulera-t-il depuis cet instant jusqu'à l'arrêt complet du disque, et quel sera le chemin parcouru pendant cette seconde période ?*

g, f, δ *désignant l'intensité de la pesanteur et les coefficients de frottement pour le glissement et le roulement* *respectivement, on donne*

$$gf = 0{,}1, \qquad g\delta = 0{,}02$$

et l'on prendra

$$e = 2{,}718.$$

(Novembre 1910.)

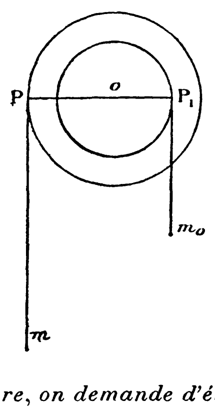
Epreuve théorique. — *Un pendule simple de longueur l, fixé en un point* O, *est assujetti à se déplacer sans frottement dans un plan vertical qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de la verticale* Oz *du point* O :

1° *Chercher s'il existe pour le pendule, pour un choix convenable de ω, des positions d'*équilibre relatif *autres que la verticale ?*

2° *Former l'équation différentielle qui définit la variation de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale* Oz *dirigée vers le bas et l'intégrer autant qu'on le peut.*

Étudier le mouvement qu'on obtient en abandonnant le pendule à lui-même sans vitesse initiale après l'avoir écarté de la verticale d'un angle β. Positions extrêmes. Duree des oscillations.

3° *Soit, dans le cas où elle existe, α l'angle qui définit l'écart du pendule dans la position d'équilibre relatif; en posant $o = \alpha + \varphi$ et négligeant les puissances de φ supé-*



rieures à la première, on demande d'étudier la variation de φ, c'est-à-dire les petites oscillations au voisinage de l'équilibre relatif.

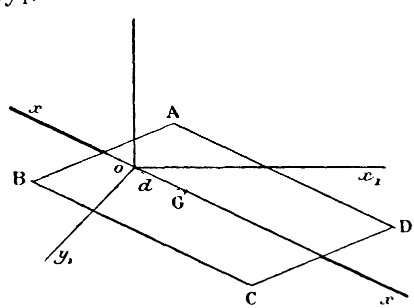
Épreuve pratique. — *On considère un treuil, mobile autour d'un axe horizontal, constitué par deux disques circulaires et concentriques très minces fixés l'un à l'autre et sur lesquels sont enroulés en sens inverse deux fils inextensibles et sans masse supportant respectivement des masses* m *et* m_1. *Soient* M, M_1 *les masses des deux disques,* R *et* R_1 *leurs rayons ;* trouver le temps que met le treuil PARTANT DU REPOS *pour tourner d'un angle* θ.

Application :

$$\theta = 45^\circ, \qquad R_1 = \frac{1}{2} R,$$

$$M = 2m, \qquad M_1 = 2m_1 = m, \qquad R = \frac{16}{9}\frac{g}{\pi}.$$

Épreuve théorique. — *Une tige rectiligne* $x'Ox$ *de masse négligeable, dont un point* O *est fixe, est assujettie à rester dans le plan horizontal* x_1Oy_1. *Une plaque rectangulaire homogène* ABCD *est fixée à la tige par les milieux des côtés parallèles* AB, CD, *de sorte qu'elle peut tourner autour de la tige sans pouvoir glisser le long de cette tige. On définit la position de ce système par l'angle* $x_1Ox = \Psi$ *et par l'angle* θ *du plan de la plaque avec le plan horizontal* x_1Oy_1.

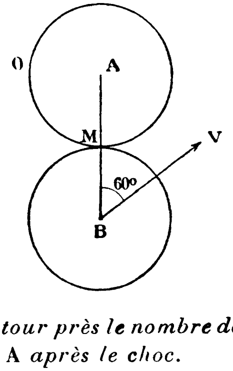


1° *Etudier le mouvement du système formé par la tige et par la plaque, en supposant que la tige reçoive une certaine vitesse angulaire initiale* Ψ'_0 *et que la vitesse initiale de rotation* θ'_0 *de la plaque autour de la tige soit nulle.*

2° *Étudier le mouvement de rotation de la plaque autour de la tige lorsqu'on assujettit cette dernière à avoir un* *mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire* ω, *la vitesse initiale de rotation de la plaque autour de la tige étant ici quelconque. Dans quel cas le mouvement de la plaque est-il révolutif ?*

N. B. — *On désignera par* M *la masse de la plaque, par* d *la distance* OG *du point* O *au centre* G *de la plaque, par* A, B *les moments d'inertie de la plaque par rapport à ses axes de symétrie et l'on calculera en fonction de* M, d, A, B, *si cela est nécessaire, les moments principaux d'inertie de la plaque par rapport à l'origine* O.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux disques circulaires homogènes de centres* A *et* B, *de même masse et égaux, se meuvent sans frottement sur un même plan horizontal. Le disque* A *est fixé par un point* O *de sa circonférence et par suite il ne peut que tourner autour de ce point* O. *Ce disque* A *étant immobile, on lance avec une vitesse de translation donnée le disque* B *qui vient frapper* A *au point* M *situé à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à* OA. *Les disques sont supposés* parfaitement élastiques.



1° *Trouver à un tour près le nombre de tours par seconde que fera le disque* A *après le choc.*

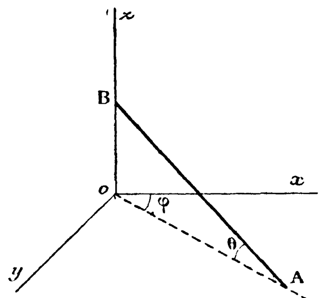
2° *Trouver la vitesse du disque* B *après le choc.*

Données : *Rayon commun aux deux disques*, $R = 2^{ct}$; *vitesse du disque* B *avant le choc*, $V = 10^{m}$ *à la seconde ; angle de cette vitesse* BV *avec* BA, $\alpha = 60°$.

(*Le point* O *et* BV *de part et d'autre de* BA.)

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — *Une barre homogène pesante* AB *de longueur* $2l$, *de masse* M, *s'appuie par l'extrémité* A *sur un plan horizontal* xOy ; *l'autre extrémité* B *porte un anneau infiniment petit que traverse une tige fixe* Oz



perpendiculaire au plan xOy *et située au-dessus de ce plan. Les liaisons sont supposées sans frottement.*

1° *Écrire les équations du mouvement de la barre en prenant pour paramètres l'angle* $xOA = \varphi$ *et l'angle* $BAO = \theta$.

2° *Étudier le mouvement en prenant les données initiales suivantes :*

$$\theta_0 = 30^\circ, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = n\sqrt{\frac{g}{l}}$$

(*n étant un nombre positif*).

On calculera, avec ces données, la réaction du plan sur la barre et l'on cherchera si l'extrémité A *de la barre peut se soulever au-dessus du plan au cours du mouvement : on arrêtera l'étude du mouvement à l'instant où cette circonstance se produit pour la première fois. En particulier, comment faut-il choisir n pour que dès le début du mouvement la barre se soulève au-dessus du plan?*

N. B. — *Si, à un instant donné, la barre vient se placer dans le plan horizontal* xOy, *on arrêtera l'étude du mouvement à cet instant.*

Épreuve pratique. — *Une sphère solide de masse* M *et de rayon* R *se meut librement dans l'espace. On suppose* *qu'à un instant donné son mouvement instantané soit une translation horizontale de vitesse* V *et qu'on fixe subitement à cet instant le point le plus haut de la sphère. On demande :*

1° *De déterminer les conditions initiales du mouvement que prendra la sphère après l'introduction de cette liaison.*

2° *De calculer la perte de force vive provenant de la liaison ainsi introduite.*

Application numérique : $M = 100^{g}$; $V = 7^{cm}$ *à la seconde ;* $R = 5^{cm}$.

(Novembre 1912.)