NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. SERVAIS

Sur les axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux en un point d'une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 193-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__193_0>

[L^2 11 a]

SUR LES AXES DE L'INDICATRICE ET LES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

NOTATIONS. — On désigne par :

M un point d'une quadrique Σ;
μ le plan tangent en ce point;
n la normale, n_1 sa conjuguée;
t_1, t_2 les axes de l'indicatrice au point M;
C_1, C_2 les centres de courbure principaux relatifs aux sections principales nt_1, nt_2;
α, β, γ les plans de symétrie, σ le plan de l'infini;
(α), (β), (γ) les coniques focales, (σ) le cercle imaginaire à l'infini;
A, B, C, S, les traces de la normale sur les plans α, β, γ, σ;
a, b, c les perpendiculaires élevées aux points A, B, C, sur les plans α, β, γ;
d le diamètre passant par M;
m_1, m_2, m_3 les perpendiculaires abaissées de M sur les plans α, β, γ.

1. Soient Σ_1, Σ_2 les deux quadriques homofocales à la quadrique Σ et passant par le point M; leurs normales en ce point seront respectivement t_1, t_2. Les conjuguées de la normale n, relativement aux surfaces Σ, Σ_1, Σ_2, (α), (β), (σ) du système homofocal sont n_1, t_2, t_1, $(\mu\alpha)$, $(\mu\beta)$, $(\mu\sigma)$. Ces droites tangentes à une parabole (P) du plan μ forment un faisceau du second ordre, projectif à la ponctuelle des pôles M, C_1, C_2, A, B, S du plan μ relativement à ces surfaces. La para-

bole (P) est projetée d'un point quelconque O de la droite $\alpha\beta$, sur le plan σ suivant une conique dont on prend la polaire réciproque (P_1) relativement au cercle imaginaire à l'infini (σ). Les pôles M_i, C'_1, C'_2. A_i, B_i, S des plans On_1, Ot_2, Ot_1, $[O,(\mu\alpha)] \equiv \alpha$, $[O,(\mu\beta)] \equiv \beta$, $[O,(\mu\sigma)]$ relativement à ce cercle (σ) forment sur la courbe (P_1) une ponctuelle du second ordre projective au faisceau $[n_1, t_2, t_1, (\mu\alpha), (\mu\beta), (\mu\sigma)]$. Par suite

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \,\overline{\wedge}\, (M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i, S).$$

Cette projectivité montre que les droites MM_i, $C_1C'_1$, $C_2C'_2$, $AA_i \equiv a$, $BB_i \equiv b$ font partie d'un même système réglé (R). Le rayon MM''_i est perpendiculaire au plan On_1 : les rayons $C_1C'_1$, $C_2C'_2$ normaux respectivement aux plans Ot_2, Ot_1 sont les rayons du système réglé (R) perpendiculaires à la droite OM. Ces considérations établissent le théorème :

Si O *est un point arbitrairement choisi sur l'axe de symétrie $\alpha\beta$ de la quadrique Σ, m la perpendiculaire abaissée du point* M *sur le plan* On_1, *les rayons du système réglé* (a, b, m) *normaux à la droite* OM *rencontrent la normale n aux centres de courbure principaux de la quadrique au point* M. *Les plans menés par* O *normalement à ces deux rayons déterminent dans le plan tangent en* M *les axes de l'indicatrice.*

2. Si la quadrique Σ a un centre à distance finie, on peut choisir ce centre pour le point O et faire intervenir dans les raisonnements qui précèdent le troisième plan de symétrie γ au même titre que les plans α, β. On a alors la propriété :

Les rayons du système réglé (a, b, c), *normaux* *au diamètre passant par* M, *rencontrent la normale* n *aux centres de courbure principaux de la quadrique au point* M. *Les plans diamétraux perpendiculaires à ces rayons déterminent dans le plan tangent en* M *les axes de l'indicatrice* ([1]).

Corollaire. — Le rayon du système réglé (a, b, c) issu du point M est normal au plan diamétral conjugué de la normale n.

3. Si le point O(1) est à l'infini sur l'axe $\alpha\beta$, les traces des plans On_1, Ot_2, Ot_1, α, β sur le plan de l'infini, forment un faisceau projectif au faisceau du second ordre $[n_1, t_2, t_1, (\mu\alpha), (\mu\beta)]$ et projectif à la ponctuelle des pôles $(M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i)$ de ces plans relativement au cercle (σ); on a donc encore

$$(M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i) \,\overline{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, B),$$

et le théorème (1) est encore vrai si le point O est à l'infini. On peut remarquer que *dans le cas d'un paraboloïde, le rayon* m *est normal au plan diamétral conjugué de la normale* n, *si le point* O *est à l'infini sur* $\alpha\beta$.

Dans le cas d'une quadrique ayant un troisième plan de symétrie γ, *le rayon* m *est normal au plan polaire du point* $C \equiv n\gamma$, *si* O *est à l'infini sur* $\alpha\beta$.

4. Soient t, t' deux tangentes conjuguées quelconques au point M; une surface Σ' homofocale à Σ est tangente à la droite t, le point de contact est désigné par M'. La normale n' au point M' de Σ' est tangente à la parabole (P) (1); car cette courbe est aussi l'enveloppe des

---

([1]) LAGUERRE, *Œuvres*, t, II, p. 526; *Journal de Mathématiques pures et appliques*, 1878.

normales correspondant aux plans tangents menés de la droite n aux quadriques homofocales à Σ. Une seconde tangente à la parabole (P) passe par le point M', c'est la conjuguée n'' de la droite n par rapport à la surface Σ'. Les rayons du système réglé (m, a, b) (1) ou (a, b, c) (2) normaux aux plans On', On'' sont perpendiculaires à la droite OM'. Le premier normal à la droite n' est nécessairement dans le plan nt; le second coupe la normale n au pôle Q du plan μ relativement à Σ' (1). Si l'on imagine une courbe (Δ) tracée sur la quadrique Σ et tangente au point M à la droite t', ce point Q est le point central de la génératrice n sur la normalie dont la courbe (Δ) est la directrice [1]. Par suite :

Soient t, t' deux tangentes conjuguées au point M *d'une quadrique Σ, (Δ) une courbe de Σ tangente en* M *à la droite t'; la droite t est tangente en un point* M' *à une quadrique Σ' homofocale à Σ. Deux rayons du système réglé (m, a, b) (1) ou (a, b, c) (2) sont perpendiculaires à la droite* OM'; *l'un est situé dans le plan nt, l'autre coupe la normale n au point central de la génératrice n sur la normalie dont la courbe (Δ) est la directrice. Le plan mené par le point* O *perpendiculairement à ce second rayon détermine dans le plan tangent en* M *la conjuguée de la normale n, par rapport à la quadrique Σ'.*

Cette propriété généralise les précédentes.

Corollaire. — Une tangente t au point M de la quadrique Σ est tangente à une quadrique Σ' homofocale, au point M'. Tout plan normal au diamètre

[1] C. Servais, *Mathesis*, 3e série, t. VII, p. 115.

passant par M' coupe le système réglé (a, b, c) suivant une hyperbole.

5. On peut substituer au point O, dans les raisonnements (1), la trace A de la normale n sur le plan de symétrie α; on obtient la propriété :

Par les centres de courbure C_1, C_2 *on mène des parallèles* c_1, c_2 *aux tangentes principales correspondantes* t_1, t_2; *par le point* B *passe un rayon* b' *du système réglé* (c_1, c_2, a). *Le plan tangent en* M, *le plan de symétrie* β *et le plan mené par* A *normalement au rayon* b' *font partie d'un même faisceau. Le plan mené par* A *perpendiculairement au rayon du système* (c_1, c_2, a), *issu de* M, *coupe le plan tangent* μ *suivant la conjuguée* n_1 *de la normale* n *relativement à la quadrique* Σ.

Si l'on adopte également dans les raisonnements du n° 4 la substitution de la trace A au point O, on voit que :

Deux rayons du système réglé (c_1, c_2, a) *sont perpendiculaires à la droite* AM'; *l'un est situé dans le plan* nt, *l'autre coupe la normale* n *au point central de la génératrice* n *sur la normalie dont la courbe* (Δ) *est la directrice. Le plan mené par le point* A *perpendiculaire à ce second rayon détermine, dans le plan tangent en* M, *la conjuguée de la normale* n *relativement à la quadrique* Σ'.

6. La figure réciproque de la parabole (P) relativement à la quadrique Σ est un cône de sommet M; il a pour génératrices les conjuguées des droites n_1, t_2, t_1, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\sigma$. Ces droites sont la normale n; les tangentes t_1, t_2; les perpendiculaires m_1, m_2 abaissées du

point M sur les plans de symétrie α, β; le diamètre d de la quadrique Σ issu du point M. On a

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, d) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, S),$$

ou en désignant par T_1, T_2, M_1, M_2, D les points à l'infini des droites t_1, t_2, m_1, m_2, d :

$$(S, T_1, T_2, M_1, M_2, D) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, S).$$

On considère l'involution déterminée par les deux couples de points MS, AB et l'on désigne par C''_1, C''_2 les homologues de C_1, C_2 dans cette involution. On a

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \barwedge (S, C''_1, C''_2, B, A, M),$$

par suite

$$(S, T_1, T_2, M_1, M_2, D) \barwedge (S, C''_1, C''_2, B, A, M).$$

Cette dernière projectivité établit que les rayons C''_1T_1, C''_2T_2, BM_1, AM_2, MD appartiennent à un même système réglé. Donc :

Si d est le diamètre de la quadrique Σ, issu du point M, *a_1, b_1 les perpendiculaires abaissées de* A *et de* B *respectivement sur les plans de symétrie β, α, le système réglé (a_1, b_1, d) a deux rayons parallèles aux tangentes principales t_1, t_2. Le rayon parallèle à t coupe la normale n en un point C''_1 tel que*

$$MC_1 . MC''_1 = MA . MB,$$

C_1 étant le centre de courbure principal correspondant à la tangente t_1.

7. Si la surface Σ a un troisième plan de symétrie γ, on désigne par C_k l'homologue de $C \equiv n\gamma$ dans l'involution (MS, AB), par M_3 le point à l'infini de la per-

pendiculaire m_3 abaissée de M sur le plan γ. Dans les diverses projectivités utilisées au n° 6, on a successivement les couples d'éléments homologues : m_3 et C, M_3 et C, C et C_k, M_3 et C_k; donc la droite C_kM_3 est un rayon du système réglé (a_1, b_1, d). Par suite :

Si la quadrique Σ a un troisième plan de symétrie γ, le système réglé (a_1, b_1, d) a un rayon normal à ce plan : il coupe la normale n en un point C_k tel que

$$MC.MC_k = MA.MB,$$

C *étant la trace de la normale n sur le plan γ.*

8. Les conjuguées n'_1, n''_1 des droites n', n'' (4) par rapport à la quadrique Σ sont des génératrices du cône (M) (6). Le plan nt tangent à la quadrique Σ' au point M' doit contenir les conjuguées de la droite n' relativement aux quadriques homofocales à Σ' et en particulier la droite n'_1. Les droites n'_1 et n''_1 sont dans le plan polaire du point M' par rapport à la quadrique Σ, ce plan passe par la droite t' conjuguée de t. Soient Q le conjugué du point Q (4) dans l'involution (MS, AB), N''_1 le point à l'infini de n''_1 ; dans les diverses projectivités utilisées au n° 6, on a successivement les couples d'éléments homologues n''_1 et Q; N''_1 et Q; Q et Q'; N''_1 et Q'; donc la droite $Q'N''_1$ est un rayon du système réglé (a_1, b_1, d). Par suite :

Soient t, t' deux tangentes conjuguées au point M *de la quadrique Σ, le plan nt coupe le cône* (M) *du complexe des droites normales à leurs conjuguées suivant les génératrices n et n'_1. Le plan n'_1t' rencontre le même cône suivant les génératrices n'_1 et n''_1. Il existe un rayon du système réglé (a_1, b_1, d) parallèle à la droite n''_1; il rencontre la normale n en* *un point* Q' *tel que*

$$MQ'.MQ = MA.MB,$$

Q *étant le point central de la génératrice* n *sur la normalie dont la directrice* (Δ) *est tangente à la droite* t' *au point* M.

9. On a (6)

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \,\overline{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, B, C, S);$$

par suite

$$n(t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \,\overline{\wedge}\, (C_1, C_2, A, B, C, S).$$

Le faisceau formé par les plans principaux nt_1, nt_2 *et les plans* nm_1, nm_2, nm_3, *projetant la normale* n *sur les plans de symétrie* α, β, γ, *est projectif à la ponctuelle formée par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *et les traces* A, B, C *de la normale* n *sur les plans* α, β, γ. *Dans cette projectivité le plan normal diamétral* nd *correspond au point à l'infini* S *de la ponctuelle* (¹).

10. Soient A', B' les projections orthogonales des points A, B sur l'axe de symétrie $\alpha\beta$; X_1, X_2 les traces de cet axe sur les plans nt_1, nt_2; O le centre de la quadrique Σ. La section du faisceau

$$n(t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d),$$

par la droite $\alpha\beta$, est

$$(X_1, X_2, B', A', \infty, O).$$

Les plans normaux à l'axe $\alpha\beta$ menés par les points X_1,

(¹) SERVAIS, *Sur les points focaux dans les surfaces du second degré* (*Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, t. II, 1907).

X_2, B', A', ∞, O de cette ponctuelle déterminent sur la normale les points Y_1, Y_2, B, A, S, C; on a donc

$$(Y_1, Y_2, B, A, S, C) \,\bar{\wedge}\, (C_1, C_2, A, B, C, S),$$

et les couples C_1Y_1, C_2Y_2, AB, CS sont conjugués dans une même involution :

Par les traces d'un axe de symétrie $\alpha\beta$ de la quadrique Σ, sur les plans des sections principales nt_1, nt_2 au point M *de cette surface, on mène des plans normaux à cet axe. La normale n au point* M *de* Σ *coupe ces deux plans aux points* Y_1, Y_2 *qui sont les conjugués respectifs des centres de courbure principaux* C_1, C_2 *au point* M *dans l'involution* (AB, CS).

11. Si la surface Σ est un paraboloïde, le diamètre d est parallèle à l'axe de symétrie $\alpha\beta$; on conclut de la projectivité

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, d) \,\bar{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, B, S),$$

que :

Dans le cas d'un paraboloïde Σ, *les couples* C_1Y_1, C_2Y_2, AB *sont conjugues dans une involution ayant un point double à l'infini.*

12. En utilisant successivement les axes de symétrie $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ dans les développements du n° 10, on trouve sur la normale n deux points Z_1, U_1, analogues à Y_1, et deux points Z_2, U_2, analogues à Y_2, et l'on a les trois involutions :

$$\begin{array}{cccc} C_1Y_1, & C_2Y_2, & AB, & CS, \\ C_1Z_1, & C_2Z_2, & BC, & AS, \\ C_1U_1, & C_2U_2, & CA, & BS. \end{array}$$

On en conclut que les couples Z_1U_1, Z_2U_2 appartiennent à la première involution; les couples U_1Y_1,

U_2Y_2 à la seconde; les couples Y_1Z_1, Y_2Z_2 à la troisième. Donc :

La section principale nt_1, *au point* M *d'une quadrique* Σ, *coupe les axes de symétrie* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ *de cette surface en trois points, qui sont les projections orthogonales sur ces axes des points* Y_1, Z_1, U_1 *de la normale* n *au point* M. *La section principale* nt_2 *au même point donne les points analogues* Y_2, Z_2, U_2; *si* C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux de* Σ *au point* M, *on a les trois involutions :*

$$\begin{array}{cccccc} C_1Y_1, & C_2Y_2, & Z_1U_1, & Z_2U_2, & AB, & CS, \\ C_1Z_1, & C_2Z_2, & U_1Y_1, & U_2Y_2, & BC, & AS, \\ C_1U_1, & C_2U_2, & Y_1Z_1, & Y_2Z_2, & CA, & BS. \end{array}$$

S *est le point à l'infini de la normale* n.

13. On a

$$m_2(n, t_1, t_2, m_1, m_3, d) \,\bar{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, C, S).$$

On coupe le faisceau $m_2(n, t_1, t_2, m_1, m_3, d)$ par l'axe de symétrie $\alpha\beta$, on obtient la ponctuelle

$$(A', K_1, K_2, M'', \infty, O);$$

A' et M'' sont les projections orthogonales des points A et M sur l'axe $\alpha\beta$. La projectivité

$$(A', K_1, K_2, M'', \infty, O) \,\bar{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, C, S)$$

donne

$$OK_1.CC_1 = OK_2.CC_2 = OA'.CM = OM''.CA.$$

Les plans projetant orthogonalement les tangentes t_1, t_2 *au point* M *de la quadrique* Σ *sur le plan de symétrie* β *coupe l'axe* $\alpha\beta$ *aux points* K_1, K_2; *si* M'' *et* A' *sont les projections orthogonales sur* *l'axe* $\alpha\beta$, *des points* M *et* A, *on a*

$$OK_1 . CC_1 = OK_2 . CC_2 = OA' . CM = OM'' . CA,$$

C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux au point* M, O *le centre de* Σ.

14. Dans le cas d'un paraboloïde Σ les ponctuelles

$$(A', K_1, K_2, M''), \quad (M, C_1, C_2, A)$$

sont semblables et l'on a

$$MC_1 : MC_2 = A'K_1 : A'K_2.$$

Dans le cas d'un paraboloïde Σ *le rapport des rayons de courbure* MC_1, MC_2 *est égal au quotient* $A'K_1 : A'K_2$.

15. On a (1)

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S) \overline{\wedge} (n_1, t_2, t_1, \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma);$$

donc si l'on désigne par $(T''_2, T''_1, C'', B'', S'')$ la section par la droite $\mu\alpha$ du faisceau du second ordre $(t_2, t_1, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma)$, on a la projectivité

$$(C_1, C_2, B, C, S) \overline{\wedge} (T''_2, T''_1, C'', B'', S''),$$

d'où l'on déduit le système réglé

$$(C_1T''_2, C_2T''_1, BC'', B''C, SS'').$$

Le plan tangent au point M *d'une quadrique* Σ *coupe les axes de symétrie* $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ *aux points* C'', B''. *Le paraboloïde circonscrit au quadrilatère gauche* $BC''B''C$ *est tangent aux sections principales* nt_1, nt_2 *de* Σ, *aux centres de courbure principaux non correspondants* C_2, C_1.

16. On projette du centre O de la surface Σ la parabole (n_1, t_2, t_1, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, $\mu\sigma$) et l'on prend, par rapport au cône asymptote de Σ, le cône polaire réciproque du cône obtenu par projection. Le cône polaire réciproqne a pour génératrices les parallèles p, t'_1, t'_2 menées par O aux droites n, t_1, t_2, les axes de symétrie $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ et le diamètre d. Par suite, on a

$$(\mathrm{M}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{S}) \barwedge (p, t'_1, t'_2, \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta, d).$$

Le faisceau $\alpha\beta(p, t'_1, t'_2, \beta\gamma, \gamma\alpha, d)$ est coupé par la droite n suivant la ponctuelle (S, T'_1, T'_2, B, A, M) et l'on a

$$(\mathrm{M}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{S}) \barwedge (\mathrm{S}, \mathrm{T}'_1, \mathrm{T}'_2, \mathrm{B}, \mathrm{A}, \mathrm{M});$$

par suite, les couples MS, AB, $\mathrm{C}_1\mathrm{T}'_1$, $\mathrm{C}_2\mathrm{T}'_2$ sont conjugués dans une même involution.

Les plans menés par l'axe de symétrie $\alpha\beta$, *parallèlement aux tangentes principales* t_1, t_2 *au point* M *de la quadrique* Σ *coupent la normale en ce point, aux points* T'_1, T'_2. *Si* C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux au point* M *de* Σ, *les couples* $\mathrm{C}_1\mathrm{T}'_1$, $\mathrm{C}_2\mathrm{T}'_2$, AB *sont conjugués dans une involution ayant pour point central le point* M.

Remarque. — Les points T'_1, T'_2 sont identiques aux points C''_1, C''_2 rencontrés au n° 6. De là une détermination géométrique des points C''_1, C''_2.

17. Le cône (p, t'_1, t'_2, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, d) est coupé par le plan μ suivant l'hyperbole équilatère ($\mathrm{P}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{A}'', \mathrm{B}'', \mathrm{M}$) et l'on a

$$(\mathrm{M}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{S}) \barwedge (\mathrm{P}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{A}'', \mathrm{B}'', \mathrm{M}).$$

Mais (16)

$$(\mathrm{M}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{S}) \barwedge (\mathrm{S}, \mathrm{T}'_1, \mathrm{T}'_2, \mathrm{B}, \mathrm{A}, \mathrm{M});$$

par suite,

$$(P, T_1, T_2, A'', B'', M) \,\overline{\wedge}\, (S, T'_1, T'_2, B, A, M)$$

et les droites PS, $T_1T'_1$, $T_2T'_2$, $A''B$, $B''A$ sont des rayons d'un même système réglé.

Soient p la perpendiculaire abaissée du centre O *de la quadrique* Σ *sur le plan* μ *tangent en* M; A'', B'' *les traces des axes de symétrie* $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ *sur le plan* μ. *Les trois droites* p, AB'', $A''B$ *déterminent un système réglé* (p, AB'', $A''B$, ...) *dont deux rayons sont parallèles aux tangentes principales* t_1, t_2. *Le rayon parallèle à* t_1 *coupe la normale* n *en un point* T'_1 *homologue du centre de courbure* C_1 *dans l'involution* ($M\infty$, AB).

18. On a (6)

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \,\overline{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, B, C, S).$$

Le cône (n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) est coupé par le plan de symétrie α suivant l'hyperbole équilatère (A, T''_1, T''_2, M_1, M_2, M_3, O) et le faisceau

$$O(A, T''_1, T''_2, M_1, M_2, M_3)$$

détermine sur la droite AM_1 la ponctuelle

$$(A, O''_1, O''_2, M_1, C', B').$$

Les parallèles à l'axe de symétrie $\beta\gamma$ menées respectivement par les points A, O''_1, O''_2, M_1, C', B' sont coupées par la normale suivant la ponctuelle

$$(A, O_1, O_2, M, C, B)$$

projective à

$$(M, C_1, C_2, A, B, C);$$

par suite les couples AM, BC, O_1C_1, O_2C_2 sont en involution.

Les plans projetant de l'axe de symétrie $\beta\gamma$, *les traces* T''_1, T''_2 *des tangentes principales* t_1, t_2 *sur le plan de symétrie* α, *coupent la normale* n *en deux points* O_1, O_2 *conjugués respectifs des centres de courbure* C_1, C_2 *dans l'involution* (MA, BC).

19. On mène par le point A une parallèle à l'axe $\alpha\gamma$, elle coupe l'axe $\alpha\beta$ au point U ; on mène par le point M_1 une parallèle à l'axe $\alpha\beta$, elle coupe l'axe $\alpha\gamma$ au point V. La propriété involutive du quadrangle complet, ayant pour sommets les points U, V et les points à l'infini sur les axes $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, montre que le point $S'_1 \equiv (AM_1, UV)$ est le point central de l'involution $(AM_1, B'C')$; par suite la parallèle menée par le point S'_1 à l'axe $\beta\gamma$ coupe la normale n au point central S_1 de l'involution (AM, BC). Ainsi :

Le plan mené par le point A *parallèlement au plan de symétrie* γ *coupe le plan de symétrie* β *suivant une droite* u ; *le plan mené par le point* M *parallèlement au plan de symétrie* β *coupe le plan de symétrie* γ *suivant une droite* v. *Le plan* uv *détermine sur la normale* n *le point central* S_1 *de l'involution* (MA, BC, O_1C_1, O_2C_2).

20. Si, dans les raisonnements du n° 18, on substitue le point T''_1 au point O comme sommet du faisceau de rayons, on obtient la propriété suivante :

Par la trace du plan tangent en M *sur le plan de symétrie* α, *on mène un plan parallèle à l'axe de symétrie* $\beta\gamma$; *ce plan coupe la normale en un point* R *conjugué du centre de courbure* C_2 *dans l'involution* $(AM, O_1\infty)$. *Par la trace* T''_1 *de la tangente principale* t_1 *sur le plan de symétrie* α, *on mène un plan* *parallèle au plan de symétrie* β, *coupant suivant une droite* u' *le plan mené par* A *parallèlement au plan de symétrie* γ. *Le plan mené par* T''_1 *parallèlement à* γ *coupe suivant une droite* v' *le plan mené par* M *parallèlement à* β. *Le plan* $u'v'$ *coupe la normale* n *au conjugué du centre de courbure* C_1 *dans l'involution* (AM, $O_1\infty$, C_2R).

21. On a (6)

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \bar{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d).$$

Les plans menés par les points C_1, C_2, A, B perpendiculairement à la normale n coupent le diamètre d aux points D_1, D_2, D_a, D_b. Si D désigne le point à l'infini du diamètre d, on a

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b, D) \bar{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d);$$

par suite, la normale n, les parallèles t'_1, t'_2, a', b' aux droites t_1, t_2, m_1, m_2, menées respectivement par les points D_1, D_2, D_a, D_b, appartiennent à un même système réglé. Le plan nt_1 contient la directrice t''_1 de ce système, parallèle au rayon t'_1 ; le point (nt'_1) situé dans le plan $t'_2t''_1$ normal à n est nécessairement sur la perpendiculaire menée du point D_2 à cette droite n; par suite le point (nt''_1) est identique à C_2. De même par le point C_1 passe une directrice t''_2 du système réglé $(a', b', n, \ldots)$ parallèle à t'_2.

Par les points A, B, *on mène des plans perpendiculaires à la normale* n, *rencontrant le diamètre* d *issu de* M *en deux points* D_a, D_b. *Par ces points on mène les droites* a', b' *respectivement normales aux plans* α, β. *Les directrices du système réglé* $(a'b'n)$ *menées par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *sont respectivement parallèles aux tangentes* *principales non correspondantes* t_2, t_1. (MANNHEIM, *Journal de Liouville*, 5e série, t. II, p. 51.)

22. Les directrices a'', b'' du système réglé $(a'b'n)$ respectivement parallèles à a' et b' coupent la normale n aux points A_n, B_n situés respectivement dans les plans menés par les points D_b, D_a normalement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$. Si n' désigne la directrice parallèle à n, on a

$$(n, t'_1, t'_2, a', b') \overline{\wedge} (n', t''_1, t''_2, a'', b'')$$

ou

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b) \overline{\wedge} (\infty, C_2, C_1, A_n, B_n).$$

Mais

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b) \overline{\wedge} (M, C_1, C_2, A, B),$$

donc

$$(\infty, C_2, C_1, A_n, B_n) \overline{\wedge} (M, C_1, C_2, A, B),$$

et les couples $M\infty$, AA_n, BB_n, C_1C_2 sont en involution; par suite,

$$MC_1.MC_2 = MA.MA_n = MB.MB_n.$$

On désigne par D_b *la trace du diamètre d issu de* M *sur le plan mené par* B *perpendiculairement à la normale n; par* A_n *celle de la droite n sur le plan mené par* D_b *normalement à l'axe* $\alpha\beta$. *Le produit des rayons de courbure principaux au point* M *est égal au produit* $MA.MA_n$.

23. Dans le cas d'une quadrique Σ à centre, soient p la distance de ce point au plan tangent en M; P_a, P_b, P_c les carrés des demi-axes, on a (22)

$$MC_1.MC_2 = \frac{MA_n}{p} MA.p = P_a \frac{MA_n}{p},$$

$$\frac{MA_n}{MC} = \frac{MD_b}{MO}, \qquad MA_n = \frac{MC.p.MD_b}{p.MO} = P_c \frac{MD_b}{p.MO},$$

$$\frac{MD_b}{MO} = \frac{MB}{p} = \frac{P_b}{p^2};$$

par suite,

$$MC_1 . MC_2 = \frac{P_a P_b P_c}{p^4},$$

formule de Dupin.

24. Dans le cas du paraboloïde, on a

$$MC_1 . MC_2 = MA . MA_n,$$
$$MD_b = MA_n \cos\theta, \qquad MB = MD_b \cos\theta,$$

θ désignant l'angle de la normale n avec l'axe de symétrie; par suite,

$$MC_1 . MC_2 = \frac{MA . MB}{\cos^2\theta}.$$

Mais si $2a$, $2b$ désignent les paramètres principaux du paraboloïde, on a

$$MA \cos\theta = b, \qquad MB \cos\theta = a;$$

donc

$$MC_1 . MC_2 = \frac{ab}{\cos^4\theta},$$

formule connue.

25. Les plans polaires du point M par rapport à Σ, Σ_1, Σ_2, (α), (β), (γ), (σ) forment un faisceau du troisième ordre :

$$[\mu \equiv (t_1, t_2), \mu_1 \equiv (nt_2), \mu_2 = (nt_1), \alpha, \beta, \gamma, \sigma],$$

projectif à la ponctuelle

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S).$$

L'axe de symétrie $\alpha\beta$ de la quadrique Σ est un axe de ce faisceau, il est coupé par les plans μ, μ_1, μ_2, γ, σ suivant la ponctuelle $(C'', X_2, X_1, O, \infty)$ projective à la ponctuelle (M, C_1, C_2, C, S); donc les rayons MC'', CO, $S\infty$, C_1X_2, C_2X_1 appartiennent à un même système réglé.

Le plan tangent μ *et la normale* n *en un point* M *d'une quadrique* Σ *de centre* O *rencontrent respectivement l'axe de symétrie* $\alpha\beta$, *et le plan de symétrie* γ *aux points* C'' *et* C. *Le paraboloïde circonscrit au quadrique gauche* $MC''OC$ *est tangent aux sections principales* nt_1, nt_2 *aux centres de courbure principaux non correspondants* C_2, C_1.

26. En se reportant aux notations du n° 4, au point Q de la ponctuelle (M, C_1, C_2, ...) correspond dans le faisceau (μ, μ_1, μ_2, ...) le plan polaire μ'' du point M par rapport à la quadrique Σ'. Ce plan μ'' coupe $\alpha\beta$ en un point M'' et la droite QM'' est un rayon du système réglé (MC'', CO, $S\infty$, ...).

Soient t, t' *deux tangentes conjuguées au point* M *de la quadrique* Σ; Q *le point central sur la génératrice* n *de la normalie tangente à* t' *au point* M; Σ' *la quadrique homofocale à* Σ *et tangente à* t. *Le plan tangent au point* Q *au paraboloïde* ($MC''OC$) (25) *et le plan polaire du plan* M *relativement à* Σ' *coupent l'axe de symétrie* $\alpha\beta$ *au même point.*

27. La droite à l'infini du plan de symétrie α est un axe du faisceau du troisième ordre; il est coupé par les plans μ, μ_1, μ_2, β, γ suivant la ponctuelle

$$(H, H_1, H_2, B''', C''')$$

projective à la ponctuelle (M, C_1, C_2, B, C); donc les rayons MH, BB''', CC''', C_1H_1, C_2H_2 appartiennent à un même système réglé. Ainsi :

Le trièdre $\mu\mu_1\mu_2$ *est coupé par un plan mené par* *le point* M *parallèlement au plan de symétrie* α *suivant trois droites* s, s_1, s_2. *Les droites menées par les points* M, B, C, *respectivement parallèles à la droite* s, *à l'axe de symétrie* $\alpha\beta$ *et à l'axe de symétrie* $\alpha\gamma$, *déterminent un système réglé dont deux rayons sont parallèles aux droites* s_1, s_2. *Ces rayons coupent la normale* n *aux centres de courbure principaux* C_1, C_2 *de* Σ.

28. On a (6)

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \overline{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d).$$

Les plans menés par les points C_1, C_2, A, B perpendiculairement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$ coupent le diamètre d aux points D'_1, D'_2, D'_a, D'_b et l'on a

$$(M, D'_1, D'_2, D'_a, D'_b, D) \overline{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d);$$

par suite, la normale n, les parallèles t'_1, t'_2, m'_1, m'_2 aux droites t_1, t_2, m_1, m_2 menées respectivement par les points D'_1, D'_2, D'_a, D'_b appartiennent à un même système réglé. Le plan Am'_1 renferme une directrice b_1 de ce système; elle passe par A et est parallèle à m'_2. De même une directrice a_1 parallèle à m'_1 passe par B. Donc :

Les directrices du système réglé (a, b, d) (6) *perpendiculaires à la normale* n *sont parallèles aux tangentes principales* t_1, t_2; *elles rencontrent le diamètre* d *en deux points* D'_1, D'_2 *situés dans les plans menés par les centres de courbure principaux perpendiculairement à l'axe de symétrie* $\alpha\beta$.

29. On suppose que la quadrique Σ ait trois plans de symétrie α, β, γ (2). Par les points C_1, C_2, A, B, C, S on mène des plans parallèles au plan de symétrie α; ils coupent m_1 aux points C'_1, C'_2, A', B', C', S'. Le cône $(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d)$ est coupé par le plan α suivant la ponctuelle du second ordre $(A, T_1, T_2, A', M_2, M_3, O)$ en désignant par O le centre de la surface Σ.

De la projectivité

$$(M, C'_1, C'_2, A', B', C', S') \overline{\wedge} (A, T_1, T_2, A', M_2, M_3, O),$$

on déduit que les droites MA, C'_1T_2, C'_2T_2, $B'M_2$, $C'M_3$, OS' font partie d'un même système réglé. Le plan $BB'M_2$ renferme une directrice c_1 de ce système; elle passe par B et est parallèle à $C'M_3$. De même une directrice b_1 parallèle à $B'M_2$ passe par le point C.

Par les points B *et* C *on mène des perpendiculaires* c_1 *et* b_1 *respectivement sur les plans de symétrie* γ *et* β. *La trace* $\mu\alpha$ *du plan tangent en* M *sur le plan* α *rencontre le système réglé* (b_1, c_1, m_1) *en deux points* T_1, T_2 *situés respectivement sur les tangentes principales* t_1, t_2. *Les directrices de ce système réglé passant par* T_1, T_2 *rencontrent* m_1 *en deux points* C'_1, C'_2 *situés dans les plans projetant les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *parallèlement au plan* α.

30. On a (1)

$$(M, C_1. C_2, A, B, C, S) \overline{\wedge} (n_1, t_2, t_1, \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma);$$

par suite, les parallèles menées par les points C_1, C_2, A, B, C respectivement aux droites t_2, t_1, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ sont des rayons d'un système réglé. Ainsi :

Les plans parallèles au plan tangent en M *menés par les points* A, B, C *rencontrent les plans de symétrie correspondants* α, β, γ *suivant les droites* a_2, b_2, c_2. *Les rayons du système réglé* (a_2, b_2, c_2) *passant par les centres de courbure principaux* C_1,

C_2 *sont respectivement parallèles aux tangentes principales* t_2, t_1.

Le rayon s du système réglé (a_2, b_2, c_2) passant par M est une corde conjuguée du plan diamétral normal en M. Ce rayon peut remplacer c_2 dans la propriété précédente qui est alors applicable au paraboloïde.

31. Les rayons du système réglé (a_2, b_2, c_2) sont les conjuguées relativement aux quadriques homofocales à Σ, de la tangente s' en M à Σ, située dans le plan diamétral normal. Si des points de la tangente s conjuguée de s' on abaisse des perpendiculaires sur leurs plans polaires relatifs à Σ, ces perpendiculaires seront les directrices du système réglé. Les plans projetant d'une de ces directrices les points C_1, C_2 sont parallèles respectivement aux droites t_1, t_2 (30). Par suite :

Si s *est la tangente en* M *conjuguée au plan diamétral passant par la normale* n, X *sa trace sur le plan de symétrie* α, x *la perpendiculaire abaissée de* X *sur son plan polaire; les plans menés par* x *parallèlement aux tangentes principales* t_1, t_2 *passent respectivement par les centres de courbure* C_2, C_1.

32. Les rayons et les directrices du système réglé (a_2, b_2, c_2) sont projetés du centre O sur le plan μ suivant les tangentes à une conique. Cette conique est déterminée par les cinq tangentes s, s', $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$. Des génératrices du système réglé passant par C_1 et C_2 (31), on déduit :

La tangente s (31) *et sa conjuguée* s', *les traces des plans de symétrie sur le plan* μ, *déterminent une conique. Les diamètres* OC_1, OC_2 *de* Σ *ren-*

contrent la droite s' en deux points tels que les secondes tangentes menées de ces points à la conique sont parallèles respectivement aux tangentes principales t_2, t_1.

33. De la projectivité

$$(\mathrm{M}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{S}) \,\overline{\wedge}\, (n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d),$$

on déduit :

Une surface réglée du troisième ordre Σ_3, ayant pour cône directeur le cône (M) *du complexe des droites normales à leurs conjuguées, est déterminée par la directrice double n et les génératrices a, b, c. Les génératrices de Σ_3 passant par les centres de courbure principaux sont parallèles aux tangentes principales t_1, t_2.*

Remarque. — La génératrice à l'infini de la surface Σ_3 est dans le plan diamétral nd.

34. Les plans projetant les génératrices de Σ_3 normalement au plan α enveloppent un cylindre parabolique tangent au plan (an) le long de la génératrice m_1; la génératrice à l'infini de ce cylindre est dans le plan $m_1 d$. En coupant ce cylindre par le plan α, on a :

Soient t'_1, t'_2, M_1, d', b', C'_1, C'_2 les projections orthogonales sur le plan de symétrie α des éléments t_1, t_2, M, d, b, C_1, C_2; la droite d' est le diamètre d'une parabole tangente aux droites AM_1 et b' et passant par M_1. Les tangentes à cette parabole parallèles aux droites t'_1, t'_2 passent respectivement par les points C'_1, C'_2.

35. La section de la surface Σ_3 par un plan α_1 mené

par A normalement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$ se compose de la droite a et d'une conique (α_1) tangente en A au cône (M); ses directions asymptotiques sont b et l'intersection des plans α_1 et nd; la conique passe par le point (α_1, c). On a la construction suivante du plan tangent en A au cône (M) du complexe. Le rayon MA rencontre les faces du tétraèdre principal aux points A, B, C, S; on détermine le conjugué K du point M dans l'involution (AB, CS), la droite menée par K s'appuyant sur le couple d'arêtes opposées $\alpha\beta$, $\gamma\sigma$ du tétraèdre est dans le plan tangent cherché [1]. On en conclut :

Du conjugué de M *dans l'involution* (AB, C∞) *on abaisse une perpendiculaire k sur l'axe* $\alpha\beta$. *Dans le plan* α_1 *mené par* A *normalement à l'axe* $\alpha\beta$, *une conique* (α_1) *est déterminée par le point* A, *la tangente* k_1 *en ce point parallèle à* k, *le point* (α_1, c), *les directions asymptotiques* $\alpha\gamma$ *et* OC, O *étant le centre de la quadrique. Les plans des sections principales* nt_1, nt_2 *coupent cette conique en deux points dont les projections sur la normale* n *sont les centres de courbure principaux* C_1, C_2.

36. Si l'on coupe Σ_3 par un plan parallèle au plan nd on a la propriété suivante :

Un plan π *parallèle au plan diamétral normal* nd *est coupé par le plan* nk *et les droites* a, b, c *suivant une asymptote* n'' *et trois points* A'', B'', C'' *d'une hyperbole. Cette courbe est rencontrée par les plans principaux* nt_1, nt_2 *en deux points dont les projections sur la normale* n *sont les centres de courbure principaux* C_1, C_2.

---

[1] C. Servais, *Mathesis*, 1909, p. 5.

37. On coupe par le plan α les plans projetant les génératrices de Σ_3 parallèlement au diamètre d. Ces plans enveloppent un cylindre parabolique tangent au plan nd le long de la génératrice d. Par suite :

Les plans menés par les droites b, c parallèlement au diamètre d rencontrent le plan de symétrie α suivant les droites b'', c''. La parabole tangente aux droites OA, b'', c'' *et passant par le centre* O *de* Σ *a deux tangentes parallèles respectivement aux plans* Ot_1, Ot_2; *ces tangentes rencontrent* OA *en deux points situés sur les parallèles menées par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *au diamètre* d.

Remarque. — Cette propriété est applicable au paraboloïde, si, au lieu du plan α, on choisit un plan normal à l'axe $\beta\gamma$ du paraboloïde ; il suffit de remplacer O et A par les traces de d et n sur le plan sécant.

38. On coupe par le plan nt_1 les plans projetant les génératrices de Σ_3 parallèlement à t_2 ; on a la propriété :

La normale n et les projections orthogonales des droites a, b, c sur le plan principal nt_1 déterminent une parabole dont la directrice passe par le centre de courbure C_1.

Remarque. — Cette parabole est tangente à la normale n au point M, ce qui permet de supprimer la projection de c dans la détermination de la parabole; la propriété est alors applicable au paraboloïde.

39. *Construction des centres de courbure principaux* C_1, C_2 *d'une quadrique* Σ, *le centre* O *étant à distance finie ou infinie.* — Soient A′, B′, C′ les traces

des axes de symétrie $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sur le plan tangent en M ([1]); B'', C'' celle des droites MB', MC' respectivement sur les plans β et γ; B_a, C_a celles de l'axe $\beta\gamma$ sur deux plans, l'un mené par B'' normalement à la droite $A'C'$, l'autre mené par C'' normalement à la droite $A'B'$; a' la droite commune aux plans BOB', COC'; B''', C''' les points $(BC_a, B''B_a)$, $(CB_a, C''C_a)$. Le cône déterminé par les droites a', OB''', OC''', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ rencontre la normale n aux centres de courbure principaux C_1, C_2.

En effet, les perpendiculaires abaissées des points de la droite MB' sur leurs plans polaires appartiennent à un système réglé; la normale n, l'axe $\alpha\gamma$, la droite $B''B_a$ font partie de ce système. Les directrices du système réglé sont les conjuguées de la tangente en M parallèle à $A'C'$, relativement aux quadriques homofocales à la quadrique Σ. Les droites BO, CB_a sont les conjuguées de cette tangente par rapport aux coniques focales des plans β et γ. En considérant la tangente en M parallèle à $A'B'$, on aura un second système réglé (n, $\alpha\beta$, $C''C_a$,...) ayant pour directrices CO, BC_a. Ces deux surfaces ont une génératrice commune n et sont tangentes aux centres de courbure principaux C_1, C_2; elles se coupent donc suivant une cubique gauche passant par C_1, C_2. Les génératrices et les directrices qui précèdent donnent les points de la cubique

$$O,\quad B''',\quad C'''\quad (\alpha\gamma, C''C_a),\quad (\alpha\beta, B''B_a).$$

La tangente à la cubique au point O est l'intersection a' des plans BOB', COC' tangents en O aux deux paraboloïdes; par suite, le cône ayant pour génératrices a',

---

[1] Dans le cas d'un paraboloïde, le plan de symétrie α est à l'infini.

OB''', OC''', $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ est le cône de sommet O perspectif à la cubique; il passe par C_1 et C_2.

Remarque. — La droite à l'infini du plan mené par le diamètre BO parallèlement à la droite CB_a appartient au système réglé (n, $\alpha\gamma$, $B''B_a$); celle du plan mené par le diamètre CO parallèlement à la droite BC_a appartient au système réglé (n, $\alpha\beta$, $C''C_a$); par suite, la droite commune à ces deux plans est une génératrice du cône (O).