Nouvelles annales de mathématiques

Michel Petrovitch

Quelques formes spéciales du théorème de la moyenne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 179-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__179_1>

[C2h]

QUELQUES FORMES SPÉCIALES DU THÉORÈME DE LA MOYENNE;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. Les valeurs de la fonction

$$\frac{(1+t^m)^p}{1+t^{mp}}, \tag{1}$$

où m et p sont deux nombres réels quelconques, ne sortent jamais en dehors de l'intervalle Δ compris entre 1 et 2^{p-1}, quelle que soit la valeur réelle positive ou nulle de t. On le voit soit directement sur l'expression (1), soit en posant

$$t^m = \operatorname{tang}^2 z, \tag{2}$$

ce qui transforme cette expression en

$$\frac{1}{\sin^{2p} z + \cos^{2p} z}. \tag{3}$$

Il s'ensuit que, u et v étant deux quantités réelles positives quelconques, la valeur de l'expression

$$\frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}} \tag{4}$$

est toujours comprise dans l'intervalle Δ. Les limites 1 et 2^{p-1} de cet intervalle seront atteintes lorsque l'une des quantités u et v est nulle, ou lorsque $u = v$.

Il s'ensuit de même que, u et v étant positifs, on a toujours

$$(5)\quad \log(u^m + v^m) = \frac{1}{p}\log(u^{mp} + v^{mp}) + \frac{p-1}{p}\theta\log 2,$$

$$(6)\quad \log(u^{mp} + v^{mp}) = p\log(u^m + v^m) - (p-1)\theta\log 2,$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

2. Soient u, v, w trois fonctions d'une variable x, réelles et positives dans un intervalle considéré de $x = a$ à $x = b$. D'après ce qui précède on aura

$$(7)\qquad (u^m + v^m)^p = (u^{mp} + v^{mp})\varpi,$$

ϖ étant une fonction de x, dont les valeurs, quel que soit x positif, sont comprises dans l'intervalle Δ. On en tire, par application du théorème de la moyenne commun, la proposition suivante :

Les trois fonctions u, v, w de la variable x étant réelles et positives dans l'intervalle (a, b), m et n étant deux constantes réelles quelconques, on a

$$(8)\qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^p\,dx = \lambda\left[\int_a^b w u^{mp}\,dx + \int_a^b w v^{mp}\,dx\right],$$

λ étant un coefficient compris entre 1 et 2^{p-1}.

Lorsque m est un entier pair, en désignant par $|a|$ la valeur absolue de la quantité réelle a, on aura, quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b),

$$(9)\qquad \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}} = \frac{\{|u|^m + |v|^m\}^p}{|u|^{mp} + |v|^{mp}} = \varpi$$

et l'égalité (8) devient

$$(10) \quad \int_a^b w(u^m + v^m)^p\, dx = \lambda\left[\int_a^b w|u|^{mp}\, dx + \int_a^b w|v|^{mp}\, dx\right];$$

elle est alors valable quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b).

En faisant $p = \frac{1}{m}$ l'égalité (8) devient

$$(11) \quad \int_a^b w(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}} dx = \lambda\left[\int_a^b w\, u\, dx + \int_a^b w\, v\, dx\right]$$

où, dans le cas de $m =$ entier pair, il faut remplacer dans le second membre u et v par $|u|$ et $|v|$.

De même en faisant $p = -\frac{1}{m}$ on aura

$$(12) \quad \int_a^b \frac{w\, dx}{(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}}} = \lambda\left[\int_a^b \frac{w\, dx}{u} + \int_a^b \frac{w\, dx}{v}\right]$$

avec la remarque précédente. Dans le cas particulier de $m = 2$ les égalités (11) et (12) deviennent

$$(13) \quad \int_a^b w\sqrt{u^2 + v^2}\, dx = \lambda_1\left[\int_a^b w\, u\, dx + \int_a^b w\, v\, dx\right],$$

$$(14) \quad \int_a^b \frac{w\, dx}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lambda_2\left[\int_a^b \frac{w}{u}\, dx + \int_a^b \frac{w}{v}\, dx\right],$$

où λ_1 est un coefficient compris entre

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots \quad \text{et} \quad 1.$$

et λ_2 un coefficient compris entre

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}3535\ldots \quad \text{et} \quad 1.$$

3. Ces formules permettent, par exemple, de comparer les intégrales du genre elliptique, hyperelliptiques. etc. à des intégrales de fonctions rationnelles.

Pour

$$w = 1, \qquad u = 1, \qquad v = y',$$

y étant une fonction de x croissante dans l'intervalle (a, b), la formule (13) fournit

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \lambda_1 [(b - a) - y(b) - y(a)], \tag{17}$$

et pour les fonctions y décroissantes

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \lambda_1 [(b - a) + y(a) - y(b)] \tag{18}$$

exprimant alors un théorème de la moyenne rattaché aux intégrales des arcs de courbes planes dont je m'occuperai ailleurs.

4. Les trois fonctions u, v, w étant réelles et positives dans l'intervalle (a, b), m et p étant des constantes réelles quelconques, l'égalité (5) conduit à

$$\begin{aligned}\int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx = \frac{1}{p}\int_a^b w \log(u^{mp} + v^{mp})\, dx \\ - \theta \frac{p-1}{p} \log 2 \int_a^b w\, dx\end{aligned} \tag{19}$$

ou bien à

$$\begin{aligned}\int_a^b w \log(u^{mp} + v^{mp})\, dx = p \int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx \\ - \theta(p - 1) \log 2 \int_a^b w\, dx,\end{aligned} \tag{20}$$

θ étant une valeur comprise entre 0 et 1. Pour $m =$ entier pair ces formules sont valables quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b) pourvu qu'on remplace dans les intégrales u et v par $|u|$ et $|v|$. *Ces formules expriment un théorème de la moyenne rattaché aux intégrales de la forme*

$$\int_a^b w \log(u^k + v^k)\, dx. \tag{21}$$

En prenant $p = \frac{1}{m}$ la formule (19) donne pour m réel quelconque

$$\int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx$$
$$= m \int_a^b w \log(u + v)\, dx + \theta\,(1 - m) \log 2 \int_a^b w\, dx,$$

où pour $m =$ entier pair on remplacera dans l'intégrale du second membre u et v par $|u|$ et $|v|$.

On en conclut, par exemple, que la différence entre l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)|\, d\theta$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\mathrm{P} + \mathrm{Q})\, d\theta,$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de la partie réelle et du coefficient de i dans $f(\rho e^{\theta i})$, *est comprise entre* $-\frac{1}{2}\log 2$ *et* 0 *quelle que soit la fonction analytique* $f(z)$ *considérée* (1). Je remarquerai en terminant que ce qui précède n'est qu'un cas particulier du

(1) *Voir* une autre forme du théorème de la moyenne dans ma Note *Théorème de la moyenne sans restriction* (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. XIII, septembre 1913).

fait plus général suivant, dont je développerai ailleurs les conséquences :

Les quantités x_i étant toutes réelles et positives et p étant une valeur réelle quelconque, on a

$$(x_1 + \ldots + x_n)^p = \theta(x_1^p + \ldots + x_n^p)$$

où θ est une quantité dont la valeur ne sort jamais en dehors des limites 1 et n^{p-1}.