NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Sur quelques propriétés des coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__1_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[L¹ 19 d]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. F. BALITRAND.

Nous nous proposons de démontrer analytiquement quelques propriétés des coniques homofocales énoncées par Laguerre (*Œuvres complètes*, t. **2**, p. 569). Pour cela, nous ferons intervenir la parabole de Chasles qui paraît jouer un rôle important dans la théorie des coniques homofocales. Pour plus de clarté, nous conserverons entièrement les notations de Laguerre.

Étant donné un système de coniques homofocales, ayant pour axes Ox et Oy, pour foyers réels F et F′, pour foyers imaginaires Φ et Φ', nous appellerons conique du système, toute conique ayant pour foyers les points F et F′, Φ et Φ'.

Par un point quelconque M du plan passent deux coniques du système; soient N et N′ les centres des cercles osculateurs de ces deux coniques, au point M, et μ la droite qui les joint. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F′; nous l'appellerons l'*axe du point* M.

Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, nous démontrerons qu'il existe, dans ce plan, trois points M, M′ et M″ pour lesquels elle est un axe.

Il existe une seule conique du système qui touche la droite μ. Nous désignerons par α et β les points où la normale au point de contact coupe les axes Ox et Oy.

Cela posé, nous rappellerons que les points N et N′ sont les points de contact de la parabole de Chasles relative au point M, avec les tangentes à cette parabole, issues de ce point.

L'équation ponctuelle de cette parabole (P), α et β désignant les coordonnées de M, est

$$(\alpha x - \beta y - c^2)^2 + 4\alpha\beta x y = 0. \tag{1}$$

Son équation tangentielle, beaucoup plus simple, est

$$c^2 uv + \beta u - \alpha v = 0. \tag{2}$$

Soient

$$ux + vy - 1 = 0 \tag{3}$$

l'équation de la droite μ, et

$$vx - uy - c^2 uv = 0 \tag{4}$$

l'équation de la normale à la conique du système qui touche la droite μ, au point de contact dont les coordonnées $(x_1\, y_1)$ sont

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= u\,\frac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2}, \\ y_1 &= v\,\frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En écrivant que le pôle de la droite μ, par rapport à la parabole de Chasles, coïncide avec le point (α, β), on a les relations

$$(6)\quad \begin{cases} v\alpha^2 - u\alpha\beta - \beta - c^2 v = 0, \\ u\beta^2 - v\alpha\beta - \alpha + c^2 u = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations représentent, α et β désignant pour l'instant les coordonnées courantes, deux hyperboles ayant une direction asymptotique commune perpendiculaire à μ. Elles se coupent donc en trois points à distance finie seulement M, M′ et M″. Ainsi les points pour lesquels la droite μ est un axe sont à l'intersection de deux hyperboles :

La première passe par le point β, *par les foyers réels* F *et* F′ *et admet pour directions asymptotiques l'axe* Oy *et la direction perpendiculaire à* μ.

La seconde passe par le point α, *par les foyers* Φ *et* Φ' *et admet, pour directions asymptotiques, l'axe* Ox *et la direction perpendiculaire à* μ.

(Laguerre.)

Laguerre dit par erreur, *asymptotes*, au lieu de *directions asymptotiques*. Les asymptotes sont d'ailleurs faciles à mettre en évidence en écrivant les équations (6) sous la forme

$$u(u\alpha + 1)\left(v\alpha - u\beta - \frac{v}{u}\right) + v(1 - c^2 u^2) = 0,$$

$$v(v\beta + 1)\left(v\alpha - u\beta + \frac{u}{v}\right) - (1 + c^2 v^2) = 0.$$

Reprenons les équations (6) en désignant toutefois par x et y les coordonnées courantes. On vérifie aisément l'égalité suivante :

$$\alpha(vx^2 - uxy - y - c^2 v) + \beta(uy^2 - vxy - x + c^2 u)$$
$$= (\alpha x - \beta y + c^2)(vx - uy + \beta u - \alpha v),$$

pourvu que le point (α, β) soit un point commun M anx deux coniques. La droite qui a pour équation

$$\alpha x - \beta y + c^2 = 0 \tag{7}$$

représente alors la corde qui joint les deux autres points M' et M''. Elle est symétrique, par rapport à l'origine O, de la corde de contact de la parabole de Chasles (P), relative au point M, avec les axes Ox et Oy. Ainsi :

Le triangle MM'M'' *est symétrique, par rapport à l'origine* O, *du triangle formé par les cordes de contact, avec les axes* Ox *et* Oy, *des paraboles de Chasles* (P), (P') *et* (P''), *relatives à ses sommets.*

Soit $M_1 M'_1 M''_1$ le triangle formé par ces cordes de contact. Les foyers φ, φ' et φ'' des paraboles (P), (P') et (P'') s'obtiennent, soit en projetant les points M, M' et M'' sur la droite μ, soit en projetant l'origine O sur les trois cordes de contact. Donc les projections du point O sur les côtés du triangle $M_1 M'_1 M''_1$ sont en ligne droite, et il en est évidemment de même pour le triangle M M' M''. D'où ce théorème :

Les projections de l'origine O *sur les côtés du triangle formé par les points* M, M', M'', *pour lesquels la droite* μ *est un axe, sont sur une droite, symétrique de la droite* μ *par rapport à l'origine* O.

Nous appellerons μ_1 cette droite. On voit, d'après le théorème de Simpson, que le cercle circonscrit au triangle M M' M'' passe par l'origine O, et aussi qu'il existe une parabole, tangente à ses trois côtés, ayant pour foyer le point O et pour tangente au sommet la droite μ_1. Nous reviendrons plus loin analytiquement sur ces propriétés.

La droite

$$\alpha x - \beta y + c^2 = 0$$

est la polaire du point $M(\alpha\beta)$ par rapport à l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$x^2 - y^2 + c^2 = 0, \tag{8}$$

et que nous désignerons par (H). Ainsi :

Le triangle MM′M″ *est conjugué par rapport à l'hyperbole équilatère* (H) *qui a pour centre le point* O, *et dont l'axe transverse, dirigé suivant* Oy, *a pour longueur* FF′.

(Laguerre.)

Reprenons les équations (6). Multiplions la première par β, la seconde par u et ajoutons. Nous obtenons

$$\alpha^2 + \beta^2 + c^2(v\beta - u\alpha) = 0. \tag{9}$$

C'est l'équation du cercle circonscrit au triangle $O\alpha\beta$.

Multiplions la première des équations (6) par v, la seconde par u et retranchons. En tenant compte de (9), on a

$$\alpha^2 \frac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2} + \beta^2 \frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2} - c^4 = 0, \tag{10}$$

C'est l'équation d'une conique qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée de la conique (C) du système qui touche la droite μ. Nous la désignerons par (K). Ainsi :

Les points M, M′ *et* M″ *sont à l'intersection du cercle* $O\alpha\beta$ *et de la conique qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée de la conique du système qui touche la droite* μ. *Le quatrième point commun à ces deux courbes est le point* O′, *du cercle* $O\alpha\beta$, *diamétralement opposé au point* O. (Laguerre.)

Multiplions à nouveau la première des équations (6) par u, la seconde par v et ajoutons. Il vient

$$\alpha\beta + v\frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2}\alpha + u\frac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2}\beta = 0$$

ou, en introduisant les coordonnées (x_1, y_1) du point de contact de la conique (C) du système, qui touche la droite μ, avec cette droite,

$$\alpha\beta + \alpha y_1 + \beta x_1 = 0. \tag{11}$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère qui admet Ox et Oy pour directions asymptotiques, qui passe à l'origine, et qui a pour centre le symétrique du point (x_1, y_1) par rapport à l'origine O.

Si l'on désigne par O'_1 le symétrique du point O' par rapport à l'origine O, on peut encore dire que l'hyperbole précédente est l'hyperbole d'Apollonius du point O'_1 relativement à la conique (C). Ainsi :

Les points M, M′ *et* M″ *sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point* O'_1 *relativement à la conique* (C). *Le centre de cette hyperbole est le point de la conique* (C) *diamétralement opposé au point* (x_1, y_1).

Jusqu'ici le triangle MM′M″ a été défini par ses sommets ; comme points d'intersection de deux coniques ayant, en dehors d'eux, un quatrième point commun connu. Mais on peut aussi le définir par ses côtés, qui seront alors les tangentes communes à deux coniques, ayant en outre une quatrième tangente commune connue à l'avance.

Si l'on observe que le triangle MM′M″ est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère (H), et par suite ne change pas, si l'on fait une transformation par polaires réciproques, en prenant cette hyperbole pour figure de référence, on voit que les transformées des coniques passant par les sommets fourniront des coniques tangentes aux côtés.

Analytiquement, cela revient à remplacer, dans les équations ponctuelles des coniques, α et β, supposées coordonnées courantes, par $-c^2 U$ et $c^2 V$; U et V désignant les coordonnées tangentielles courantes. Nous avons vu, en effet, que le côté $M'M''$, polaire du point $M(\alpha, \beta)$, par rapport à l'hyperbole (H), a pour équation $\alpha x - \beta y + c^2 = 0$. Les coordonnées de cette droite sont donc

$$U = -\frac{\alpha}{c^2}, \qquad V = \frac{\beta}{c^2}.$$

Cette transformation, appliquée au cercle (9), donne

$$(12) \qquad U^2 + V^2 + Uu + Vv = 0.$$

c'est l'équation tangentielle d'une parabole qui a pour foyer l'origine et pour tangente au sommet la tangente à la conique (C) au point diamétralement opposé au point (x_1, y_1).

Appliquée à l'hyperbole équilatère (11), cette même transformation donne

$$(13) \qquad c^2 UV + y_1 U - x_1 V = 0.$$

c'est l'équation tangentielle de la parabole de Chasles du point (x_1, y_1) relativement à la conique (C). Ainsi :

Les côtés du triangle $MM'M''$ *sont les tangentes communes à deux paraboles. La première a pour foyer l'origine et pour tangente au sommet, la tangente à la conique* (C) *au point diamétralement opposé au point* (x_1, y_1)*; la seconde est la parabole de Chasles, du point* (x_1, y_1) *relativement à la conique* (C).

Appliquons encore cette transformation à la conique (10). Nous trouvons

$$(14) \qquad \frac{1+c^2v^2}{u^2+v^2}U^2+\frac{1-c^2u^2}{u^2+v^2}V^2-1=0,$$

qui n'est autre chose que l'équation tangentielle de la conique (C) elle-même. Les côtés du triangle M M' M'' touchent donc cette conique, et si la droite μ roule sur elle, les sommets du triangle décrivent la conique (K), pendant que les côtés enveloppent la conique (C) et que le triangle reste autopolaire par rapport à (H). Donc :

Le triangle formé par les trois points M, M', M *qui ont pour axe une droite* μ *est : inscrit à la conique* (K), *circonscrit à la conique* (C), *autopolaire par rapport à l'hyperbole* (H). *Si la droite* μ *roule sur* (C), *le triangle varie; mais ses côtés et ses sommets jouissent toujours des mêmes propriétés relativement aux trois coniques.*

(Laguerre.)

La droite M'M'', qui a pour équation

$$\alpha x-\beta y+c^2=0,$$

est donc tangente à la conique (C). Les coordonnées de son point de contact sont faciles à trouver. En les désignant par ξ et η, on a

$$\xi=-\frac{1+c^2v^2}{u^2+v^2}\frac{\alpha}{c^2}, \qquad \eta=\frac{1-c^2u^2}{u^2+v^2}\frac{\beta}{c^2},$$

ou, si l'on fait intervenir les coordonnées du point (x_1, y_1),

$$\xi=-\frac{\alpha x_1}{c^2 u}, \qquad \eta=\frac{\beta y_1}{c^2 v}.$$

En tenant compte de la relation (11), on vérifie aisément qu'elles satisfont à l'équation

$$c^2 uvxy + uy_1^2 x - vx_1^2 y = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point (x_1, y_1) relativement à la conique (C). Ainsi :

Le triangle MM'M'' *est formé par les tangentes à la conique* (C) *aux pieds des normales à cette conique issues du point* (x_1, y_1).

C'est cette propriété qui nous paraît fournir la définition la plus nette du triangle des trois points qui ont pour axe une droite donnée.

Le triangle MM'M'' est encore susceptible d'une autre définition simple. A cet effet, appelons, avec Laguerre, *centre d'une droite* le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux axes Ox et Oy aux points où ils sont coupés par la droite et désignons par P et P' le point (x_1, y_1) et le point qui lui est diamétralement opposé sur l'ellipse (C). Nous aurons le théorème suivant :

Le triangle MM'M'' *et le triangle formé par les centres des trois normales issues de* P, *à l'ellipse* (C), *sont symétriques par rapport à l'origine* O.

Les éléments remarquables du triangle MM'M'' sont aisés à déterminer. Nous avons déjà vu que le centre C du cercle circonscrit est au milieu de $\alpha\beta$.

Le centre des hauteurs H s'obtient en prolongeant OP' d'une longueur égale. On a donc OH $= 2$OP'.

En effet le point H se trouve sur la droite POP', directrice de la parabole (13) inscrite au triangle MM'M''. Il se trouve également sur la parallèle à la tangente à l'ellipse (C) en P' et à une distance double du centre, puisque cette parallèle est la directrice de la parabole (12) également inscrite à MM'M''.

Le centre de gravité G se trouve par cela même déterminé, et on l'obtient, soit en prenant l'intersection des droites HC et P'O'; soit en menant par O une parallèle à la normale en P jusqu'à sa rencontre avec HC. Mais le point ainsi obtenu coïncide avec le centre de gravité du triangle HOO'; d'où ce théorème :

Les triangles MM'M'' *et* HOO' *ont même centre de gravité.*

Le centre du cercle des neuf points, ω, est au milieu de HC. Ce cercle passe par le point P', puisque P' est le centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à MM'M''. Il est donc complètement déterminé. Les coordonnées de ces quatre points sont les suivantes :

$$C\left(\frac{c^2 x_1}{2a^2}, -\frac{c^2 y_1}{2b^2}\right), \qquad H(-2x_1, -2y_1),$$

$$G\left(-\frac{R^2 x_1}{3a^2}, -\frac{R^2 y_1}{3b^2}\right), \qquad \omega\left(-x_1+\frac{c^2 x_1}{4a^2}, -y_1-\frac{c^2 y_1}{4b^2}\right),$$

R désigne le rayon du cercle de Monge de l'ellipse (C).

Le triangle AA'A'', formé par les points de contact avec l'ellipse (C) des côtés du triangle MM'M''; c'est-à-dire le triangle des pieds des normales à l'ellipse (C) issues de P, jouit également de nombreuses propriétés. Mais comme les deux triangles sont polaires l'un de l'autre par rapport à la conique (C), les propriétés descriptives du premier ne sont que les transformées des propriétés correspondantes du second, nous nous contenterons de les énoncer.

On sait que les points A, A', A'' sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point P et aussi sur un cercle, dit *cercle de Joachimsthal*, qui passe par le point P' et par la projection du centre O sur la tangente en P'. Son équation est

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}x_1 x-\frac{a^2}{b^2}y_1 y-(a^2+b^2)=0.$$

Il rencontre le cercle de Monge de la conique (C) suivant un diamètre de cette conique.

Son centre est au milieu de la droite PO'_1.

En dehors de l'hyperbole d'Apollonius et du cercle de Joachimsthal, les points A, A′, A″ sont sur une conique définie de la façon suivante :

Elle a pour centre le milieu de OP′, *pour axes les parallèles à* Ox *et* Oy *menées par ce point; elle passe par le centre* O, *par le point* P′ *et par les projections de ce dernier sur les axes* Ox *et* Oy.

Si, au lieu des sommets, on considère les côtés du triangle A A′ A″, on trouve qu'ils peuvent être définis comme tangentes communes des courbes suivantes :

1° *Une parabole qui touche les axes* Ox *et* Oy *aux points où ils sont coupés par la tangente en* P′ *à la conique* (C). *Cette parabole a pour foyer la projection de* O *sur la tangente en* P′ *et pour directrice la droite* $O'O'_1$. *C'est la parabole de Chasles du point* O'_1.

2° *Une autre parabole qui touche les parallèles aux axes* Ox *et* Oy *menées par le pôle de la normale en* P *aux points où elles sont coupées par* OP. *Son foyer est à l'intersection de* OP *avec la perpendiculaire abaissée sur cette droite du pôle de la normale. C'est le réciproque de* P *par rapport au cercle de Monge. Son axe est parallèle à la droite symétrique de* OP *par rapport à* Ox.

3° *Une ellipse ayant même centre et même direction d'axes que l'ellipse* (C). *Les longueurs de ses axes sont* $\frac{a^3}{c^2}$ *et* $\frac{b^3}{c^2}$.

Enfin le triangle AA′A″ est conjugué par rapport à une hyperbole définie de la façon suivante :

Elle a même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse (C). *Ses sommets réels situés sur* Oy *ont pour ordonnées* $\pm \frac{b^2}{c}$.

Ces deux dernières coniques ont pour équations

$$(15) \qquad \frac{c^4 x^2}{a^6} + \frac{c^4 y^2}{b^6} - 1 = 0,$$

$$(16) \qquad \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{c^2 y^2}{b^4} + 1 = 0.$$

Elles sont indépendantes de (x_1, y_1). Donc :

Lorsque le point $P(x_1, y_1)$ *décrit l'ellipse* (C), *le triangle* $AA'A''$ *varie en restant inscrit à la conique* (C), *circonscrit à l'ellipse* (15), *conjugué par rapport à l'hyperbole* (16).

Les éléments remarquables de ce triangle se déterminent aisément. Nous avons vu que le centre du cercle circonscrit c_1 est au milieu de PO'_1. Le centre des hauteurs H_1 est à l'intersection de $O'O'_1$, directrice de la parabole de Chasles de O'_1, et de la droite menée par le pôle de la normale perpendiculairement à la droite symétrique de OP par rapport à Ox.

Le centre de gravité G_1 et le centre du cercle des neuf points se trouvent par cela même déterminés.

Les coordonnées de ces points sont les suivantes :

$$C_1\left(\frac{b^2 x_1}{2a^2}, \frac{a^2 y_1}{2b^2}\right), \qquad H_1\left(\frac{a^4+b^4}{a^2c^2}x_1, -\frac{a^4+b^4}{b^2c^2}y_1\right),$$

$$G_1\left(\frac{R^2 x_1}{3c^2}, -\frac{R^2 y_1}{3c^2}\right),$$

R désignant le rayon du cercle de Monge.

Ces formules et les formules analogues pour le triangle $MM'M''$ permettent de trouver les lieux décrits par les éléments remarquables de ces triangles, quand le point P décrit l'ellipse (C). On voit que tous ces lieux sont des ellipses ayant même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse (C).