J. F. RITT

Note sur la fonction $\sin[(n+1)\, arc \cos x]$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 184-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__184_1>

[D1]

NOTE SUR LA FONCTION $\sin[(n+1)\,\mathrm{arc}\cos x]$;

PAR M. J. F. RITT.

En cherchant une valeur approchée du terme $n^{\text{ième}}$ du développement, suivant les puissances de t, de la fonction

$$[1-(x+t)^2]^{n+\frac{1}{2}} = (1-x-t)^{n+\frac{1}{2}}(1+x+t)^{n+\frac{1}{2}}$$

(*Nouvelles Annales*, novembre 1913), M. J. Malaise s'est servi d'un théorème de M. Darboux qui n'est point applicable à cette fonction.

Ayant fait la substitution

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-\alpha)^k\Phi(z) + \psi(z) \\ &= \left[\Phi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\Phi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!}\Phi^p(\alpha)\right](z-\alpha)^k, \end{aligned}$$

où l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$, M. Malaise donne, pour la valeur a'_n, approchée du coefficient de z^n

de $f(z)$,

$$(1)\left\{\begin{aligned}\alpha^{k-n}a'_n = {} & \Phi(\alpha)(-1)^n\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}\\ & +\alpha\Phi'(\alpha)(-1)^{n+1}\frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{n!}\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\alpha^{p-1}(-1)^{n+p-1}\\ & \quad\times\frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{n!}\,\frac{\Phi^{p-1}(\alpha)}{(p-1)!},\end{aligned}\right.$$

formule différente de celle de M. Darboux, mais encore incorrecte. Cependant, elle nous donnera la valeur de $\alpha^{n-k}a'_n$, a'_n étant le coefficient de z^n de

$$\left[\Phi(\alpha)+\frac{z-\alpha}{1}\Phi'(\alpha)+\ldots+\frac{(z-\alpha)^p}{p!}\Phi^p(\alpha)\right](\alpha-z)^k.$$

Ainsi en développant la fonction $\left[1-(x+t)^2\right]^{n+\frac{1}{2}}$, on trouve, avec M. Malaise,

$$\begin{aligned}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n\Big[& 2^{\frac{1}{2}}(2n+1)\ldots3(1-x)^{\frac{1}{2}}\\ & -2^{-\frac{1}{2}}(2n+3)(2n+1)\ldots5\,\frac{2n+1}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\ldots\Big].\end{aligned}$$

Le rapport d'un terme quelconque de (1) au précédent est de la forme

$$-\frac{\Phi^p(\alpha)}{p\,\Phi^{p-1}(\alpha)}\,\frac{k+p}{k+p-n}.$$

Si $\Phi^{p-1}(\alpha)$ et $\Phi^p(\alpha)$ sont du même ordre, et si k est fini, ce rapport sera de l'ordre de $\frac{1}{n}$ pour n très grand, et la partie principale de a'_n proviendra du premier terme de (1). Mais ici nous avons affaire à un cas fort différent. Ce qu'il ne faut pas oublier, c'est d'abord que k devient infini avec n, tandis que $k-n$ demeure fini, et de plus que, pour les valeurs finies de p, l'on introduit continuellement des facteurs de l'ordre de n dans les dérivées successives de $(1+x+t)^{n+\frac{1}{2}}$, de sorte que le rapport d'un terme au précédent sera de l'ordre de n^2. Il est donc évident qu'on ne peut pas poser

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}=(-1)^n 2^{\frac{1}{2}}(2n+1)(2n-1)\ldots 3\,(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

En effet, en comparant directement cette dernière équation avec celle d'Olinde Rodrigues,

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}=(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}\sin[(n+1)\arccos x],$$

on trouve, pour n très grand,

$$\sin[(n+1)\arccos x]=2^{\frac{1}{2}}(n+2)(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

résultat auquel doit équivaloir l'expression compliquée de M. Malaise, et dont l'impossibilité est manifeste.