

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 239-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__239_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1966.

(1903, p. 143)

Soit a un nombre positif donné; on pose

$$u_0 = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}, \quad u_1 = \frac{u_0}{(1-u_0)^2}, \quad \dots,$$
$$u_n = \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a}, \quad \dots$$

Démontrer que pour n infini

$$\lim u_n = \frac{1}{a+1}.$$

MAILLARD.

SOLUTION

Par M. R. CARDELOPPI. .

1° On a, quel que soit n ,

$$(1) \quad 0 < u_n < \frac{1}{a+1}.$$

En effet, cette double inégalité est vérifiée pour $n=0$; supposé qu'elle le soit jusqu'à une certaine valeur de n , établissons-la pour la valeur immédiatement supérieure. On a

$$u_{n+1} = \frac{u_0}{(1-u_n)^a}.$$

Comme u_n est < 1 d'après (1) on voit d'abord que u_{n+1} est positif. Il faut ensuite démontrer que l'on a

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-u_n)^a} < \frac{1}{a+1}$$

ou

$$\frac{a}{a+1} < 1 - u_n,$$

ce qui résulte de la deuxième inégalité (1).

2° On voit encore, par récurrence, que

$$u_{n+1} > u_n;$$

en effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} > \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a},$$

ou

$$u_n > u_{n-1}.$$

D'autre part, elle est vérifiée pour $n=0$; donc, etc.

3° La suite des u étant, d'après ce qui précède, bornée et croissante, u_n tend vers une limite λ que l'on déterminera en écrivant qu'elle satisfait à l'équation

$$\lambda = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-\lambda)^a},$$

ou

$$\lambda(1-\lambda)^a = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}},$$

qui admet la racine (double) $\lambda = \frac{1}{a+1}$ dans l'intervalle de 0 à 1 et n'en admet pas d'autre. La proposition énoncée est donc bien établie.

