Nouvelles annales de mathématiques

G. Milhaud

Limitation de l'erreur commise dans l'approximation d'une racine par la méthode des parties proportionnelles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 13-15
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__13_1>

[A3g]

LIMITATION DE L'ERREUR COMMISE DANS L'APPROXIMATION D'UNE RACINE PAR LA METHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES;

PAR M. G. MILHAUD,

Professeur au Lycée de Nîmes.

Je me propose dans cette Note d'indiquer une méthode qui me semble nouvelle pour limiter supérieurement l'erreur commise dans le calcul d'une racine d'une équation par la méthode des parties proportionnelles. La limite obtenue me paraît d'un calcul assez facile pour rendre des services dans la pratique.

Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation considérée possédant une racine x_1 dont a et b sont deux valeurs approchées $(a < x_1 < b)$. On sait que la méthode d'approximation revient à remplacer l'arc Γ de la courbe $y = f(x)$ par la corde AB joignant les points d'abscisses a et b. L'équation de AB peut s'écrire

$$y - f(a) = \mathrm{L}(x - a) \tag{1}$$

ou

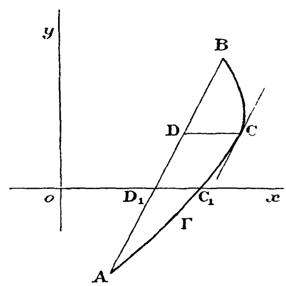
$$y - f(b) = \mathrm{L}(x - b), \tag{2}$$

avec

$$\mathrm{L} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Je suppose la fonction f développable dans l'intervalle (a, b) par la formule de Taylor jusqu'au terme en f'' inclusivement.

Si l'on considère l'ensemble de tous les segments rectilignes parallèles à l'axe des x et limités à la courbe Γ et à la corde AB, il existe en vertu des hypo-



thèses faites au moins un de ces segments, soit CD, plus grand que tous les autres et il rencontre la courbe en un point C où la tangente est parallèle à AB. On a par suite

$$f'(c) = \mathrm{L}.$$

CD donne une limite supérieure de l'erreur commise $C_1 D_1$.

L'abscisse d de D est donnée par

$$f(c) - f(a) = \mathrm{L}(d - a).$$

La limite supérieure est donc

$$\varepsilon = |c - d| = \left|\frac{f(a) - f(c)}{\mathrm{L}} - (a - c)\right|.$$

Mais

$$f(a) - f(c) = (a - c)f'(c) + \frac{(a-c)^2}{2} f''(\gamma),$$

γ étant un nombre compris entre a et c. On a donc

$$\varepsilon = \left| \frac{(a-c)^2}{2L} f''(\gamma) \right|.$$

En reprenant le même raisonnement en faisant jouer au nombre b le rôle de a et en prenant l'équation de la corde AB sous la forme (2), on obtient

$$\varepsilon = \left| \frac{(b-c)^2}{2L} f''(\delta) \right|,$$

δ désignant un nombre compris entre c et b.

Soit M un nombre supérieur ou égal à toutes les valeurs absolues de $f''(x)$ dans l'intervalle (a, b), on a

$$\varepsilon \leqq \frac{(a-c)^2}{2} \frac{M}{|L|}, \qquad \varepsilon \leqq \frac{(b-c)^2}{2} \frac{M}{|L|},$$

et comme l'un des nombres $|a-c|$, $|b-c|$ ne dépasse pas $\left|\frac{b-a}{2}\right|$, on a en définitive

$$\varepsilon \leqq \frac{(b-a)^2 M}{8|L|} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon \leqq \frac{(b-a)^3}{8} \frac{M}{|f(b)-f(a)|}.$$

Telle est la formule que je me proposais d'établir. En remplaçant L par sa valeur $f'(c)$, on montre que l'erreur est du même ordre que $(b-a)^2$.

J'observe, en terminant, que contrairement à ce qui se passe dans la limitation de l'erreur dans la méthode de Newton, cette limite supérieure peut être égale exactement à l'erreur commise, puisque, dans des cas très particuliers, les inégalités peuvent toutes se changer en égalités. Ce mode de limitation semble donc *a priori* au moins aussi avantageux que n'importe quel autre.