Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 186-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__186_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Grenoble.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène, pesante, infiniment mince, a pour masse* M, *les longueurs de ses côtés sont* $2a$ *et* $4a$.

1° *Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie, relatif au centre* O *de la plaque, rapportée à des axes rectangulaires* $Oxyz$, Ox *étant parallèle aux plus grands côtés et* Oy *aux plus petits.*

2° *A un instant où la plaque est immobile et horizontale,* *on lui applique, au sommet de coordonnées* $x = 2a$, $y = a$, *une percussion verticale, dirigée vers le haut, d'intensité* MV. *Trouver la distribution des vitesses immédiatement après la percussion. On prendra pour inconnues les projections (sur* Ox, Oy, Oz*)* ξ_1, η_1, ζ_1 *de la vitesse de* O *et celles* p_1, q_1, r_1 *de la vitesse de rotation de la plaque.*

3° *Après la percussion, la plaque se meut comme un solide pesant libre; son mouvement par rapport à des axes* $Ox_1y_1z_1$ *de directions fixes menés par* O *est donc un mouvement à la Poinsot. Déterminer les éléments suivants de ce dernier mouvement :*

Force vive.

Grandeur du moment résultant des quantités de mouvement (moment par rapport à O*).*

Équation du cône roulette mobile (rapportée à $Oxyz$*).*

Expression (sous forme d'intégrale définie) de la période du mouvement. Vérifier que cette période est inversement proportionnelle à $\frac{V}{a}$.

(Juillet 1912.)

Clermont.

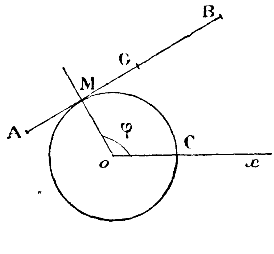
Epreuve théorique. — *Une tige* AOA', *de masse négligeable et de longueur* $2a$ *peut pivoter autour de son milieu* O. *Deux disques circulaires identiques, d'épaisseur négligeable, de rayon* $\frac{a}{2}$ *et de masse commune* M, *admettent cette tige pour axe. Le centre* C *de l'un d'eux est au milieu de* OA. *Le centre* C' *de l'autre est à la distance* x *de* O *entre* O *et* A'. *Un point* B *situé sur la verticale du point* O, *à une distance* a *au-dessus de celui-ci, attire* A *suivant une force égale à* k.AB, k *désignant un coefficient donné. Le point* B' *symétrique de* B *par rapport à* O *attire* A' *suivant la même force. Le corps solide formé par les disques et la tige est lancé, à partir d'une position quelconque, avec une vitesse angulaire* ω *autour de* AA'. *Étudier le mouvement ultérieur. Discuter suivant la valeur de* x.

On montrera en particulier qu'en aucun cas le mouvement de précession et le mouvement de rotation propre ne *changent de sens dans la durée du mouvement. On étudiera les variations de vitesses angulaires de ces deux mouvements. Enfin, on prouvera que, pour une certaine valeur de x, le système est en équilibre indifférent.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène, d'épaisseur négligeable, de dimensions a et $2a$, de masse m, peut tourner autour d'un axe vertical suivant le petit côté* AB. *Le frottement développe un couple résistant égal à $f\omega$, en appelant ω la vitesse angulaire et f un coefficient numérique. En outre, l'air, supposé au repos, oppose à chaque élément d'aire dS de la plaque une résistance normale égale à $k.dS.v^2$, en appelant v la vitesse de cet élément.*

La plaque étant supposée lancée avec une vitesse angulaire initiale ω_0, déterminer son mouvement ultérieur. Calculer en particulier l'angle total θ dont tourne la plaque. Étudier les variations de θ en fonction de ω_0. Montrer comment on pourrait déduire le coefficient f de la courbe représentative de ces variations et comment on pourrait ensuite calculer k en se bornant à considérer des petites valeurs de ω_0. (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne un cercle* C, *de centre* O *et de rayon* R, *et une barre homogène* AB, *de longueur* $2l$,



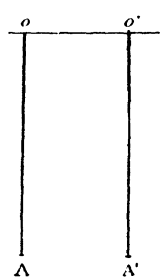
assujettie à rester tangente au cercle, sur lequel elle peut glisser sans frottement.

Chaque élément de la barre est attiré par le point O *proportionnellement à sa masse et à sa distance à ce point.*

1° *Les conditions initiales étant quelconques, calculer,* *à des quadratures près, la position de la barre à l'époque t.* $\Big[$*On prendra comme paramètre l'angle polaire* φ *du point* M *et la mesure algébrique* λ *du vecteur* MG (G *étant le milieu de* AB) *sur la demi-droite d'angle polaire* $\varphi + \frac{\pi}{2}\Big]$.

2° *Étudier le mouvement dans le cas particulier où la barre est primitivement au repos. Trouver dans ce cas la relation entre* λ *et* φ. *Calculer la position du centre instantané de rotation de la barre, en fonction de* λ *ou de* φ. *Construire la courbe roulette et la courbe base. Calculer l'aire balayée par le rayon vecteur* OG *en fonction de l'aire balayée par* OM. *Quelle est la valeur de cette aire pour une oscillation simple de la barre, en supposant* $l = 3R$ *et* $\lambda_0 = 2R$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux tiges homogènes identiques* oA, $o'A'$, *de longueur* l, *peuvent osciller librement (et sans frottement) dans le même plan vertical* V, *autour de*



leurs extrémités respectives o *et* o', *situées sur une même horizontale, à la distance* $a < l$. *On écarte* $o'A'$ *vers la droite d'un angle* θ *et on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur. Si l'angle* θ *a été choisi assez grand,* $o'A'$ *vient choquer* oA. *Immédiatement après le choc, on amène le centre d'oscillation* o' *un peu en avant du plan* V, *afin que les deux tiges ne puissent plus se rencontrer.*

Cela posé, on suppose les deux tiges parfaitement polies et parfaitement élastiques et l'on demande de calculer les *amplitudes des oscillations que prennent les deux tiges. Peut-on toujours choisir θ de manière que ces amplitudes soient égales? Calculer une telle valeur de θ dans l'hypothèse suivante :*

$$l = 1^{\text{m}}, \qquad a = 0^{\text{m}},45;$$

ainsi que la valeur commune des amplitudes.

(Juin 1913.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Choc des solides. On étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Paramètre de percussion d'une droite;*

2° *Variation de la force vive totale d'un solide libre sous l'action d'une percussion;*

3° *Perte de force vive dans le choc de deux solides libres.*

II. Problème. — *Appliquer la méthode de Jacobi à l'étude du mouvement d'un point matériel rapporté à des coordonnées polaires de l'espace* (ρ, θ, φ) *et soumis à l'action d'une force dérivant de la fonction d'énergie potentielle*

$$U = A(\rho) + \frac{B(\theta)}{\rho^2} + \frac{C(\varphi)}{\rho^2 \sin^2\theta},$$

A, B, C *étant chacune une fonction donnée de l'argument indiqué.*

Après avoir ramené le problème à des quadratures, on précisera la nature de ces quadratures dans le cas particulier où l'on a

$$A(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad B(\theta) = \beta \cot^2\theta, \qquad C(\varphi) = \gamma \sin^2\varphi,$$

α, β, γ *étant des constantes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un cerf-volant est en équilibre sous l'action du vent, de son poids et de la tension de la ficelle de retenue. La ficelle débitée, du point d'attache à la main, est de* 200^{m}. *La tension à la main, estimée à* *l'aide d'un peson, est inclinée à* 30° *sur l'horizon et équivaut à un poids de* 50^{m} *de ficelle. On néglige l'action du vent sur la ficelle. Calculer la hauteur du cerf-volant au-dessus de la main.*

II. *Détermination expérimentale du moment d'inertie* I *d'un solide* S *par rapport à une droite* Δ *et de la distance* a *du centre de gravité* G *de ce solide à cette même droite.*

1° *On mesure la durée* t *des petites oscillations du solide* S *autour de l'axe* Δ *placé horizontalement.*

2° *Après avoir invariablement fixé à* S *un deuxième solide* S', *de façon que le centre de gravité* G' *de ce dernier soit dans le plan* (Δ, G), *on mesure la durée* t' *des petites oscillations du système invariable* (S, S') *autour du même axe* Δ *placé encore horizontalement.*

Cela fait, on demande de calculer I *et* a, *connaissant, outre* t *et* t', *les poids* P *et* P' *de* S *et* S', *la distance* a' *de* G' *à* Δ *pendant la deuxième expérience et le moment d'inertie* I' *de* S' *par rapport à l'axe* Δ' *mené par* G' *parallèlement à* Δ.

Donnés numériques :

$$P = 20^{\text{kg}}, \qquad P' = 10^{\text{kg}}, \qquad a' = 1^{\text{m}},5, \qquad I' = 0,1,$$
$$t = 0^{\text{s}},9, \qquad t' = 1^{\text{s}},1.$$

(Juin 1912).