Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Théorèmes sur les courbes et les surfaces fermées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 19-25
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__19_0>

[O'1]

THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES FERMÉES;

Par M. R. BRICARD.

1. Appelons *élongation* d'une courbe ou d'une surface fermée le maximum de la distance de deux points de cette courbe ou de cette surface. J'établirai les théorèmes suivants :

1° *Toute courbe plane fermée d'élongation donnée* E *peut être enfermée dans un cercle de rayon au plus égal à* $\frac{E}{\sqrt{3}}$.

2° *Toute surface fermée, d'élongation donnée* E, *peut être enfermée dans une sphère de rayon égal au plus à* $\sqrt{\frac{3}{8}}\,E$.

Par exemple, il résultera du premier théorème que, si l'on sait d'une contrée que la distance maximum de deux points de sa frontière est de 1000^{km}, on peut affirmer qu'il existe un point dont la distance à tous les points de cette frontière est au plus de $\frac{1000}{\sqrt{3}} = 577^{km}$.

2. Démontrons d'abord le premier théorème. Une courbe fermée plane C peut être définie analytiquement par deux équations :

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

t étant un paramètre qu'on peut supposer varier de 0 à 1, f et g étant deux fonctions continues dans cet intervalle et satisfaisant aux conditions :

$$f(0) = f(1), \qquad g(0) = g(1).$$

Si (α, β) est un point quelconque du plan, l'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ atteint un maximum $R(\alpha, \beta)$ pour un point (x, y) de la courbe C, et cette dernière est tout entière contenue (au sens large) à l'intérieur du cercle

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2(\alpha, \beta).$$

$R(\alpha, \beta)$ est lui-même une fonction continue de α, β (¹). Ce rayon a donc un minimum R_0 atteint pour un certain point (α_0, β_0) du plan. R_0 est le rayon du plus petit cercle G_0 contenant C. Il faut montrer qu'on a

$$R_0 \leqq \frac{E}{\sqrt{3}},$$

E étant l'élongation de la courbe C.

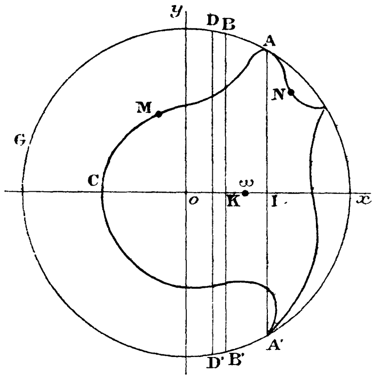
Considérons à cet effet un cercle G, de rayon R (*voir* la figure), contenant à son intérieur, au sens large, la courbe C. Supposons d'abord que les points communs à C et à G appartiennent tous à un arc AA' de G, inférieur à une demi-circonférence. Je vais montrer qu'il existe un cercle G', plus petit que G, et contenant C à son intérieur.

Prenons pour origine le centre O du cercle G, l'axe des x étant perpendiculaire à la corde AA', et cette dernière ayant une abscisse OI positive. Construisons une corde BB', parallèle à AA' et d'abscisse positive $OK < OI$. Les points de la courbe C, appar-

---

(¹) D'après ce théorème général, facile à démontrer : si $f(t, \alpha, \beta)$ est une fonction continue des trois variables indépendantes t, α, β, le maximum $M(\alpha, \beta)$ de cette fonction, quand α et β sont donnés, est lui-même une fonction continue de α et β.

tenant à BB′ ou bien situés à gauche de BB′, sont tous à l'intérieur, au sens étroit, du cercle G, en vertu de



l'hypothèse. Il existe donc un segment de longueur ε tel qu'on ait, pour tout point M de l'une ou l'autre des deux catégories considérées,

$$(1) \qquad OM < R - \varepsilon,$$

l'égalité étant exclue.

Marquons sur Ox un point ω d'abscisse positive h, à la fois inférieure à ε et à $2\,OK$, de telle sorte que la droite DD′, d'équation

$$x = \frac{h}{2},$$

est à gauche de BB′.

Pour tout point M de C, à gauche de DD′ ou situé sur DD′, on écrira

$$\omega M \leqq OM + O\omega = OM + h < OM + \varepsilon,$$

et par conséquent, d'après (1),

$$\omega M < R,$$

l'égalité étant exclue.

Pour tout point N de C situé à droite de DD′, on peut écrire simplement

$$\omega N < ON, \qquad ON \leqq R,$$

d'où

$$\omega N < R,$$

l'égalité étant encore exclue.

On voit donc, en résumé, que tous les points de C sont à l'intérieur d'un cercle de centre ω et de rayon inférieur à R.

Il résulte de là que les points que C a en commun avec le cercle minimum G_0 ne sont pas répartis sur un arc plus petit qu'une demi-circonférence. Deux cas sont possibles :

1° Deux de ces points sont diamétralement opposés; l'élongation de C est alors égale au diamètre de G_0. On a donc

$$R_0 = \frac{E}{2} < \frac{E}{\sqrt{3}},$$

et le théorème est démontré dans ce cas.

2° Parmi les points considérés, il n'en existe pas deux qui soient diamétralement opposés. Ces points sont alors au moins au nombre de trois (car deux points non diamétralement opposés appartiennent toujours à un arc plus petit qu'une demi-circonférence).

Soient donc sur le cercle G_0 trois points α, β, γ satisfaisant aux conditions énoncées. Les trois arcs $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont tous inférieurs à 180°. D'autre part, comme leur somme est de 360°, l'un d'eux au moins atteint 120°. Supposons que ce soit l'arc $\beta\gamma$. La corde $\beta\gamma$ est au moins égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. On a donc

$$\beta\gamma \geqq R_0\sqrt{3}.$$

D'autre part, l'élongation E de la courbe C est au moins égale à $\beta\gamma$. On a finalement

$$E \geqq R_0 \sqrt{3},$$

et le théorème est démontré.

On voit que la limite fournie par l'énoncé de ce théorème est précise. Par exemple, si la courbe C est constituée par le contour d'un triangle équilatéral, on a exactement

$$R_0 = \frac{E}{\sqrt{3}}.$$

3. Le théorème de l'espace se démontre d'une façon analogue. Soient S une surface fermée d'élongation donnée E, Σ_0 la sphère minimum qui la contient et R_0 le rayon de cette sphère. On reconnaît tout d'abord que les points communs à S et à Σ_0 ne peuvent être répartis sur une calotte inférieure à un hémisphère. Donc : 1° ou bien parmi ces points, on peut en trouver deux qui soient diamétralement opposés, et alors on a

$$R_0 = \frac{E}{2} < \sqrt{\frac{3}{8}}\,E;$$

2° ou bien il n'existe pas de tels points. Les points communs à S et à Σ_0 sont alors au nombre de quatre au moins, car trois points d'une sphère, dont deux quelconques ne sont pas diamétralement opposés, appartiennent toujours à une calotte plus petite qu'un hémisphère. Il reste alors à établir la proposition suivante :

Si quatre points d'une sphère de rayon R_0 *sont tels qu'il n'existe pas d'hémisphère les contenant tous, l'une de leurs six distances mutuelles est au moins égale à* $\sqrt{\frac{8}{3}}\,R_0$.

Pour démontrer cela, nous nous appuierons sur le théorème suivant : *Si les côtés d'un triangle sphérique sont au plus égaux à un arc donné l plus petit qu'un demi-grand cercle, l'aire de ce triangle est au plus égale à celle du triangle équilatéral de côté égal à l.*

Soient en effet a, b, c les côtés du triangle, supposé tracé sur une sphère de rayon égal à l'unité. On a, par hypothèse,

$$a \leqq l, \qquad b \leqq l, \qquad c \leqq l.$$

Si l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

l'aire σ du triangle est donnée, comme on sait, par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4}\sigma = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{p}{2} \operatorname{tang}\frac{p-a}{2} \operatorname{tang}\frac{p-b}{2} \operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}.$$

Si, p restant d'abord fixe, a, b, c varient de manière à satisfaire à la relation (2), on reconnaît facilement que $\operatorname{tang} \frac{1}{4}\sigma$ atteint son maximum quand on a

$$a = b = c = \frac{2p}{3} \quad [1].$$

---

[1] Par exemple, si l'on pose

$$\frac{p-a}{2} = x, \qquad \frac{p-b}{2} = y, \qquad \frac{p-c}{2} = z,$$

on a

$$x + y + z = \frac{p}{2} < \frac{\pi}{2}$$

et aussi $x, y, z > 0$ (ces inégalités résultant des propriétés fondamentales des triangles sphériques). On a donc à démontrer que le produit des tangentes de trois arcs positifs, de somme donnée inférieure à $\frac{\pi}{2}$, est maximum quand ces arcs sont égaux, ce qui est élémentaire.

On voit ensuite que tang $\frac{1}{4}\sigma$ augmente avec p, d'où l'on conclut le résultat énoncé.

Cela posé, soient A, B, C, D quatre points d'une sphère, dont trois quelconques n'appartiennent pas à une même hémisphère. On peut les joindre deux à deux par six arcs de grand cercle, tous inférieurs à un demi-grand cercle, et l'on divise ainsi la surface de la sphère en quatre triangles sphériques. L'un deux au moins, le triangle ABC par exemple, a nécessairement une aire au moins égale au quart de l'aire de la sphère, c'est-à-dire à l'aire du triangle équilatéral ayant pour sommets trois des sommets d'un tétraèdre régulier $\alpha\beta\gamma\delta$ inscrit dans la sphère. Si l'un au moins des arcs BC, CA, AB n'était pas au moins égal à l'arc $\alpha\beta$, l'aire du triangle ABC ne pourrait, d'après ce que nous avons vu, satisfaire à la condition qu'on vient d'énoncer.

On aura donc, par exemple,

$$\text{arc AB} \geqq \text{arc}\,\alpha\beta,$$

et par suite, puisqu'il s'agit d'arcs inférieurs à un demi-cercle,

$$AB \geqq \alpha\beta.$$

Mais l'arête $\alpha\beta$ d'un tétraèdre régulier est donnée, en fonction du rayon R_0 de la sphère circonscrite, par la formule

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{8}{3}}\,R_0,$$

et l'on a, de plus,

$$E \geqq \alpha\beta.$$

Le théorème que nous avions en vue est donc complètement démontré.