NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XIV.

(LXXIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L¹19d]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. F. BALITRAND.

Nous nous proposons de démontrer analytiquement quelques propriétés des coniques homofocales énoncées par Laguerre (*Œuvres complètes*, t. 2, p. 569). Pour cela, nous ferons intervenir la parabole de Chasles qui paraît jouer un rôle important dans la théorie des coniques homofocales. Pour plus de clarté, nous conserverons entièrement les notations de Laguerre.

Étant donné un système de coniques homofocales, ayant pour axes Ox et Oy, pour foyers réels F et F', pour foyers imaginaires Φ et Φ', nous appellerons conique du système, toute conique ayant pour foyers les points F et F', Φ et Φ'.

Par un point quelconque M du plan passent deux coniques du système; soient N et N' les centres des cercles osculateurs de ces deux coniques, au point M, et μ la droite qui les joint. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F'; nous l'appellerons l'*axe du point* M.

Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, nous démontrerons qu'il existe, dans ce plan, trois points M, M′ et M″ pour lesquels elle est un axe.

Il existe une seule conique du système qui touche la droite μ. Nous désignerons par α et β les points où la normale au point de contact coupe les axes Ox et Oy.

Cela posé, nous rappellerons que les points N et N′ sont les points de contact de la parabole de Chasles relative au point M, avec les tangentes à cette parabole, issues de ce point.

L'équation ponctuelle de cette parabole (P), α et β désignant les coordonnées de M, est

$$(1)\qquad (\alpha x - \beta y - c^2)^2 + 4\alpha\beta x y = 0.$$

Son équation tangentielle, beaucoup plus simple, est

$$(2)\qquad c^2 uv + \beta u - \alpha v = 0.$$

Soient

$$(3)\qquad ux + vy - 1 = 0$$

l'équation de la droite μ, et

$$(4)\qquad vx - uy - c^2 uv = 0$$

l'équation de la normale à la conique du système qui touche la droite μ, au point de contact dont les coordonnées $(x_1\, y_1)$ sont

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = u\dfrac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2}, \\[2ex] y_1 = v\,\dfrac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2}. \end{cases}$$

En écrivant que le pôle de la droite μ, par rapport à la parabole de Chasles, coïncide avec le point (α, β), on a les relations

$$(6)\qquad \begin{cases} v\alpha^2 - u\alpha\beta - \beta - c^2 v = 0, \\ u\beta^2 - v\alpha\beta - \alpha + c^2 u = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations représentent, α et β désignant pour l'instant les coordonnées courantes, deux hyperboles ayant une direction asymptotique commune perpendiculaire à μ. Elles se coupent donc en trois points à distance finie seulement M, M′ et M″. Ainsi les points pour lesquels la droite μ est un axe sont à l'intersection de deux hyperboles :

La première passe par le point β, *par les foyers réels* F *et* F′ *et admet pour directions asymptotiques l'axe* Oy *et la direction perpendiculaire à* μ.

La seconde passe par le point α, *par les foyers* Φ *et* Φ' *et admet, pour directions asymptotiques, l'axe* Ox *et la direction perpendiculaire à* μ.

(Laguerre.)

Laguerre dit par erreur, *asymptotes*, au lieu de *directions asymptotiques*. Les asymptotes sont d'ailleurs faciles à mettre en évidence en écrivant les équations (6) sous la forme

$$u(u\alpha + 1)\left(v\alpha - u\beta - \frac{v}{u}\right) + v(1 - c^2u^2) = 0,$$
$$v(v\beta + 1)\left(v\alpha - u\beta + \frac{u}{v}\right) - (1 + c^2v^2) = 0.$$

Reprenons les équations (6) en désignant toutefois par x et y les coordonnées courantes. On vérifie aisément l'égalité suivante :

$$\alpha(vx^2 - uxy - y - c^2v) + \beta(uy^2 - vxy - x + c^2u)$$
$$= (\alpha x - \beta y + c^2)(vx - uy + \beta u - \alpha v),$$

pourvu que le point (α, β) soit un point commun M anx deux coniques. La droite qui a pour équation

$$\alpha x - \beta y + c^2 = 0 \tag{7}$$

représente alors la corde qui joint les deux autres points M' et M''. Elle est symétrique, par rapport à l'origine O, de la corde de contact de la parabole de Chasles (P), relative au point M, avec les axes Ox et Oy. Ainsi :

Le triangle $MM'M''$ *est symétrique, par rapport à l'origine* O, *du triangle formé par les cordes de contact, avec les axes* Ox *et* Oy, *des paraboles de Chasles* (P), (P') *et* (P''), *relatives à ses sommets.*

Soit $M_1 M'_1 M''_1$ le triangle formé par ces cordes de contact. Les foyers φ, φ' et φ'' des paraboles (P), (P') et (P'') s'obtiennent, soit en projetant les points M, M' et M'' sur la droite μ, soit en projetant l'origine O sur les trois cordes de contact. Donc les projections du point O sur les côtés du triangle $M_1 M'_1 M''_1$ sont en ligne droite, et il en est évidemment de même pour le triangle $M M' M''$. D'où ce théorème :

Les projections de l'origine O *sur les côtés du triangle formé par les points* M, M', M'', *pour lesquels la droite* μ *est un axe, sont sur une droite, symétrique de la droite* μ *par rapport à l'origine* O.

Nous appellerons μ_1 cette droite. On voit, d'après le théorème de Simpson, que le cercle circonscrit au triangle $M M' M''$ passe par l'origine O, et aussi qu'il existe une parabole, tangente à ses trois côtés, ayant pour foyer le point O et pour tangente au sommet la droite μ_1. Nous reviendrons plus loin analytiquement sur ces propriétés.

La droite

$$\alpha x - \beta y + c^2 = 0$$

est la polaire du point $M(\alpha\beta)$ par rapport à l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$x^2 - y^2 + c^2 = 0, \tag{8}$$

et que nous désignerons par (H). Ainsi :

Le triangle $MM'M''$ *est conjugué par rapport à l'hyperbole équilatère* (H) *qui a pour centre le point* O, *et dont l'axe transverse, dirigé suivant* Oy, *a pour longueur* FF'.

(LAGUERRE.)

Reprenons les équations (6). Multiplions la première par β, la seconde par u et ajoutons. Nous obtenons

$$\alpha^2 + \beta^2 + c^2(v\beta - u\alpha) = 0. \tag{9}$$

C'est l'équation du cercle circonscrit au triangle $O\alpha\beta$.

Multiplions la première des équations (6) par v, la seconde par u et retranchons. En tenant compte de (9), on a

$$\alpha^2 \frac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2} + \beta^2 \frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2} - c^4 = 0, \tag{10}$$

C'est l'équation d'une conique qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée de la conique (C) du système qui touche la droite μ. Nous la désignerons par (K). Ainsi :

Les points M, M' *et* M'' *sont à l'intersection du cercle* $O\alpha\beta$ *et de la conique qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée de la conique du système qui touche la droite* μ. *Le quatrième point commun à ces deux courbes est le point* O', *du cercle* $O\alpha\beta$, *diamétralement opposé au point* O. (LAGUERRE.)

Multiplions à nouveau la première des équations (6) par u, la seconde par v et ajoutons. Il vient

$$\alpha\beta + v\frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2}\alpha + u\frac{1 + c^2 v^2}{u^2 + v^2}\beta = 0$$

ou, en introduisant les coordonnées (x_1, y_1) du point de contact de la conique (C) du système, qui touche la droite μ, avec cette droite,

$$(11) \qquad \alpha\beta + \alpha y_1 + \beta x_1 = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère qui admet Ox et Oy pour directions asymptotiques, qui passe à l'origine, et qui a pour centre le symétrique du point (x_1, y_1) par rapport à l'origine O.

Si l'on désigne par O'_1 le symétrique du point O' par rapport à l'origine O, on peut encore dire que l'hyperbole précédente est l'hyperbole d'Apollonius du point O'_1 relativement à la conique (C). Ainsi :

Les points M, M′ *et* M″ *sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point* O'_1 *relativement à la conique* (C). *Le centre de cette hyperbole est le point de la conique* (C) *diamétralement opposé au point* (x_1, y_1).

Jusqu'ici le triangle MM′M″ a été défini par ses sommets; comme points d'intersection de deux coniques ayant, en dehors d'eux, un quatrième point commun connu. Mais on peut aussi le définir par ses côtés, qui seront alors les tangentes communes à deux coniques, ayant en outre une quatrième tangente commune connue à l'avance.

Si l'on observe que le triangle MM′M″ est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère (H), et par suite ne change pas, si l'on fait une transformation par polaires réciproques, en prenant cette hyperbole pour figure de référence, on voit que les transformées des coniques passant par les sommets fourniront des coniques tangentes aux côtés.

Analytiquement, cela revient à remplacer, dans les équations ponctuelles des coniques, α et β, supposées coordonnées courantes, par $-c^2\mathrm{U}$ et $c^2\mathrm{V}$; U et V désignant les coordonnées tangentielles courantes. Nous avons vu, en effet, que le côté $\mathrm{M'M''}$, polaire du point $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$, par rapport à l'hyperbole (H), a pour équation $\alpha x - \beta y + c^2 = 0$. Les coordonnées de cette droite sont donc

$$\mathrm{U} = -\frac{\alpha}{c^2}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\beta}{c^2}.$$

Cette transformation, appliquée au cercle (9), donne

$$\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{U}u + \mathrm{V}v = 0. \tag{12}$$

c'est l'équation tangentielle d'une parabole qui a pour foyer l'origine et pour tangente au sommet la tangente à la conique (C) au point diamétralement opposé au point (x_1, y_1).

Appliquée à l'hyperbole équilatère (11), cette même transformation donne

$$c^2\mathrm{UV} + y_1\mathrm{U} - x_1\mathrm{V} = 0. \tag{13}$$

c'est l'équation tangentielle de la parabole de Chasles du point (x_1, y_1) relativement à la conique (C). Ainsi :

Les côtés du triangle $\mathrm{MM'M''}$ *sont les tangentes communes à deux paraboles. La première a pour foyer l'origine et pour tangente au sommet, la tangente à la conique* (C) *au point diamétralement opposé au point* (x_1, y_1); *la seconde est la parabole de Chasles, du point* (x_1, y_1) *relativement à la conique* (C).

Appliquons encore cette transformation à la conique (10). Nous trouvons

$$(14) \qquad \frac{1+c^2v^2}{u^2+v^2}U^2+\frac{1-c^2u^2}{u^2+v^2}V^2-1=0,$$

qui n'est autre chose que l'équation tangentielle de la conique (C) elle-même. Les côtés du triangle MM′M″ touchent donc cette conique, et si la droite μ roule sur elle, les sommets du triangle décrivent la conique (K), pendant que les côtés enveloppent la conique (C) et que le triangle reste autopolaire par rapport à (H). Donc :

Le triangle formé par les trois points M, M′, M″ *qui ont pour axe une droite* μ *est : inscrit à la conique* (K), *circonscrit à la conique* (C), *autopolaire par rapport à l'hyperbole* (H). *Si la droite* μ *roule sur* (C), *le triangle varie; mais ses côtés et ses sommets jouissent toujours des mêmes propriétés relativement aux trois coniques.*

(Laguerre.)

La droite M′M″, qui a pour équation

$$\alpha x-\beta y+c^2=0,$$

est donc tangente à la conique (C). Les coordonnées de son point de contact sont faciles à trouver. En les désignant par ξ et η, on a

$$\xi=-\frac{1+c^2v^2}{u^2+v^2}\frac{\alpha}{c^2}, \qquad \eta=\frac{1-c^2u^2}{u^2+v^2}\frac{\beta}{c^2},$$

ou, si l'on fait intervenir les coordonnées du point (x_1, y_1),

$$\xi=-\frac{\alpha x_1}{c^2u}, \qquad \eta=\frac{\beta y_1}{c^2v}.$$

En tenant compte de la relation (11), on vérifie aisément qu'elles satisfont à l'équation

$$c^2 uvxy + uy_1^2 x - vx_1^2 y = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point (x_1, y_1) relativement à la conique (C). Ainsi :

Le triangle MM′M″ *est formé par les tangentes à la conique* (C) *aux pieds des normales à cette conique issues du point* (x_1, y_1).

C'est cette propriété qui nous paraît fournir la définition la plus nette du triangle des trois points qui ont pour axe une droite donnée.

Le triangle MM′M″ est encore susceptible d'une autre définition simple. A cet effet, appelons, avec Laguerre, *centre d'une droite* le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux axes Ox et Oy aux points où ils sont coupés par la droite et désignons par P et P′ le point (x_1, y_1) et le point qui lui est diamétralement opposé sur l'ellipse (C). Nous aurons le théorème suivant :

Le triangle MM′M″ *et le triangle formé par les centres des trois normales issues de* P, *à l'ellipse* (C), *sont symétriques par rapport à l'origine* O.

Les éléments remarquables du triangle MM′M″ sont aisés à déterminer. Nous avons déjà vu que le centre C du cercle circonscrit est au milieu de $\alpha\beta$.

Le centre des hauteurs H s'obtient en prolongeant OP′ d'une longueur égale. On a donc OH = 2 OP′.

En effet le point H se trouve sur la droite POP′, directrice de la parabole (13) inscrite au triangle MM′M″. Il se trouve également sur la parallèle à la tangente à l'ellipse (C) en P′ et à une distance double du centre, puisque cette parallèle est la directrice de la parabole (12) également inscrite à MM′M″.

Le centre de gravité G se trouve par cela même déterminé, et on l'obtient, soit en prenant l'intersection des droites HC et P′O′; soit en menant par O une parallèle à la normale en P jusqu'à sa rencontre avec HC. Mais le point ainsi obtenu coïncide avec le centre de gravité du triangle HOO′; d'où ce théorème :

Les triangles MM′M″ *et* HOO′ *ont même centre de gravité.*

Le centre du cercle des neuf points, ω, est au milieu de HC. Ce cercle passe par le point P′, puisque P′ est le centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à MM′M″. Il est donc complètement déterminé. Les coordonnées de ces quatre points sont les suivantes :

$$\mathrm{C}\left(\frac{c^2x_1}{2a^2}, -\frac{c^2y_1}{2b^2}\right), \qquad \mathrm{H}(-2x_1, -2y_1),$$

$$\mathrm{G}\left(-\frac{\mathrm{R}^2x_1}{3a^2}, -\frac{\mathrm{R}^2y_1}{3b^2}\right), \qquad \omega\left(-x_1+\frac{c^2x_1}{4a^2}, -y_1-\frac{c^2y_1}{4b^2}\right),$$

R désigne le rayon du cercle de Monge de l'ellipse (C).

Le triangle AA′A″, formé par les points de contact avec l'ellipse (C) des côtés du triangle MM′M″; c'est-à-dire le triangle des pieds des normales à l'ellipse (C) issues de P, jouit également de nombreuses propriétés. Mais comme les deux triangles sont polaires l'un de l'autre par rapport à la conique (C), les propriétés descriptives du premier ne sont que les transformées des propriétés correspondantes du second, nous nous contenterons de les énoncer.

On sait que les points A, A′, A″ sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point P et aussi sur un cercle, dit *cercle de Joachimsthal*, qui passe par le point P′ et par la projection du centre O sur la tangente en P′. Son équation est

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}x_1x-\frac{a^2}{b^2}y_1y-(a^2+b^2)=0.$$

Il rencontre le cercle de Monge de la conique (C) suivant un diamètre de cette conique.

Son centre est au milieu de la droite PO'_1.

En dehors de l'hyperbole d'Apollonius et du cercle de Joachimsthal, les points A, A', A'' sont sur une conique définie de la façon suivante :

Elle a pour centre le milieu de OP', *pour axes les parallèles à* Ox *et* Oy *menées par ce point; elle passe par le centre* O, *par le point* P' *et par les projections de ce dernier sur les axes* Ox *et* Oy.

Si, au lieu des sommets, on considère les côtés du triangle A A' A'', on trouve qu'ils peuvent être définis comme tangentes communes des courbes suivantes :

1° *Une parabole qui touche les axes* Ox *et* Oy *aux points où ils sont coupés par la tangente en* P' *à la conique* (C). *Cette parabole a pour foyer la projection de* O *sur la tangente en* P' *et pour directrice la droite* $O'O'_1$. *C'est la parabole de Chasles du point* O'_1.

2° *Une autre parabole qui touche les parallèles aux axes* Ox *et* Oy *menées par le pôle de la normale en* P *aux points où elles sont coupées par* OP. *Son foyer est à l'intersection de* OP *avec la perpendiculaire abaissée sur cette droite du pôle de la normale. C'est le réciproque de* P *par rapport au cercle de Monge. Son axe est parallèle à la droite symétrique de* OP *par rapport à* Ox.

3° *Une ellipse ayant même centre et même direction d'axes que l'ellipse* (C). *Les longueurs de ses axes sont* $\frac{a^3}{c^2}$ *et* $\frac{b^3}{c^2}$.

Enfin le triangle AA'A'' est conjugué par rapport à une hyperbole définie de la façon suivante :

Elle a même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse (C). *Ses sommets réels situés sur* Oy *ont pour ordonnées* $\pm \frac{b^2}{c}$.

Ces deux dernières coniques ont pour équations

$$\frac{c^4 x^2}{a^6} + \frac{c^4 y^2}{b^6} - 1 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{c^2 y^2}{b^4} + 1 = 0. \tag{16}$$

Elles sont indépendantes de (x_1, y_1). Donc :

Lorsque le point $P(x_1, y_1)$ *décrit l'ellipse* (C), *le triangle* $AA'A''$ *varie en restant inscrit à la conique* (C), *circonscrit à l'ellipse* (15), *conjugué par rapport à l'hyperbole* (16).

Les éléments remarquables de ce triangle se déterminent aisément. Nous avons vu que le centre du cercle circonscrit c_1 est au milieu de PO'_1. Le centre des hauteurs H_1 est à l'intersection de $O'O'_1$, directrice de la parabole de Chasles de O'_1, et de la droite menée par le pôle de la normale perpendiculairement à la droite symétrique de OP par rapport à Ox.

Le centre de gravité G_1 et le centre du cercle des neuf points se trouvent par cela même déterminés.

Les coordonnées de ces points sont les suivantes :

$$C_1\left(\frac{b^2 x_1}{2a^2}, \frac{a^2 y_1}{2b^2}\right), \qquad H_1\left(\frac{a^4+b^4}{a^2c^2}x_1, -\frac{a^4+b^4}{b^2c^2}y_1\right),$$

$$G_1\left(\frac{R^2 x_1}{3c^2}, -\frac{R^2 y_1}{3c^2}\right),$$

R désignant le rayon du cercle de Monge.

Ces formules et les formules analogues pour le triangle $MM'M''$ permettent de trouver les lieux décrits par les éléments remarquables de ces triangles, quand le point P décrit l'ellipse (C). On voit que tous ces lieux sont des ellipses ayant même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse (C).

[A3g]

LIMITATION DE L'ERREUR COMMISE DANS L'APPROXIMATION D'UNE RACINE PAR LA MÉTHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES;

Par M. G. MILHAUD,
Professeur au Lycée de Nîmes.

Je me propose dans cette Note d'indiquer une méthode qui me semble nouvelle pour limiter supérieurement l'erreur commise dans le calcul d'une racine d'une équation par la méthode des parties proportionnelles. La limite obtenue me paraît d'un calcul assez facile pour rendre des services dans la pratique.

Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation considérée possédant une racine x_1 dont a et b sont deux valeurs approchées ($a < x_1 < b$). On sait que la méthode d'approximation revient à remplacer l'arc Γ de la courbe $y = f(x)$ par la corde AB joignant les points d'abscisses a et b. L'équation de AB peut s'écrire

$$(1) \qquad y - f(a) = L(x - a)$$

ou

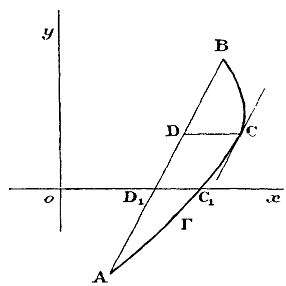
$$(2) \qquad y - f(b) = L(x - b),$$

avec

$$L = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Je suppose la fonction f développable dans l'intervalle (a, b) par la formule de Taylor jusqu'au terme en f'' inclusivement.

Si l'on considère l'ensemble de tous les segments rectilignes parallèles à l'axe des x et limités à la courbe Γ et à la corde AB, il existe en vertu des hypo-



thèses faites au moins un de ces segments, soit CD, plus grand que tous les autres et il rencontre la courbe en un point C où la tangente est parallèle à AB. On a par suite

$$f'(c) = \mathrm{L}.$$

CD donne une limite supérieure de l'erreur commise $C_1 D_1$.

L'abscisse d de D est donnée par

$$f(c) - f(a) = \mathrm{L}(d - a).$$

La limite supérieure est donc

$$\varepsilon = |c - d| = \left|\frac{f(a) - f(c)}{\mathrm{L}} - (a - c)\right|.$$

Mais

$$f(a) - f(c) = (a - c)f'(c) + \frac{(a - c)^2}{2} f''(\gamma),$$

γ étant un nombre compris entre a et c. On a donc

$$\varepsilon = \left| \frac{(a-c)^2}{2L} f''(\gamma) \right|.$$

En reprenant le même raisonnement en faisant jouer au nombre b le rôle de a et en prenant l'équation de la corde AB sous la forme (2), on obtient

$$\varepsilon = \left| \frac{(b-c)^2}{2L} f''(\delta) \right|,$$

δ désignant un nombre compris entre c et b.

Soit M un nombre supérieur ou égal à toutes les valeurs absolues de $f''(x)$ dans l'intervalle (a, b), on a

$$\varepsilon \leqq \frac{(a-c)^2}{2} \frac{M}{|L|}, \qquad \varepsilon \leqq \frac{(b-c)^2}{2} \frac{M}{|L|},$$

et comme l'un des nombres $|a-c|$, $|b-c|$ ne dépasse pas $\left|\frac{b-a}{2}\right|$, on a en définitive

$$\varepsilon \leqq \frac{(b-a)^2 M}{8|L|} \quad \text{ou} \quad \varepsilon \leqq \frac{(b-a)^3}{8} \frac{M}{|f(b)-f(a)|}.$$

Telle est la formule que je me proposais d'établir. En remplaçant L par sa valeur $f'(c)$, on montre que l'erreur est du même ordre que $(b-a)^2$.

J'observe, en terminant, que contrairement à ce qui se passe dans la limitation de l'erreur dans la méthode de Newton, cette limite supérieure peut être égale exactement à l'erreur commise, puisque, dans des cas très particuliers, les inégalités peuvent toutes se changer en égalités. Ce mode de limitation semble donc *a priori* au moins aussi avantageux que n'importe quel autre.

[I 13 b α]

SUR LES NOMBRES QUI SONT SOMMES DE DEUX CARRÉS;

Par un Anonyme.

Cette Note est relative à un fait bien connu, mais la distinction établie ici entre deux cas n'a peut-être pas été remarquée.

1. Un nombre naturel A est triangulaire si l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = \mathrm{A}, \qquad x^2 + x - 2\mathrm{A} = 0,$$

a ses racines entières; a et a' étant ces racines, on a

$$a + a' = -1;$$

l'une étant a, l'autre est $-(a+1)$. Si a est la racine positive ou nulle, le nombre a est la *base* du nombre triangulaire

$$\frac{a(a+1)}{2};$$

bien que ce nombre puisse encore s'écrire

$$\frac{-(a+1)\times -a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

on ne dit pas que le nombre négatif $-(a+1)$ est une base du nombre triangulaire considéré; de cette façon, on peut parler de la parité de la base d'un nombre triangulaire.

Ainsi, quand un nombre triangulaire se présente sous la forme $\frac{a(a+1)}{2}$, a étant négatif, il faut le mettre sous la forme

$$\frac{-(a+1)x-a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

et sa base est le nombre positif ou nul $a' = -(a+1)$.

Nous considérons zéro comme un nombre triangulaire de base zéro.

2. Soit N un nombre impair qui est somme de deux carrés,

$$N = a^2 + b^2 = (2h+1)^2 + (2k)^2.$$

Comme on a simultanément

$$N = a^2 + b^2, \qquad 2N = (a+b)^2 + (a-b)^2,$$

on peut écrire

$$2N = (2h+2k+1)^2 + (2h-2k+1)^2.$$

Si l'on pose

$$h+k = c, \qquad h-k = d,$$

de sorte que c et d sont deux nombres de même parité, on obtient

$$2N = (2c+1)^2 + (2d+1)^2,$$
$$2(N-1) = (4c^2+4c) + (4d^2+4d),$$
$$N = 4\left[\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2}\right] + 1.$$

Ainsi, dans l'égalité

$$N = 4n+1,$$

qui a lieu *a priori*, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2},$$

c et d étant de même parité. Mais d peut être négatif, et deux cas se présentent :

1° *Dans l'égalité* $N = a^2 + b^2$, *celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus grand;* on a

$$2h + 1 > 2k, \qquad 2h \geqq 2k, \qquad d \geqq 0;$$

alors, dans la formule $N = 4n + 1$, *le nombre n est la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d sont de même parité;* pour $h = k$, n est le nombre triangulaire de base $2k$ (l'autre nombre triangulaire étant o).

2° *Dans l'égalité* $N = a^2 + b^2$, *celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus petit;* on a

$$2h + 1 < 2k, \qquad 2h + 2 \leqq 2k, \qquad d \leqq -1;$$

en posant $d' = -(d + 1)$, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d'(d'+1)}{2},$$

de sorte que n est alors la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d' sont de parités différentes; pour $h = k - 1$, n est le nombre triangulaire de base $2k - 1$ (l'autre nombre triangulaire étant o).

Exemples :

$$29 = 5^2 + 2^2 = 4 \times 7 + 1, \qquad 7 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{1 \times 2}{2},$$

$$17 = 1^2 + 4^2 = 4 \times 4 + 1, \qquad 4 = \frac{2 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2}.$$

[O^1 1]

THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES FERMÉES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Appelons *élongation* d'une courbe ou d'une surface fermée le maximum de la distance de deux points de cette courbe ou de cette surface. J'établirai les théorèmes suivants :

1° *Toute courbe plane fermée d'élongation donnée* E *peut être enfermée dans un cercle de rayon au plus égal à* $\frac{E}{\sqrt{3}}$.

2° *Toute surface fermée, d'élongation donnée* E, *peut être enfermée dans une sphère de rayon égal au plus à* $\sqrt{\frac{3}{8}}$ E.

Par exemple, il résultera du premier théorème que, si l'on sait d'une contrée que la distance maximum de deux points de sa frontière est de 1000^{km}, on peut affirmer qu'il existe un point dont la distance à tous les points de cette frontière est au plus de $\frac{1000}{\sqrt{3}} = 577^{km}$.

2. Démontrons d'abord le premier théorème. Une courbe fermée plane C peut être définie analytiquement par deux équations :

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

t étant un paramètre qu'on peut supposer varier de 0 à 1, f et g étant deux fonctions continues dans cet intervalle et satisfaisant aux conditions :

$$f(0)=f(1), \qquad g(0)=g(1).$$

Si (α, β) est un point quelconque du plan, l'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ atteint un maximum $R(\alpha, \beta)$ pour un point (x, y) de la courbe C, et cette dernière est tout entière contenue (au sens large) à l'intérieur du cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2(\alpha, \beta).$$

$R(\alpha, \beta)$ est lui-même une fonction continue de α, β [1]. Ce rayon a donc un minimum R_0 atteint pour un certain point (α_0, β_0) du plan. R_0 est le rayon du plus petit cercle G_0 contenant C. Il faut montrer qu'on a

$$R_0 \leqq \frac{E}{\sqrt{3}},$$

E étant l'élongation de la courbe C.

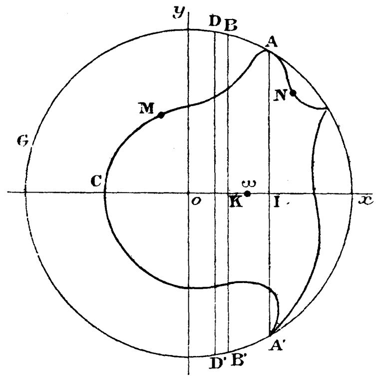
Considérons à cet effet un cercle G, de rayon R (*voir* la figure), contenant à son intérieur, au sens large, la courbe C. Supposons d'abord que les points communs à C et à G appartiennent tous à un arc AA′ de G, inférieur à une demi-circonférence. Je vais montrer qu'il existe un cercle G′, plus petit que G, et contenant C à son intérieur.

Prenons pour origine le centre O du cercle G, l'axe des x étant perpendiculaire à la corde AA′, et cette dernière ayant une abscisse OI positive. Construisons une corde BB′, parallèle à AA′ et d'abscisse positive $OK < OI$. Les points de la courbe C, appar-

---

[1] D'après ce théorème général, facile à démontrer : si $f(t, \alpha, \beta)$ est une fonction continue des trois variables indépendantes t, α, β, le maximum $M(\alpha, \beta)$ de cette fonction, quand α et β sont donnés, est lui-même une fonction continue de α et β.

tenant à BB' ou bien situés à gauche de BB', sont tous à l'intérieur, au sens étroit, du cercle G, en vertu de



l'hypothèse. Il existe donc un segment de longueur ε tel qu'on ait, pour tout point M de l'une ou l'autre des deux catégories considérées,

$$\text{(1)} \qquad OM < R - \varepsilon,$$

l'égalité étant exclue.

Marquons sur Ox un point ω d'abscisse positive h, à la fois inférieure à ε et à $2\,OK$, de telle sorte que la droite DD', d'équation

$$x = \frac{h}{2},$$

est à gauche de BB'.

Pour tout point M de C, à gauche de DD' ou situé sur DD', on écrira

$$\omega M \leqq OM + O\omega = OM + h < OM + \varepsilon,$$

et par conséquent, d'après (1),

$$\omega M < R,$$

l'égalité étant exclue.

Pour tout point N de C situé à droite de DD′, on peut écrire simplement

$$\omega N < ON, \qquad ON \leqq R,$$

d'où

$$\omega N < R,$$

l'égalité étant encore exclue.

On voit donc, en résumé, que tous les points de C sont à l'intérieur d'un cercle de centre ω et de rayon inférieur à R.

Il résulte de là que les points que C a en commun avec le cercle minimum G_0 ne sont pas répartis sur un arc plus petit qu'une demi-circonférence. Deux cas sont possibles :

1° Deux de ces points sont diamétralement opposés; l'élongation de C est alors égale au diamètre de G_0. On a donc

$$R_0 = \frac{E}{2} < \frac{E}{\sqrt{3}},$$

et le théorème est démontré dans ce cas.

2° Parmi les points considérés, il n'en existe pas deux qui soient diamétralement opposés. Ces points sont alors au moins au nombre de trois (car deux points non diamétralement opposés appartiennent toujours à un arc plus petit qu'une demi-circonférence).

Soient donc sur le cercle G_0 trois points α, β, γ satisfaisant aux conditions énoncées. Les trois arcs $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont tous inférieurs à 180°. D'autre part, comme leur somme est de 360°, l'un d'eux au moins atteint 120°. Supposons que ce soit l'arc $\beta\gamma$. La corde $\beta\gamma$ est au moins égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. On a donc

$$\beta\gamma \geqq R_0\sqrt{3}.$$

D'autre part, l'élongation E de la courbe C est au moins égale à $\beta\gamma$. On a finalement

$$E \geqq R_0 \sqrt{3},$$

et le théorème est démontré.

On voit que la limite fournie par l'énoncé de ce théorème est précise. Par exemple, si la courbe C est constituée par le contour d'un triangle équilatéral, on a exactement

$$R_0 = \frac{E}{\sqrt{3}}.$$

3. Le théorème de l'espace se démontre d'une façon analogue. Soient S une surface fermée d'élongation donnée E, Σ_0 la sphère minimum qui la contient et R_0 le rayon de cette sphère. On reconnaît tout d'abord que les points communs à S et à Σ_0 ne peuvent être répartis sur une calotte inférieure à un hémisphère. Donc : 1° ou bien parmi ces points, on peut en trouver deux qui soient diamétralement opposés, et alors on a

$$R_0 = \frac{E}{2} < \sqrt{\frac{3}{8}}\, E;$$

2° ou bien il n'existe pas de tels points. Les points communs à S et à Σ_0 sont alors au nombre de quatre au moins, car trois points d'une sphère, dont deux quelconques ne sont pas diamétralement opposés, appartiennent toujours à une calotte plus petite qu'un hémisphère. Il reste alors à établir la proposition suivante :

Si quatre points d'une sphère de rayon R_0 *sont tels qu'il n'existe pas d'hémisphère les contenant tous, l'une de leurs six distances mutuelles est au moins égale à* $\sqrt{\frac{8}{3}}\, R_0$.

Pour démontrer cela, nous nous appuierons sur le théorème suivant : *Si les côtés d'un triangle sphérique sont au plus égaux à un arc donné l plus petit qu'un demi-grand cercle, l'aire de ce triangle est au plus égale à celle du triangle équilatéral de côté égal à l.*

Soient en effet a, b, c les côtés du triangle, supposé tracé sur une sphère de rayon égal à l'unité. On a, par hypothèse,

$$a \leqq l, \qquad b \leqq l, \qquad c \leqq l.$$

Si l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

l'aire σ du triangle est donnée, comme on sait, par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} \sigma = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{p}{2} \operatorname{tang} \frac{p-a}{2} \operatorname{tang} \frac{p-b}{2} \operatorname{tang} \frac{p-c}{2}}.$$

Si, p restant d'abord fixe, a, b, c varient de manière à satisfaire à la relation (2), on reconnaît facilement que $\operatorname{tang} \frac{1}{4} \sigma$ atteint son maximum quand on a

$$a = b = c = \frac{2p}{3} \quad (^1).$$

(1) Par exemple, si l'on pose

$$\frac{p-a}{2} = x, \qquad \frac{p-b}{2} = y, \qquad \frac{p-c}{2} = z,$$

on a

$$x + y + z = \frac{p}{2} < \frac{\pi}{2}$$

et aussi x, y, $z > 0$ (ces inégalités résultant des propriétés fondamentales des triangles sphériques). On a donc à démontrer que le produit des tangentes de trois arcs positifs, de somme donnée inférieure à $\frac{\pi}{2}$, est maximum quand ces arcs sont égaux, ce qui est élémentaire.

On voit ensuite que tang $\frac{1}{4}\sigma$ augmente avec p, d'où l'on conclut le résultat énoncé.

Cela posé, soient A, B, C, D quatre points d'une sphère, dont trois quelconques n'appartiennent pas à une même hémisphère. On peut les joindre deux à deux par six arcs de grand cercle, tous inférieurs à un demi-grand cercle, et l'on divise ainsi la surface de la sphère en quatre triangles sphériques. L'un deux au moins, le triangle ABC par exemple, a nécessairement une aire au moins égale au quart de l'aire de la sphère, c'est-à-dire à l'aire du triangle équilatéral ayant pour sommets trois des sommets d'un tétraèdre régulier $\alpha\beta\gamma\delta$ inscrit dans la sphère. Si l'un au moins des arcs BC, CA, AB n'était pas au moins égal à l'arc $\alpha\beta$, l'aire du triangle ABC ne pourrait, d'après ce que nous avons vu, satisfaire à la condition qu'on vient d'énoncer.

On aura donc, par exemple,

$$\text{arc AB} \geqq \text{arc}\,\alpha\beta,$$

et par suite, puisqu'il s'agit d'arcs inférieurs à un demi-cercle,

$$AB \geqq \alpha\beta.$$

Mais l'arête $\alpha\beta$ d'un tétraèdre régulier est donnée, en fonction du rayon R_0 de la sphère circonscrite, par la formule

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{8}{3}}\,R_0,$$

et l'on a, de plus,

$$E \geqq \alpha\beta.$$

Le théorème que nous avions en vue est donc complètement démontré.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1913. SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

PAR M. C. CLAPIER.

SUJET.

Les axes ox, oy, oz étant rectangulaires, on donne un cylindre de révolution (C) *ayant pour axe la droite oz et pour rayon a.*

Soient u et v deux paramètres angulaires déterminant les plans tangents au cylindre (C) *menés par un point* M *de l'espace.*

Le point M *décrivant une surface, sa coordonnée z sera une fonction de u et v, soit* $z = a.f(u, v)$, *définissant cette surface.*

On mène, par le point M, *dans le plan tangent en* M *à la surface, les deux tangentes au cylindre* (C), *soient* MT *et* MT'.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles, soit* (E), *à laquelle doit satisfaire la fonction* $f(u, v)$, *pour que les deux directions* MT *et* MT' *soient conjuguées sur la surface correspondante, soit* (S).

Quelle propriété ont les deux familles de courbes, $u =$ const., $v =$ const., *sur la surface* (S)?

2° *Montrer qu'on peut trouver plusieurs expressions linéaires de la forme*

$$\varphi(u, v) = A(u, v)\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + B(u, v)\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + C.f, \qquad C = \text{const.}$$

telles que l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u.\partial v} = 0$$

admette toutes les solutions de l'équation du second ordre (E).

Déterminer, en utilisant ce résultat, toutes les solutions de l'équation (E).

3° *Les solutions de l'équation* (E) *dépendent de deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v.*

Montrer que les surfaces (S) *particulières obtenues en annulant successivement l'une ou l'autre de ces fonctions arbitraires sont développables. Les arêtes de rebroussement de ces développables sont-elles arbitraires sur la surface qui les porte ?*

Représenter la solution générale $f(u, v)$, *ou la surface* (S) *générale, à l'aide de ces arêtes de rebroussement, et indiquer une génération de la surface.*

SOLUTION.

1. La projection m du point M sur le plan Oxy est déterminée par les deux tangentes

$$(1)\qquad \begin{cases} x\cos u + y\sin u = a, \\ x\cos v + y\sin v = a. \end{cases}$$

On peut en déduire x et y à l'aide des deux paramètres angulaires u et v, de sorte que la surface (S) lieu du point M peut être définie par les expressions des coordonnées

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a\dfrac{\cos\dfrac{u+v}{2}}{\cos\dfrac{u-v}{2}}, \\ y = a\dfrac{\sin\dfrac{u+v}{2}}{\cos\dfrac{u-v}{2}}, \\ z = af(u, v). \end{cases}$$

Les plans mMT et $mM'T'$ sont tangents au cylindre et coupent la surface (S) suivant deux courbes passant en M et dont les tangentes en ce point sont conjuguées par rapport à la surface.

On peut donc dire que les deux familles de courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, sont conjuguées sur la surface (S). Les coordonnées x, y et z de celle-ci devront donc satisfaire à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} = \alpha \frac{\partial t}{\partial u} + \beta \frac{\partial t}{\partial v}. \tag{3}$$

Les deux premières expressions (2) vont nous permettre de déterminer α et β. Nous en déduisons

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{-a}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}}(\sin v\, du + \sin u\, dv), \\ dy &= \frac{a}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}}(\cos v\, du + \cos u\, dv); \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-a \sin v}{2\cos^2 \frac{u-v}{2}}\right) = -\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\cos^3\frac{u-v}{2}} = \frac{-x}{2\cos^2\frac{u-v}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{-y}{2\cos^2\frac{u-v}{2}}.$$

Substituant x et y au lieu de f dans l'équation (3), nous obtenons

$$\alpha \sin v + \beta \sin u = \frac{x}{a},$$

$$\alpha \cos v + \beta \cos u = \frac{-y}{a};$$

d'où, en tenant compte des égalités (1), on déduit

$$\alpha \sin(v-u) = 1, \qquad \beta \sin(u-v) = 1.$$

Et l'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$\text{(E)} \qquad \sin(u - v)\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v} = 0.$$

Les courbes $u =$ const., $v =$ const., font partie d'une même série constituée par les sections de la surface (S) par les plans tangents au cylindre. Soit M_1 le point de rencontre de l'une d'elles avec la génératrice correspondante du cylindre ; la tangente en ce point est conjuguée par rapport à elle-même, c'est-à-dire asymptotique.

2. On peut intégrer l'équation (E), en remarquant que les coordonnées x et y du point m peuvent s'obtenir par projections, sur les axes du contour Otm et se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= (\cos u + \lambda \sin u)a \\ y &= (\sin u - \lambda \cos u)a \end{aligned} \right. \qquad \left(\lambda = \operatorname{tang}\frac{u - v}{2}\right).$$

Chacun des seconds membres est tel que si l'on pose

$$(5') \qquad z = [F(u) - \lambda F'(u)]a,$$

F étant une fonction arbitraire de u, les expressions (5) se déduisent de (5′) en prenant successivement :

$$F(u) = \cos u \qquad \text{et} \qquad F(u) = \sin u.$$

x, y et z vérifiant l'équation (E), on est donc conduit à poser

$$f(u, v) = F(u) - \lambda F'(u),$$

qui nous donne en effet une solution de cette équation avec une fonction arbitraire. Comme l'intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires, elle aura la forme

$$(6)\qquad F(u)+F_1(v)-\lambda F'(u)+\lambda F'_1(v).$$

Nous allons la retrouver en cherchant les expressions

$$\varphi(u, v)=A(u, v)\frac{\partial t}{\partial u}+B(u, v)\frac{\partial t}{\partial v}+Cf,$$

telles que l'équation $\frac{\partial\theta}{\partial u\,\partial v}=0$ admette toutes les solutions de l'équation (E) :

Si l'on remplace θ par x et y successivement, nous devrons avoir

$$A(u, v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u, v)\frac{\partial\theta}{\partial v}+C.\theta=\Phi_1(u)+\Phi_2(v),$$

Φ_1 et Φ_2 étant deux fonctions arbitraires.

Des expressions (2) et (4) on déduit, pour les premiers membres :

$$\frac{A\sin v+B\sin u-2C\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}}{\cos^2\frac{u-v}{2}}$$

et

$$\frac{A\cos v+B\cos u+2C\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}}{\cos^2\frac{u-v}{2}}.$$

La manière la plus simple de satisfaire à la condition demandée est de les égaler à zéro, ce qui donne

$$\begin{aligned}A\sin v+B\sin u&=C(\cos u+\cos v),\\ A\cos v+B\cos u&=-C(\sin u+\sin v),\end{aligned}$$

d'où

$$(7)\qquad -A=B=C\cot\frac{u-v}{2}.$$

Pour montrer que ces valeurs conviennent, nous allons essayer de déterminer $A(u, v)$, $B(u, v)$ et C, de manière qu'on ait

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} + Cz\right) = 0,$$

z satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles trouvée,

$$(8) \qquad \sin(u-v)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Or, en effectuant les calculs et remplaçant $\frac{\partial^3 z}{\partial u^2\,\partial v}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v^2}$ par leurs valeurs déduites par différentiation de (8), on trouve

$$\begin{aligned}
&A\left(\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\sin(u-v)}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\\
&+B\left(-\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\sin(u-v)}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\\
&+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\\
&+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u\,\partial v} = 0.
\end{aligned}$$

Et pour que cette équation soit identique à l'équation (8), il faudra que A et B satisfassent aux conditions

$$\frac{-A}{\sin(u-v)} + \frac{\partial A}{\partial v} = 0, \qquad \frac{B}{\sin(u-v)} + \frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

On déduit

$$A = -c_1\cot\frac{u-v}{2}, \qquad B = c_2\cot\frac{u-v}{2},$$

c_1 et c_2 étant des constantes que nous déterminerons de manière à rendre l'identification complète; nous retrouvons ainsi la condition (7).

Ainsi, les solutions de l'équation (E) satisfont à l'équation linéaire du premier ordre,

$$(9) \qquad \cot\frac{u-v}{2}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+z=\Phi_1(u)+\Phi_2(v).$$

Les équations des caractéristiques nous donnent

$$\frac{u+v}{2}=\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{-\cot(u-\alpha)}=\frac{dz}{-z+\Phi_1+\Phi_2}.$$

Supposons $\Phi_2 = 0$ et posons $\Phi_1 = F + F''$.
L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{dz}{du}=(z-F-F'')\operatorname{tang}(u-\alpha);$$

c'est une équation différentielle linéaire qui s'intègre en posant

$$z=\frac{c}{\cos(u-\alpha)},$$

$$c=-\int(F+F'')\sin(u-\alpha)\,du=F\cos(u-\alpha)-F'\sin(u-\alpha).$$

On en déduit, pour la partie de l'intégrale correspondante à $\Phi_2(v)=0$,

$$z=F(u)-\lambda F'(u).$$

Et l'intégrale générale de (E) a bien la forme

$$(10) \qquad f(u,v)=F(u)-\lambda F'(u)+F_1(v)+\lambda F_1'(v).$$

3. Les solutions de l'équation (E) dépendent des deux fonctions arbitraires $F(u)$ et $F_1(v)$. Si nous annulons la seconde, $F_1'(v)$ est aussi nul et il reste les surfaces particulières représentées par les équations (5) et (5'). On peut les écrire

$$(11) \qquad \frac{x-a\cos u}{\sin u}=\frac{y-a\sin u}{-\cos u}=\frac{z-aF(u)}{-F'(u)}=a\lambda.$$

Sous cette forme, elles représentent les tangentes à la courbe tracée sur le cylindre et déterminée par

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\cos u,\\ y &= a\sin u,\\ z &= a\mathrm{F}(u). \end{aligned}\right.$$

Nous avons donc des surfaces développables dont les arêtes de rebroussement sont des courbes gauches quelconques portées sur le cylindre.

Nous pouvons écrire les équations de la surface générale (S) sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}[\cos u + \lambda\sin u + \cos v - \lambda\sin v],\\ y &= \frac{a}{2}[\sin u - \lambda\cos u + \sin v + \lambda\cos v],\\ z &= \frac{a}{2}[\mathrm{F}(u) - \lambda\mathrm{F}'(u) + \mathrm{F}_1(v) + \lambda\mathrm{F}'_1(v)], \end{aligned}$$

qui nous donne une représentation de la surface à l'aide des deux arêtes de rebroussement (R) et (R_1),

$$z = a\mathrm{F}(u) \qquad \text{et} \qquad z = a\mathrm{F}_1(v).$$

Si l'on prend deux points M_1 et M_2 se correspondant sur les deux développables, on aura

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

M, milieu de $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, décrit la surface (S).

Remarque. — On aurait pu obtenir l'équation (E) par la méthode de M. Jamet, qui consiste à introduire les coordonnées homogènes (cf. *Nouvelles Annales*, 1913, p. 388).

Si l'on pose

$$\alpha = \operatorname{tang}\frac{u}{2}, \quad \beta = \operatorname{tang}\frac{v}{2},$$

on est conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$(12)\qquad (\alpha-\beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0.$$

Si, pour revenir aux coordonnées cartésiennes, nous posons

$$\theta=(1+\alpha\beta)f,$$

on retrouve, après le changement de variables (α, β) en (u, v), l'équation (E)

$$\sin(u-v)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial t}{\partial u}-\frac{\partial t}{\partial v}.$$

M. Jamet trouve, comme intégrale de l'équation (12),

$$\theta=2\varphi(\alpha)+(\beta-\alpha)\varphi'(\alpha)$$
$$+2\varphi_1(\beta)+(\alpha-\beta)\varphi_1'(\beta)+a(\alpha+\beta)+b.$$

Il serait intéressant d'en déduire l'intégrale de (E),

$$z=F(u)-\operatorname{tang}\frac{u-v}{2}\cdot F'(u)+F_1(v)+\operatorname{tang}\frac{u-v}{2}\cdot F_1'(v).$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1)\qquad \sin t\frac{dy}{dt}+3\cos t\,y=3;$$

déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur $\frac{3\pi}{4}$ *pour* $t=\frac{\pi}{2}$.

2° *Dans l'équation différentielle* (I), *faire le changement de variable défini par la relation*

$$\text{(II)} \qquad x = \sin^2 \frac{t}{2}$$

et montrer que l'équation transformée [*équation* (II)] *admet une solution de la forme*

$$y = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *étant des constantes. Déterminer ces coefficients et le rayon de convergence de la série.*

Vérifier que, si l'on différentie l'équation (II), *on obtient une équation du second ordre*

$$\text{(III)} \qquad 2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (5 - 10x)\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

3° *Dans l'équation* (III) *faire successivement le changement de fonction inconnue et le changement de variable définis par les relations*

$$y = x^{-\frac{3}{2}} z,$$
$$x = 1 - x_1.$$

Montrer que l'équation différentielle ainsi obtenue admet une solution de la forme

$$z = x_1^n,$$

n étant un exposant constant convenablement déterminé.

II. Partie géométrique. — *On appelle* s *l'arc d'une courbe* (C); x, y, z *les coordonnées, par rapport à un trièdre trirectangle donné* $Oxyz$, *d'un point courant* M *de la courbe* (C); α, β, γ *les cosinus directeurs de la tangente en* M, *dans le sens des arcs croissants;* α', β', γ', α'', β'', γ'', *les cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale;* R *et* T *les rayons de courbure et de torsion* (R *essentiellement positif,* T *positif ou négatif donné par les relations* $\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T} \cdots$).

Si l'on a la relation $R = T$ *on a aussi les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha'' &= A, & A\alpha + B\beta + C\gamma &= 1, \\ \beta - \beta'' &= B, & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' &= -1, \\ \gamma - \gamma'' &= C, \end{aligned}$$

A, B, C *étant des constantes liées par la relation*

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2.$$

Déduire de là que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices ont pour paramètres directeurs A, B, C.

En choisissant convenablement l'axe Oz, *on pourra supposer*

$$A = B = 0, \qquad C = \sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma'' = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha' = \beta\sqrt{2}, \qquad \beta' = -\alpha\sqrt{2}, \qquad \gamma' = 0.$$

Si l'on donne, outre $R = T$, *la relation* $R = s$, *on achèvera la détermination de la courbe* (C) *en posant*

$$\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}},$$

et l'on exprimera successivement s, x, y *et* z *au moyen de la variable* φ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la courbe*

$$\begin{aligned} x &= 6t + 6t^2 + 2t^3, \\ y &= 2 + 2t^3, \\ z &= -3 - 6t, \end{aligned}$$

l'arc de la courbe s'exprime rationnellement en t *par la formule*

$$ds = 6\sqrt{2}(1 + t + t^2)\,dt.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'indicatrice des courbures s'expriment aussi rationnellement en

L'arc σ de cette indicatrice s'obtient par la formule

$$d\sigma = \frac{dt}{1 + t + t^2}.$$

Calculer les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, les cosinus directeurs α', β', γ' de la normale principale, le rayon de courbure.

Vérifier la relation

$$\alpha + \beta - \gamma = \sqrt{2}.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Partie analytique. — *On donne le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} - yk\cos\theta = f(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + k(x\cos\theta - z\sin\theta) = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + yk\sin\theta = 0,$$

où k et θ désignent des constantes et $f(t)$ une fonction connue de t.

1° *On suppose d'abord $f(t) \equiv 0$.*

Le système admet une solution pour laquelle la fonction y est identiquement nulle : quelle est cette solution ?

Trouver les trois solutions des équations sans second membre telles que, pour $t = 0$, on ait :

$x_1 = 0,$	$y_1 = -1,$	$z_1 = 0$	(1re solution),
$x_2 = \cos\theta,$	$y_2 = 0,$	$z_2 = -\sin\theta$	(2e solution),
$x_3 = \sin\theta,$	$y_3 = 0,$	$z_3 = \cos\theta$	(3e solution).

2° *On suppose que $f(t)$ n'est pas identiquement nulle.*

Indiquer les quadratures à effectuer pour obtenir une solution particulière du système donné.

Effectuer les calculs en supposant :

(α) $\quad f(t) = -\dfrac{ak}{\cos\theta}$ $\quad$ (a constant).

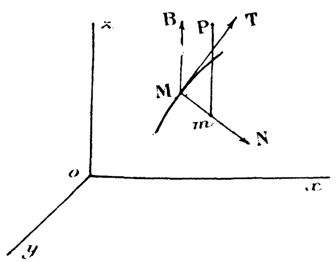
(β) $\quad f(t) = -a\,e^{ht}$ $\quad$ (a et h constants).

Partie géométrique. — *On donne, en axes rectangulaires, l'expression des coordonnées x, y, z d'un point quelconque* M *d'une courbe* C *en fonction de l'arc s de cette courbe;* MT *est la tangente dans le sens des arcs s croissants,* MN *la normale principale orientée de* M *vers le centre de courbure,* MB *la binormale orientée, de sorte que le trièdre* MTNB *ait même disposition que le trièdre de coordonnées* Oxyz.

Dans le plan normal en M *à la courbe* C *on mène une parallèle à la binormale, définie par la valeur l du segment* Mm, *m désignant le point où elle perce* MN. *On suppose que l est une fonction connue de s, de sorte que cette parallèle engendre une surface réglée* Σ. *On définit un point* P *de la génératrice par le segment* $m\mathrm{P} = u$.

1° *Équation par rapport aux axes* Oxyz *du plan tangent à* Σ *en* P.

2° *Il suffira de supposer que le trièdre* Oxyz *coïncide*



avec le trièdre de Serret relatif au point particulier M *pour déduire de ce qui précède l'équation du même plan tangent par rapport au trièdre* MTNB, *qui est*

$$\left(l' + \frac{u}{\mathrm{T}}\right)\mathrm{X} - \left(1 - \frac{l}{\mathrm{R}}\right)(\mathrm{Y} - l) = 0,$$

R *et* T *désignant le rayon de courbure et le rayon de torsion, l' étant la dérivée de l, $\dfrac{dl}{ds}$.*

3° *Quelle fonction de s faut-il prendre pour l, pour que la surface* Σ *soit développable ?*

Plan tangent à la surface développable, arête de rebroussement de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{px}{2(x^2 y^2)} + \frac{qy}{x^2 - 3y^2} = 0. \tag{1}$$

Vérifier, par un calcul direct, que l'équation (1) *et l'équation*

$$px + qy = z \tag{2}$$

admettent comme solution commune

$$z = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 y}. \tag{3}$$

2° *On considère la surface* (S) *qui, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par l'équation* (3) *et le solide* (Σ) *limité par la surface* (S) *et par les plans*

$$z = 0, \qquad z = c \qquad (c > 0).$$

Calculer :

L'aire de la section de (Σ) *par le plan* $z = z_1$;

Le volume de Σ;

Le moment d'inertie, par rapport à Oz, *du solide* (Σ *supposé homogène.* (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle de Lagrange*

$$x + py = a\sqrt{p^2 + 1}, \tag{1}$$

où a *désigne une constante et* $p = \frac{dy}{dx}$.

Exprimer les coordonnées x *et* y *d'un point variable d'une courbe intégrale quelconque* (γ) *en fonction de l'angle* α, *tel que* $\tang \alpha = p$.

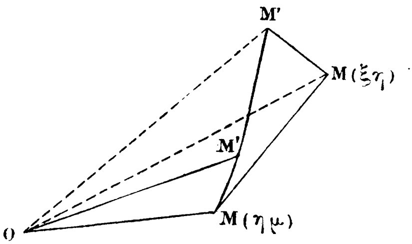
2° *Former l'équation différentielle* (2) *des trajectoires orthogonales des courbes* (γ). *Intégrer cette équation* (2) *et trouver son intégrale singulière.*

3° *L'équation différentielle* (1) *peut se mettre sous la* *forme*

$$r\,dr = a\,ds,$$

ds étant un arc infiniment petit d'une courbe (γ) *et* r *le rayon vecteur de l'origine de l'arc ds.*

Vérifier que, si l'on fait tourner une courbe (γ) *dans le*



plan (xOy) *autour du point* O *on obtient une nouvelle courbe intégrale.*

4° *Former l'équation différentielle des courbes* (γ) *en coordonnées polaires et intégrer cette équation en prenant pour variable l'angle* V *tel que* $\cos V = \dfrac{a}{r}$.

II. Partie géométrique. — *Sur une courbe plane* (C) *on fixe un sens positif arbitraire pour les arcs croissants et l'on appelle* α *l'angle de la direction positive* Ox *avec la tangente menée dans le sens des arcs s croissants.*

On prend pour expression algébrique du rayon de courbure le nombre $\gtrless 0$,

$$R = \frac{ds}{d\alpha};$$

pour expression algébrique de la distance de l'origine à la tangente, le nombre $\gtrless 0$,

$$p = x \sin\alpha = y \cos\alpha.$$

1° *On vérifie immédiatement que*

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha)\,d\alpha = d(x \sin\alpha - y \cos\alpha).$$

En déduire la formule

$$R = \frac{r\,dr}{dp},$$

en posant

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

2° *On sait que l'aire élémentaire* OMM′ *comprise entre le rayon vecteur* OM, *l'arc* MM′ *et* OM′ *a pour valeur*

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Sur chaque tangente on porte, dans le sens positif, une longueur constante a : soit μ le point correspondant à M; *μ décrit une courbe (γ) et a pour coordonnées ξ, η.*

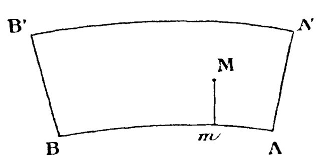
Vérifier que l'élément d'aire dB, analogue à dA, relatif à la courbe (γ), a pour expression

$$dB = dA + \frac{a}{2}\,dp + \frac{a^2}{2}\,d\alpha.$$

3° *On suppose la courbe* (C) *ovale et fermée; il en est de même de (γ); l'aire comprise entre* (C) *et (γ) a pour valeur πa^2.*

Épreuve pratique. — *On considère un arc de courbe* AB *de longueur* (S) *ne présentant pas d'inflexion. Sur chaque normale on porte, du côté opposé à la développée, une longueur constante* L. *On définit ainsi un quadrilatère curviligne* ABA′B′.

Un point quelconque M *de cette aire peut être défini*



par la longueur s de l'arc Am *et la distance* M$m = l$, *m désignant le pied de la normale abaissée de* M *sur l'arc* AB.

Les courbes $s = \text{const.}$, $l = \text{const.}$ *forment un réseau orthogonal.*

1° *Évaluer la longueur de la courbe* $l = \text{const.}$; *vérifier qu'elle est égale à* $S + lV$, V *désignant l'angle des normales extrêmes.*

2° *Évaluer l'aire du rectangle infiniment petit compris entre les courbes* (l), $(l + dl)$, s, $(s + ds)$; *l'aire infiniment petite comprise entre la courbe* (l) *et la courbe* $(l + dl)$; *l'aire infiniment petite comprise entre la courbe* (s) *et la courbe* $(s + ds)$.

3° *Aire du quadrilatère* $ABA'B'$.

Vérifier les formules obtenues en supposant que l'arc AB *est un arc de circonférence.* (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Trouver une solution du système d'équations différentielles*

$$(1)\quad \begin{cases} x\,dy - y\,dx = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{k} = (x^2 + y^2)\,dt \\ dz = kz\,dt \end{cases} \qquad (k \text{ constant}),$$

telle que, pour $t = 0$, *on ait*

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad z = c.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C). *Les axes étant rectangulaires, calculer, en fonction du paramètre* t, *l'arc* s *de la courbe* (C); *les cosinus directeurs* α_1, α_2, α_3 *de la tangente; les dérivées* $\dfrac{d\alpha_1}{ds}$, $\dfrac{d\alpha_2}{ds}$, $\dfrac{d\alpha_3}{ds}$; *le rayon de courbure, les cosinus directeurs de la normale principale, l'angle de la binormale avec* Oz, *le rayon de torsion pour un point variable de* (C).

2° *On donne le système d'équations différentielles*

$$(2)\quad \begin{cases} s\dfrac{d\alpha}{ds} - m\beta = 0 \\ s\dfrac{d\beta}{ds} + m\alpha + n\gamma = 0 \\ s\dfrac{d\gamma}{ds} - n\beta = 0 \end{cases} \qquad (m \text{ et } n \text{ constants}).$$

Former l'équation différentielle qui définit β *en fonction de s. Faire dans cette équation le changement de variable*

$$ds = ks\,dt \qquad \left(\frac{1}{k^2} = m^2 + n^2\right).$$

Trouver les intégrales β_1, β_2, β_3 *de l'équation différentielle ainsi obtenue, telles que, pour* $t = 0$, *on ait*

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = 0, & \beta_2 = 1, & \beta_3 = 0, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = -1, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = 0, & \dfrac{d\beta_3}{dt} = 0. \end{array}$$

Calculer les fonctions α_1, α_2, α_3 *de* t, *qui correspondent à ces intégrales* β_1, β_2, β_3, *et qui, pour* $t = 0$, *prennent les valeurs*

$$\alpha_1 = mk, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = \sqrt{1 - m^2 k^2}.$$

Calculer x, y, z *en fonction de* t *par les formules*

$$x = \int \alpha_1\,ds, \qquad y = \int \alpha_2\,ds, \qquad z = \int \alpha_3\,ds.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C′). *Vérifier que le système donné* (2) *représente les formules de Serret et Frenet pour la courbe* (C′).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par les formules*

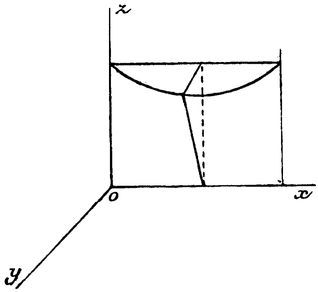
$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a \cos\theta \sqrt{\cos 2\theta}, \\ y = a \dfrac{z}{c} \sin\theta \sqrt{\cos 2\theta}, \end{array} \right.$$

où a *et* c *désignent des constantes, et* θ *un paramètre qui varie de* $-\frac{\pi}{4}$ *à* $+\frac{\pi}{4}$.

1° *Montrer que le lieu des points de* (S) *pour lesquels* θ *a une valeur constante est une droite, que la surface* (S) *est un conoïde d'axe* Ox *et que la section de* (S) *par le plan* $z = c$ *est une lemniscate.*

2° *Calculer l'aire* A *de la section de* (S) *par un* *plan* $z =$ const. *et l'aire* A_1 *de la section de* (S) *par un plan* $x =$ const.

3° *Soit* (T) *le solide homogène limité par la surface* (S)



et par les plans $z = 0$, $z = c$. *Calculer le moment d'inertie de* (T) :

(α) *par rapport au plan* xOy;
(β) *par rapport au plan* yOz;
(γ) *par rapport à l'axe* Oy. (Juin 1913.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *En faisant usage du développement en série de* $\cot \frac{x-a}{2}$ *suivant les puissances de* e^{ix}, *calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} x \cot \frac{x-a}{2}\, dx$$

où l'on a

$$a = \alpha + i\beta.$$

2° *Montrer qu'on peut calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, x\, dx,$$

où R *désigne une fonction rationnelle quelconque.*

II. 1° *L'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad z + f(\alpha, \beta) = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha = px + qy, \qquad \beta = py - qx,$$

a toujours des solutions communes avec une équation

$$(2) \qquad \mathrm{F}\left(\frac{p}{q}, x, y\right) = \text{const.}$$

dont le premier membre est une fraction du premier degré en $\frac{p}{q}$; *déterminer ces solutions communes en formant, puis intégrant l'équation* (2). *En conclure l'intégrale générale de* (1).

2° *Condition que doit remplir la fonction* $f(\alpha, \beta)$ *pour que les caractéristiques de* (1) *soient lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales. Exemples simples.*

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = f^2(x, y).$$

a. Quelles sont sur chaque surface intégrale : 1° les courbes trajectoires orthogonales des caractéristiques; 2° les courbes conjuguées des caractéristiques.

Dans quels cas ces deux systèmes de courbes coïncident-ils ?

(*Interpréter géométriquement la condition trouvée.*)

b. Intégrer l'équation dans le cas où l'on a

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

c. Indiquer comment il faudrait choisir $f(x, y)$ *pour qu'il existe une équation*

$$(2) \qquad a(x, y)p + b(x, y)q = \text{const.}$$

linéaire en p et q et possédant en commun avec l'équation *donnée* (1) *une solution* z *dépendant d'une nouvelle constante.*

II. *Quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}$$

quand on ne précise pas le chemin qui conduit du point o *au point* z *dans le plan complexe ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer par la théorie des résidus l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(at+b)\,dt}{(t^2+t+1)^3},$$

où a *et* b *sont deux paramètres réels arbitraires.*

Retrouver le résultat par l'emploi de l'intégrale indéfinie (décomposition en fractions simples).

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère les surfaces* S *dont l'équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires est*

$$zx^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.},$$

m *désignant un entier positif et* φ *une fonction arbitraire :*

1° *Déterminer, autant qu'on le peut en laissant* φ *arbitraire, leurs trajectoires orthogonales.*

2° *Peut-on grouper une simple infinité de ces courbes de manière à engendrer des cônes ayant pour sommet l'origine des coordonnées ?* Trouver ces cônes.

3° *Comment se déterminent les lignes asymptotiques des surfaces* S.

II. *L'angle solide sous lequel on voit d'un point* P *de coordonnées* (a, b, c) *une portion de surface* S, *entièrement limitée par une courbe* Γ, *ne dépend que de la courbe.* On demande de l'exprimer par une intégrale curviligne étendue à cette courbe Γ. (Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — *Soient*

$$X = aZ + \alpha,$$
$$Y = bZ + \beta$$

les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

1° *Montrer qu'il existe pour tous les complexes*

$$\beta = \alpha f(a, b) + g(a, b), \tag{1}$$

quelles que soient les fonctions arbitraires f et g, des surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe.

2° *Comment pourrait-on déterminer ces surfaces développables?*

3° *Trouver les surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe*

$$\frac{a\beta - b\alpha + 1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \text{const.} \tag{2}$$

4° *Trouver toutes les surfaces* (S) *dont les normales appartiennent au complexe précédent.*

[*On transformera, à défaut d'autre méthode, l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *en introduisant au lieu des coordonnées cartésiennes* (x, y) *les coordonnées polaires* (ρ, ω).]

5° *Montrer que ces surfaces* (S) *sont égales aux surfaces qui leur sont parallèles.*

Que peut-on en conclure relativement à leurs lignes de courbure? (Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — I. *On considère la famille de surfaces représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$zx^m = a\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ *est une fonction donnée et a une constante arbitraire :*

1° *Montrer que les lignes asymptotiques de ces surfaces peuvent s'obtenir par une quadrature.*

2° *Montrer que les trajectoires orthogonales de ces surfaces s'obtiennent aussi par une quadrature. (On établira d'abord que ces trajectoires sont placées sur des surfaces de révolution autour de* Oz.)

3° *Déterminer la fonction* φ *de manière que* z *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles*

$$(p^2+q^2)x^2 = z^2$$

et intégrer cette équation.

II. *Exposer sommairement quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z} \left(\frac{A}{z-a} + \frac{z+b}{\sqrt{1-z^2}} \right) dz$$

suivant le chemin adopté pour aller, dans le plan complexe, du point z_0 *au point* z.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface de révolution représentée par les équations*

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho),$$

où x, y, z *sont les coordonnées d'un point* M *de la surface.*

Quelles courbes C *doit décrire le point* M *pour que l'arc décrit par sa projection* m *sur le plan* xOy *soit égal à* $a\,d\omega$.

Former explicitement les deux expressions dont la quadrature donnerait :

1° *Les trajectoires orthogonales des courbes* C, *sur la surface de révolution ;*

2° *L'arc de l'une de ces trajectoires, compté à partir du point où elle rencontre* xOy.

Exécuter ces quadratures dans l'hypothèse

$$z^2 + \rho^2 = a^2.$$

(Juillet 1912.)

[D1a]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA DÉFINITION DE LIMITE ET DU CRITERIUM DE BOLZANO-CAUCHY [1];

PAR M. DMITRY KRYJANOWSKY.

Les limites employées dans l'Analyse infinitésimale peuvent être réparties en deux catégories : d'une part, nous avons les limites des fonctions d'un nombre fini de variables; d'autre part, les limites des expressions telles que

$$\Sigma f(\xi_i)\,\Delta_i, \quad \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\omega_i, \quad \ldots,$$

qui servent à la définition des intégrales définies simples, doubles, etc. Les définitions de ces deux espèces de limites, si rapprochées qu'elles soient, ne sont pas identiques. Cela présente cet inconvénient que les théorèmes démontrés pour la première catégorie de limites ne sont pas *eo ipso* démontrés pour la seconde catégorie. Comme exemple très important, on peut citer la règle fondamentale de convergence, autrement nommée *le critère d'existence de Bolzano-Cauchy* (ou bien encore *principe général de convergence*) qui s'énonce de la façon suivante pour les fonctions d'*une* variable :

Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie pour tous les nombres x d'un ensemble E qui possède un point d'accumulation a. Pour que cette fonction tende vers

(1) Le contenu de cet article a été l'objet d'une communication faite par l'auteur dans la séance de la Société mathématique de Göttingue, le 20 juin 1911.

une limite déterminée quand la variable x, prenant des valeurs de E, tend elle-même vers a, *il faut et il suffit* qu'à tout nombre positif ε, corresponde un nombre δ positif tel qu'on ait

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

toutes les fois que les nombres x', x'', empruntés à l'ensemble E, satisfont aux conditions suivantes :

$$0 < |x' - a| < \delta, \qquad 0 < |x'' - a| < \delta.$$

Un criterium analogue peut être établi pour la deuxième catégorie des limites, mais cela exige une démonstration spéciale.

Pour éviter cette incommodité (de démontrer deux fois la même chose), j'ai cherché à généraliser la définition de limite de telle façon qu'elle embrasse les définitions employées en Analyse comme cas particuliers. Cela aurait cette importance que chaque proposition démontrée pour la notion de limite généralisée serait par là même établie pour tous les cas particuliers. Pour donner un exemple, je démontre dans ce qui suit, la validité de la règle de Cauchy-Bolzano pour les limites généralisées. Puis, je cite un exemple où cette règle s'applique aux limites de la deuxième catégorie.

1. Définition de limite généralisée. — Soit E_0 un ensemble quelconque de nombres (réels ou complexes). Supposons que nous pouvons, à tout nombre positif δ, faire correspondre d'une façon univoque un ensemble tel $E(\delta)$ faisant partie de E_0, que l'ensemble $E(\delta_1)$ contienne tous les éléments de l'ensemble $E(\delta_2)$ chaque fois que $\delta_1 \geqq \delta_2$. Donc à un nombre plus petit correspond un ensemble qui fait partie de l'ensemble correspondant à un nombre plus grand. A l'ensemble

$E(\delta_1)$ nous donnons le nom de « ensemble conjugué avec la valeur paramétrique δ_1 ». Quant aux éléments de $E(\delta_1)$, nous les appelons « éléments conjugués avec la valeur paramétrique δ_1 » et les désignons par les symboles $e(\delta_1)$ ou encore par $e_i(\delta_1)$.

En adoptant ces notations, nous pouvons énoncer la définition suivante :

Définition de limite. — « Un nombre A est limite des éléments $e(\delta)$ quand le paramètre δ tend vers zéro, symboliquement

$$A = \lim_{\delta=0} e(\delta),$$

si à tout nombre positif ε correspond une valeur paramétrique δ_0 telle qu'on ait

$$|e(\delta_0) - A| < \varepsilon$$

pour chaque élément $e(\delta_0)$ conjugué avec cette valeur δ_0. »

2. Exemples. — Quand il est donné un ensemble de nombres E_0, la séparation paramétrique des ensembles partiels $E(\delta)$ telle qu'elle est décrite au paragraphe 1, est un problème indéterminé. C'est le but spécial que l'on poursuit qui détermine le choix entre les solutions possibles.

Dans ce qui suit, on verra comment il faut faire ce choix pour obtenir les définitions ordinaires de limite comme cas particuliers de la définition générale du paragraphe 1.

1° *Limite d'une suite.* — Soit $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ une suite indéfinie de nombres. Désignant par E_0 l'ensemble de tous les éléments de cette suite, faisons correspondre à toute valeur paramétrique $\delta (> 0)$

l'ensemble partiel $E(\delta)$ formé par tous les éléments u_n de cette suite qui ont l'indice $n > \frac{1}{\delta}$.

Soit $\delta_1 > \delta_2$ ou $\frac{1}{\delta_1} < \frac{1}{\delta_2}$. Un indice n qui est $> \frac{1}{\delta_2}$ sera par force $> \frac{1}{\delta_1}$; donc tout élément u_n de l'ensemble $E(\delta_2)$ appartiendra nécessairement à l'ensemble $E(\delta_1)$.

Ainsi, la correspondance paramétrique cherchée est établie et nous pouvons appliquer la définition de limite généralisée.

En remarquant que $e(\delta)$ désigne un terme quelconque u_n de la suite avec un indice $n > \frac{1}{\delta}$, nous dirons :

$\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$ existe et est égale à A si à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait $|u_n - A| < \varepsilon$ pour tout indice $n > \frac{1}{\delta_0}$.

Or, c'est la définition usuelle de $\lim\limits_{n=\infty} u_n$.

2° *Limite de fonction d'une variable.* — Soit $f(x)$ une fonction définie pour toute valeur d'un ensemble D ayant a pour point d'accumulation.

Soit E_0 l'ensemble de toutes ces valeurs de $f(x)$ et $E(\delta)$ l'ensemble de celles d'entre elles qui correspondent aux valeurs x de D satisfaisant à l'inégalité

$$0 < |x - a| < \delta.$$

On voit que $E(\delta_1)$ contient $E(\delta_2)$, dès que $\delta_1 > \delta_2$.

Selon notre définition, l'égalité

$$A = \lim_{\delta=0} e(\delta)$$

signifie qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$|e(\delta_0) - A| < \varepsilon,$$

ou bien qu'on ait

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

toutes les fois que

$$0 < |x - a| < \delta_0.$$

Or, c'est la définition donnée en analyse à l'égalité :

$$A = \lim_{x=a} f(x).$$

3° *Limite d'une fonction de plusieurs variables.* — Soit $f(x, y, z)$ une fonction définie pour tout système de valeurs de x, y, z prises, respectivement, dans les ensembles D_1, D_2, D_3 tels que D_1 a le point d'accumulation a, D_2 a le point d'accumulation b et D_3 contient des nombres plus grands que tout nombre positif donné N. Désignons par E_0 l'ensemble de toutes ces valeurs de $f(x, y, z)$ et par $E(\delta)$ l'ensemble de celles d'entre elles qui correspondent aux nombres x, y, z satisfaisant aux inégalités

$$|x - a| < \delta. \qquad |y - b| < \delta, \qquad z > \frac{1}{\delta}.$$

Si $\delta' > \delta$ on aura *a fortiori*

$$|x - a| < \delta', \qquad |y - b| < \delta', \qquad z > \frac{1}{\delta'};$$

donc $E(\delta')$ contient tous les éléments de $E(\delta)$ si δ' est plus grand que δ.

Notre définition fait correspondre la notation

$$\lim_{\delta=0} e(\delta) = A$$

avec ce fait qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$|e(\delta) - A| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$|f(x, y, z) - A| < \varepsilon$$

chaque fois que

$$|x-a|<\delta, \qquad |y-b|<\delta, \qquad z>\frac{1}{\delta}.$$

Mais dans ces mêmes conditions, on dit que

$$\lim_{\substack{x=a\\y=b\\z=+\infty}} f(x, y, z) = A.$$

4° *Limite de la somme* $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$. — Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle ab $(a<b)$. Divisons cet intervalle en n parties par des nombres croissants $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ lui appartenant, et formons la somme $\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\Delta_i$, désignant par Δ_i la longueur de l'intervalle partiel $x_{i-1}x_i$ $(x_0\equiv a, x_n\equiv b)$ et par ξ_i un nombre quelconque lui appartenant.

On dit que cette somme tend vers une limite déterminée J quand tous les intervalles Δ_i tendent vers zéro :

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i = J,$$

si à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\delta>0$ tel que, pour choix arbitraire du nombre $n-1$ des points de division, de ces points $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ mêmes et des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dans les intervalles correspondants, on ait toujours

$$|J-\Sigma f(\xi_i)\Delta_i|<\varepsilon,$$

à la seule condition que tous les intervalles Δ_i soient moindres que δ.

C'est la définition *riemanienne* de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ dans sa forme rigoureuse [1].

---

[1] Tandis que tous les Traités modernes d'Analyse donnent la

Voyons maintenant comment il faut établir la correspondance paramétrique des parties de l'ensemble des sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ pour que la définition généralisée de limite nous conduise à la définition précédente.

Soit E_0 l'ensemble de toutes les sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ qui correspondent à un choix tout à fait arbitraire des intervalles Δ_i constituant l'intervalle ab et des nombres ξ_i appartenant à ces intervalles. A une valeur paramétrique $\delta\,(>o)$, conjuguons l'ensemble $E(\delta)$ de celles de ces sommes chez lesquelles tous les intervalles Δ_i sont moindres que δ.

Si $\delta_1 > \delta_2$, chaque somme $e(\delta_2)$ a tous les Δ_i plus petits que δ_2; donc $\Delta_i < \delta_1$, si bien que cette somme fera partie de $E(\delta_1)$ aussi.

Par définition (§ 1) pour qu'il existe $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta) = A$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i = A$, il faut et il suffit qu'à tout $\varepsilon > o$ corresponde un $\delta_0 > o$ tel qu'on ait

$$| e(\delta_0) - A | < \varepsilon,$$

ou bien qu'on ait

$$| \Sigma f(\xi_i)\Delta_i - A | < \varepsilon$$

aussitôt que tous les Δ_i sont $< \delta_0$.

Mais c'est la définition usuelle mentionnée plus haut de

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\Delta_i.$$

Nous voyons donc que les définitions usuelles [1] des

---

définition rigoureuse de $\lim\limits_{x=a} f(x)$ (définition ε, δ), j'ai trouvé la définition précédente de $\lim \Sigma f(\xi_i)\Delta_i$ seulement chez O. STOLZ (*Grundzüge, etc.*); les autres auteurs se contentent toujours encore de la définition verbale vieillie.

[1] Nous pourrions augmenter le nombre des exemples, mais cela serait inutile.

différentes espèces de limites sont en effet contenues dans la définition du paragraphe 1. Il ne faut qu'établir chaque fois une correspondance paramétrique convenable entre les quantités dont on définit la limite et les valeurs du paramètre positif δ.

3. Critère d'existence Cauchy-Bolzano. — « Pour qu'il existe $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$, *il faut et il suffit* qu'à tout nombre positif ε corresponde une valeur paramétrique $\delta_0 > 0$ telle que pour deux éléments quelconques $e_1(\delta_0)$, $e_2(\delta_0)$ de l'ensemble $E(\delta_0)$, on ait toujours

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon. \text{ »}$$

Démonstration. — Ce critère se démontre de la même manière que le critère de Cauchy ordinaire comme on s'assurera tout de suite.

1° *La condition est nécessaire.* — Si la limite en question existe et est égale à A, on peut, étant donné le nombre $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, trouver une valeur paramétrique δ_0 telle qu'on ait

$$|A - e_1(\delta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |A - e_2(\delta_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

où $e_1(\delta_0)$ et $e_2(\delta_0)$ sont deux éléments quelconques de l'ensemble $E(\delta_0)$ conjugué avec la valeur trouvée δ_0. Ces deux inégalités donnent

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon.$$

2° *La condition est suffisante.* — Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots)$ une suite indéfinie quelconque de nombres *décroissants*, convergente vers zéro :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

A ces nombres, on peut faire correspondre, par supposition, des nombres positifs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, tels qu'on ait

$$(A) \qquad |e_1(\delta_k) - e_2(\delta_k)| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$e_1(\delta_k)$ et $e_2(\delta_k)$ étant deux éléments quelconques de l'ensemble $E(\delta_k)$.

Si les nombres δ_k ne vérifient pas les inégalités

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots,$$

nous pouvons les remplacer par les nombres $\delta'_k \leqq \delta_k$ tels qu'on aura

$$\delta'_1 > \delta'_2 > \delta'_3 > \ldots,$$

parce que l'ensemble $E(\delta'_k)$ est contenu dans l'ensemble $E(\delta_k)$. Dans la suite, j'écrirai $\delta_1, \delta_2, \ldots$, sans accents, en supposant qu'on ait

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots.$$

Soit α_1 un des éléments de l'ensemble $E(\delta_1)$. La première des inégalités (A) montre que prenant pour $e_1(\delta_1)$ cet élément α_1, on aura

$$|\alpha_1 - e_2(\delta_1)| < \varepsilon_1;$$

donc tous les éléments de $E(\delta_1)$ se trouvent à l'intérieur du cercle K_1 décrit autour du point α_1 comme centre avec le rayon ε_1.

Soit α_2 un des éléments de $E(\delta_2)$ distinct de α_1. En vertu de (A) (pour $k = 2$), nous pouvons écrire

$$|\alpha_2 - e_2(\delta_2)| < \varepsilon_2.$$

En continuant ainsi, nous pouvons construire une suite indéfinie de points distincts entre eux $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ qui se trouvent tous à l'intérieur du cercle K_1 [α_n étant un des éléments $e(\delta_n)$ et l'ensemble $E(\delta_n)$ étant contenu dans $E(\delta_1)$] et satisfont aux inégalités

$$(B) \qquad |\alpha_k - e(\delta_k)| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$e(\delta_k)$ étant un élément quelconque de l'ensemble $E(\delta_k)$.

Il existe au moins *un point d'accumulation* A de ces points α_k.

Il nous reste à montrer que ce nombre A est la limite cherchée $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$.

Soit donc un nombre positif ε aussi petit qu'on veut. On peut toujours trouver un index N assez grand pour qu'on ait simultanément :

$$(C) \qquad |A - \alpha_N| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité (B) pour $k = N$ nous donne

$$|\alpha_N - e(\delta_N)| < \varepsilon_N,$$

ce qui entraîne, en vertu des inégalités (C), l'inégalité

$$|A - e(\delta_N)| < \varepsilon.$$

Donc nous avons trouvé une valeur paramétrique δ_N telle qu'on ait

$$|A - e(\delta_N)| < \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif quelconque donné d'avance. Ainsi, l'existence de $\lim\limits_{\upsilon=0} e(\delta)$ égale à A, est démontrée.

On démontre bien aisément que le point d'accumulation A est unique.

4. Conditions d'existence de l'intégrale définie. — En appliquant la règle de Cauchy-Bolzano généralisée à l'ensemble des expressions de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,\Delta_i$$

(*voir* § **2**, n° **4**), nous pouvons énoncer la condition suivante de l'existence de $\int_a^b f(x)\,dx$:

« Pour qu'il existe

$$\lim_{\Delta_i=0} \Sigma f(\xi_i)\,\Delta_i \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx,$$

il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$|e_1(\delta_0) - e_2(\delta_0)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$|\Sigma_1 - \Sigma_2| < \varepsilon,$$

Σ_1 et Σ_2 étant deux éléments quelconques de notre ensemble des sommes $\Sigma f(\xi_i)\Delta_i$, à la seule condition que tous les intervalles partiels Δ_i soient moindre que δ_0. »

Cette proposition permet d'établir dans certains cas l'existence de l'intégrale définie, ce qui offre, outre l'intérêt théorique, l'avantage méthodique de l'uniformité des procédés de démonstration, surtout si l'on compare avec les méthodes de démonstration usuelles. Par exemple, pour démontrer l'existence de l'intégrale définie d'une fonction *continue* et, pour établir les conditions d'intégrabilité dites de Riemann, on introduit les notions des *sommes supérieures* et *inférieures :*

$$\overline{S} = \Sigma M_i \Delta_i, \qquad \underline{S} = \Sigma m_i \Delta_i,$$

M_i étant la limite supérieure, et m_i la limite inférieure de $f(x)$ dans Δ_i.

Puis on démontre le théorème de Darboux sur l'existence des limites de ces sommes, nommées l'*intégrale supérieure* et l'*intégrale inférieure*, pour toute fonction *bornée*.

Pourtant, toutes ces notions auxiliaires sont superflues si l'on utilise le critère de Cauchy, énoncé plus haut.

En effet, pour une fonction *continue* $f(x)$, il suffit de démontrer de la manière bien connue (en comparant deux systèmes d'intervalles à un troisième système combiné d'eux) qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait $|\Sigma_1 - \Sigma_2| < \varepsilon$ toutes les fois que dans les sommes Σ_1 et Σ_2 tous les intervalles partiels Δ_i sont plus petits que δ. Alors, l'existence de $\int_a^b f(x)dx$ est une conséquence immédiate en vertu du criterium de Cauchy.

D'une manière aussi immédiate, on peut obtenir la condition d'intégrabilité de Riemann.

3. Condition d'existence des intégrales définies généralisées. — Pour donner encore un exemple de l'application de la règle Bolzano-Cauchy, j'indiquerai la démonstration exacte d'une condition d'existence relative aux intégrales définies *généralisées* (impropres, *uneigentlich*). On trouve cette condition dans le *Cours d'Analyse* de C. Jordan (t. II, 2e édition, p. 50-51).

Rappelons la définition donnée par M. Jordan :

Soit $f(x)$ une fonction intégrable (au sens ordinaire du mot) dans tout l'intervalle ab, sauf aux environs des points c_1, c_2, c_3, ..., en nombre infini. L'ensemble M de ces points singuliers est *fermé* (ou *parfait* selon la terminologie de M. Jordan).

En effet, si un de ses points d'accumulation x était point ordinaire de l'intervalle ab, la fonction $f(x)$ serait intégrable dans l'intervalle $x - h \ldots x + h$, si h est suffisamment petit. Mais, dans ce dernier intervalle, se trouveraient des points singuliers; donc, aux environs de ces points, $f(x)$ serait intégrable, contradictoirement à la supposition.

En décomposant le champ ab en intervalles partiels de longueur moindre qu'une quantité donnée d'avance δ, considérons ceux de ces intervalles qui ne contiennent, ni à leur intérieur, ni à leurs extrémités, aucun des points singuliers.

Ils formeront par réunion un domaine jouissant des propriétés suivantes :

1° Il contient tous les points de l'intervalle ab dont l'écart à l'ensemble fermé M est égal ou supérieur à δ;

2° Il est formé d'un nombre fini de portions $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., d'un seul tenant, séparées les unes des autres par des points singuliers.

Il est donc établi l'existence des domaines satisfaisant à ces deux conditions, où δ est un nombre positif arbitraire donné d'avance.

Soit D un domaine *quelconque* satisfaisant à ces conditions pour une valeur déterminée de δ. Nous l'appelons *domaine* D *correspondant à* δ.

Comme les intervalles $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$, ne contiennent pas de points singuliers, nous pouvons déterminer les intégrales

$$\int_{a_1}^{b_1} f\,dx, \quad \int_{a_2}^{b_2} f\,dx, \quad \ldots.$$

Nous représenterons leur somme $\Sigma \int_{a_i}^{b_i} f\,dx$ par le signe $\int_D f\,dx$ et l'appelons *l'intégrale de $f(x)$ prise dans le domaine* D.

Faisons δ décroître indéfiniment et, pour toute sa valeur, prenons un domaine D quelconque correspondant à lui. Ce domaine variable englobera progressivement tous les points de l'intervalle ab qui ne sont pas singuliers. En effet, un point ordinaire x ne peut être un point d'accumulation de l'ensemble M; donc son écart à cet ensemble est une quantité déterminée $\Psi(x)$ différente de zéro. Il sera donc englobé nécessairement par D (en vertu de la condition 1°) dès que δ sera devenu moindre que $\Psi(x)$.

Cela posé, M. Jordan donne la définition suivante de l'*intégrale généralisée* $\int_a^b f\,dx$:

« Si l'intégrale $\int_D f(dx)$ tend vers une limite déterminée quand δ tend vers zéro, cette limite sera désignée par $\int_a^b f\,dx$. »

Donnons à cette définition une forme plus précise :

« L'intégrale généralisée $\int_a^b f\,dx$ existe et est égale à A, si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel qu'on ait

$$\left|\int_D f\,dx - A\right| < \varepsilon$$

pour *tout* domaine D, correspondant à ce nombre δ. »

Après cela, M. Jordan donne la condition suivante de l'existence de l'intégrale définie généralisée (n° 54) :

« Pour que cette limite existe, *il faut et il suffit* évidemment qu'on puisse trouver, pour chaque valeur de ε, une quantité correspondante η telle que, en appelant D_1 et D_2 deux domaines quelconques correspondant à des valeurs de la variable δ moindres que η, on ait toujours

$$\left|\int f\,dx - \int_{D_2} f\,dx\right| < \varepsilon. \text{ »}$$

Mais cela serait *évident* ou plutôt serait une conséquence de la règle de convergence de Cauchy, démontrée dans le *Cours* de M. Jordan cité plus haut (t. Ier, p. 9) pour les suites des nombres, si, à toute valeur de la variable δ, correspondrait *un seul* domaine D déterminé. Alors l'intégrale $\int_D f\,dx$ représenterait une fonction uniforme de la varable δ et la conclusion serait légitime.

Mais ici, à toute valeur de δ, correspond une *infinité* de domaines D et de valeurs de l'intégrale correspondante. Donc, pour pouvoir faire la conclusion désirée, il faut auparavant généraliser la règle de Cauchy. C'est ce que nous avons fait plus haut (§ 3). Il reste à établir la correspondance paramétrique pour les intégrales $\int_D f\,dx$.

Soit $E(\delta_0)$ l'ensemble de toutes les intégrales $\int_D f\,dx$ chez lesquelles les domaines D correspondent à la valeur prise δ_0 de δ.

Si $\delta_1 > \delta_2$, l'ensemble $E(\delta_1)$ contiendra l'ensemble $E(\delta_2)$ parce qu'un domaine D, correspondant à la valeur δ_2, satisfera *a fortiori* aux conditions 1° et 2° pour la valeur δ_1 ; en effet, un ensemble contenant *tous* les points dont l'écart à l'ensemble M est $\geqq \delta_2$, contiendra par force *tous* les points dont l'écart est $\geqq \delta_1$ si $\delta_1 > \delta_2$.

On voit que $\lim\limits_{\delta=0} e(\delta)$ est identique à la limite désignée plus haut par $\int_a^b f\,dx$.

Maintenant nous pouvons appliquer le criterium de Cauchy-Bolzano généralisé (§ 3), ce qui nous donne la proposition suivante :

« Pour que l'intégrale généralisée $\int_a^b f\,dx$ existe, *il* *faut et il suffit* qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ corresponde un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'on ait

$$\left| \int_{D_1} f\,dx - \int_{D_2} f\,dx \right| < \varepsilon,$$

D_1 et D_2 étant deux domaines quelconques correspondant à ce nombre δ_0. »

Donc cette proposition, identique à la condition donnée par M. C. Jordan, peut être regardée maintenant comme rigoureusement démontrée.

Le dernier exemple montre l'utilité, même la nécessité, de la généralisation du critère de Bolzano. Il nous semble que son application directe doit fournir des simplifications importantes, sinon des résultats nouveaux, dans diverses questions d'Analyse se rapportant aussi aux intégrales multiples et curvilignes.

Quant à la définition de limite généralisée, elle pourra être appliquée à tous les ensembles ayant des points d'accumulation. Il suffit, en effet, de transformer un *point d'accumulation* (notion statique) en un *point limite* (notion dynamique) en établissant une correspondance paramétrique convenable décrite plus haut (§ 1) entre les parties de l'ensemble considéré et les valeurs positives du paramètre δ.

[K^{1}13a]

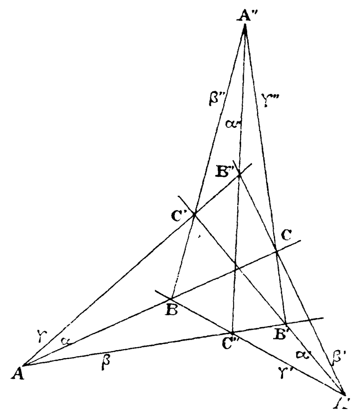
SUR UNE CONFIGURATION CONNUE (9 POINTS, 9 DROITES);

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note est relative à une configuration connue, dont il m'a paru intéressant d'étudier l'agencement; la figure 1 est empruntée aux Questions de Géométrie élémentaire de Desboves.

1. Étant donnés deux points A et A′ (*fig.* 1), si l'on

Fig. 1.



mène par A trois droites α, β, γ, et par A′ trois droites α', β', γ', les six droites α, β', γ, α', β, γ', sont les six côtés consécutifs d'un hexagone BCB″C′B′C″ dont les trois diagonales α'', β'', γ'' concourent en un point A″; c'est le théorème de Brianchon pour la conique formée des deux points A, A′.

Ou encore : Étant données deux droites α et α', si l'on prend sur α trois points A, B, C, et sur α' trois points A′, B′, C′, les six points A, B′, C, A′, B, C′ sont les six sommets consécutifs d'un hexagone dans lequel les points de rencontre A″, B″, C″ des couples de côtés opposés sont sur une même droite α''; c'est le théorème de Pascal pour la conique formée des deux droites α, α'.

[La droite α'' étant définie comme joignant les points B″ et C″, le point A″ étant défini comme le point de rencontre des droites β'' et γ'', le théorème consiste en ceci : la droite α'' passe au point A$''$, ou encore le point A$''$ est sur la droite α''; sous la première forme, cela résulte de ce que toutes les courbes du troisième ordre qui passent par huit points donnés passent par un neuvième point et, sous la seconde forme, cela résulte du fait corrélatif. C'est l'application à des cas particuliers de démonstrations bien connues pour les théorèmes de Pascal et de Brianchon.]

On a trois ternes de points et trois ternes de droites

$$(1)\left\{\begin{array}{l}(A,\ A',\ A''),\\(B,\ B',\ B''),\\(C,\ C',\ C'');\end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l}(\alpha,\ \alpha',\ \alpha''),\\(\beta,\ \beta',\ \beta''),\\(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'');\end{array}\right.$$

si l'on part des points, chacune des neuf droites qui joignent un point du premier terne à un point du second passe par un point du troisième, et ces neuf droites sur celle du tableau (2); *on a un énoncé corrélatif.* Les neufs alignements sont :

$$\begin{array}{ll}(ABC,\ A'B'C',\ A''B''C''), & \text{droites } (\alpha,\ \alpha',\ \alpha''),\\(AB'C'',\ A'B''C,\ A''BC'), & \text{droites } (\beta,\ \beta',\ \beta''),\\(AB''C',\ A'BC'',\ A''B'C), & \text{droites } (\gamma,\ \gamma',\ \gamma'');\end{array}$$

les trois lettres A, B, C sont affectées du même accent, ou de trois accents différents. Ces neuf alignements correspondent aux colonnes du tableau (1), aux termes positifs du déterminant symbolique donné par ce tableau, aux termes négatifs de ce même déterminant.

L'existence de neuf droites comprenant chacune trois points du tableau (1), *ou corrélativement l'existence de neuf points appartenant chacun à trois droites du tableau* (2), *forme neuf conditions qui se trouvent réduites à huit.* La figure dépend de dix paramètres.

2. *Les trois triangles*

$$BCA', \quad B'C'A'', \quad B''C''A$$

sont tels que le premier est inscrit au second, le second au troisième, le troisième au premier, attendu que le point B est sur la droite $C'A''$, le point C sur la droite $B'A''$, le point A' sur la droite $B'C'$, etc.; il en est de même des triangles

$$CAB', \quad C'A'B'', \quad C''A''B,$$

ou

$$ABC', \quad A'B'C'', \quad A''B''C.$$

Les trois triangles

$$BCA'', \quad B'C'A, \quad B''C''A'$$

sont tels que le premier est circonscrit au second, ...; il en est de même des triangles

$$CAB'', \quad C'A'B, \quad C''A''B',$$

ou

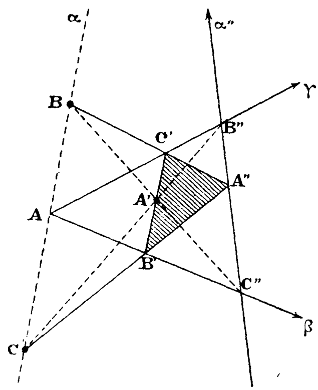
$$ABC'', \quad A'B'C, \quad A''B''C'.$$

Si l'on se donne les deux triangles BCA' *et* $B''C''A$ *dont le second est inscrit au premier, ce qui fait neuf paramètres, un triangle* $B'C'A''$ *peut varier en restant circonscrit au premier des deux triangles donnés et inscrit au second.*

Ce théorème est bien connu sous une autre forme, pour laquelle nous adopterons la disposition de la figure (2) :

On donne deux droites β, γ, *et deux points* B, C, *tels que la droite* α *joignant les deux points passe par le point* A *commun aux deux droites, et l'on considère un triangle variable* $B'C'A''$ *dont deux sommets* B' *et* C' *décrivent les deux droites fixes et* *dont les côtés opposés à ces sommets passent par les deux points fixes. Si le troisième côté* α' *passe par*

Fig. 2.



un point fixe A′, *le troisième sommet* A″ *décrit une droite fixe* α''; toutefois, quand le côté α' passe en A, le point A″ s'indétermine sur la droite α, qui est ainsi une partie parasite du lieu de ce point. La démonstration directe est aisée. On obtient deux points B″, C″ de la droite α'' en faisant passer la droite α' par l'un des points C, B; on a ainsi (le lieu ci-dessus étant étudié directement) une démonstration bien connue du théorème de Pascal pour la conique formée des deux droites α et α'', la droite de Pascal étant α'.

Corrélativement, *si le sommet* A″ *du triangle variable décrit la droite* α'', *le troisième côté* α' *passe par un point fixe* A′; toutefois, quand le sommet A″ vient sur α, le côté α' s'indétermine autour du point A. Etc.

Le triangle qui a pour côtés les droites β, γ, α'' décrites par les trois sommets du triangle variable est, comme on l'a déjà observé, inscrit au triangle qui a pour sommets les trois pivots B, C, A′.

[K[1] 13a]

SUR UNE CONFIGURATION CONNUE (9 POINTS, 12 DROITES); POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE PLANE;

Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. Dans une Note précédente ([1]), j'ai considéré une configuration connue (9 points, 9 droites). Les neuf points étant ceux du Tableau

$$\begin{array}{|ccc} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{array}$$

chacune des neuf droites qui joignent un point de la première ligne à un point de la seconde passe par un point de la troisième (*fig.* 1). *Si l'on veut que la droite joignant deux quelconques des neuf points passe par un troisième*, il faudra que chaque ligne horizontale du Tableau donne encore trois points alignés (on verra que la figure ne peut alors être réelle). Les douze droites sont :

(1)	(A B C, A'B'C', A''B''C''),
(2)	(A B'C'', A'B''C, A''B C'),
(3)	(A B''C', A'B C'', A''B'C),
(4)	(A A'A'', B B'B'', C C'C'');

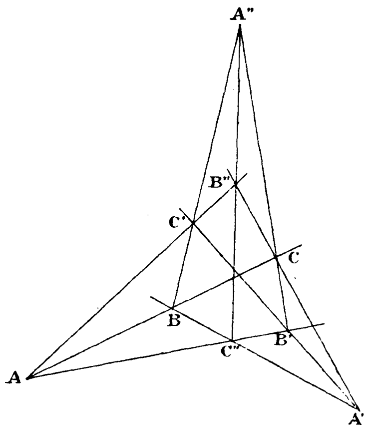
elles correspondent aux colonnes du Tableau ci-dessus, à ses lignes, aux termes positifs du déterminant symbo-

([1]) Même numéro, p. 64.

lique donné par ce Tableau à ses termes négatifs (règle de Clebsch pour les neuf points d'inflexion d'une cubique plane).

Les neuf conditions relatives à la configuration précédemment étudiée se réduisent à huit, comme on l'a vu.

Fig. 1.



Les trois conditions nouvelles qu'on impose ici se réduisent à deux, et ce fait est une conséquence du premier. En effet, si l'on considère le Tableau

$$\begin{array}{|ccc} A & B & C \\ A' & B' & C', \\ A'' & B'' & C'' \end{array}$$

il arrive déjà que chacun des six alignements

$$\begin{array}{l} AB'C'', \ BC'A'', \ CA'B'', \\ AB''C', \ BC''A', \ CA''B' \end{array}$$

est réalisé ; dès lors, deux des alignements

$$AA'A'', \quad BB'B'', \quad CC'C''$$

entraînent le troisième. *Ainsi, les douze conditions apparentes se réduisent à dix conditions distinctes; le système dépend de huit paramètres.*

2. Avant d'aller plus loin, il nous sera commode de modifier pour un certain temps la notation. On a remarqué précédemment que, dans la configuration primitive, les trois triangles

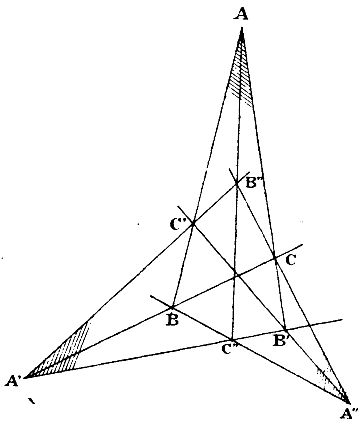
$$A''BC, \quad AB'C', \quad A'B''C'',$$

par exemple, sont tels que le premier est circonscrit au second, le second au troisième, le troisième au premier. Si l'on remplace les notations A'', A, A' par les notations A, A', A'', les trois triangles

$$ABC, \quad A'B'C', \quad A''B''C''$$

seront tels (*fig.* 2) que le premier est circonscrit au

Fig. 2.



second, etc. On aura de plus ici les alignements $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$. C'est cette notation qui va se présenter naturellement à nous dans la recherche suivante.

Proposons-nous *a priori* de déterminer un système de neuf points tel que la droite joignant deux quelconques de ces points passe par un troisième.

Comme il doit passer quatre droites par chaque point, le nombre de ces droites sera $\frac{9 \times 4}{3} = 12$. Si A, B, C sont trois des neuf points qui ne sont pas en ligne droite, chacun des côtés BC, CA, AB doit porter un troisième point du système ; soient A', B', C' les points en question. Les trois derniers points A'', B'', C'' doivent être d'une part sur les droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, d'autre part sur les droites AA', BB', CC', puisque chacune de ces six droites ne porte jusqu'à présent que deux points du système ; par suite A'', B'', C'' sont les intersections respectives des droites $B'C'$ et AA', $C'A'$ et BB', $A'B'$ et CC'. Mais on n'a, jusqu'à présent, que neuf droites, et il faut encore que le triangle $A''B''C''$ soit circonscrit au triangle ABC, car la droite AB'', par exemple, ne peut contenir aucun des points B, C, B', C', A', A'', et cette droite doit passer en C''. Finalement, les trois triangles ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sont tels que le premier est circonscrit au second, etc. et l'on a en outre les alignements $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$; le système indiqué au début de cette Note est le seul qui réponde à la question.

3. Conservons les mêmes notations. Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, les coordonnées des points A', B', C' seront

$$(0,\ a,\ 1),\quad (1,\ 0,\ b),\quad (c,\ 1,\ 0).$$

Celles des points A'', B'', C'' seront de la forme

$$(m,\ a,\ 1),\quad (1,\ n,\ b),\quad (c,\ 1,\ p),$$

en tenant compte des alignements $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, et l'on aura les conditions

$$m = \frac{abc+1}{b}, \qquad n = \frac{abc+1}{c}, \qquad p = \frac{abc+1}{a},$$

en exprimant que le triangle A″B″C″ est inscrit au triangle A′B′C′; la première condition exprime, par exemple, que les points A″, B′, C′ sont en ligne droite

$$\begin{vmatrix} m & a & 1 \\ 1 & 0 & b \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$abc + 1 = \omega,$$

on a pour les coordonnées des points A″, B″, C″,

$$\left(\frac{\omega}{b}, a, 1\right), \quad \left(1, \frac{\omega}{c}, b\right), \quad \left(c, 1, \frac{\omega}{a}\right).$$

On a jusqu'ici neuf conditions. Il faut maintenant que le triangle A″B″C″ soit circonscrit au triangle ABC, et nous savons déjà que les trois conditions impliquées par cet énoncé se réduisent à une seule.

On le vérifie aisément. Supposons que les points A, B″, C″ soient en ligne droite, et considérons le Tableau

$$\left|\begin{array}{lll} B & C'' & A'' \\ B' & C & A \\ B'' & C' & A'; \end{array}\right.$$

les huit alignements autres que l'alignement C, A″, B″ ayant lieu par hypothèse, ce dernier a lieu aussi. En considérant le Tableau

$$\left|\begin{array}{lll} C & A'' & B'' \\ C' & A & B \\ C'' & A' & B', \end{array}\right.$$

on voit de même que les points $BC''A''$ sont en ligne droite.

Analytiquement, le fait que les points A, B″, C″ sont en ligne droite, se traduit par l'égalité

$$\frac{\omega}{c} : b = 1 : \frac{\omega}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega}{bc} = \frac{a}{\omega};$$

on doit donc avoir, en se rappelant la définition de ω,

$$(5) \qquad abc = \omega^2, \qquad \omega^2 - \omega + 1 = 0,$$

ω *étant ainsi une racine cubique imaginaire de l'unité négative*. On peut écrire pour les coordonnées des points A″, B″, C″

$$\left(1, \frac{\omega}{c}, \frac{b}{\omega}\right), \quad \left(\frac{c}{\omega}, 1, \frac{\omega}{a}\right), \quad \left(\frac{\omega}{b}, \frac{a}{\omega}, 1\right).$$

Les huit paramètres du système sont les six paramètres des points A, B, C, et deux des trois quantités a, b, c liées par la relation (5).

Les quatre droites ABC′, AB′C, AB″C″, AA′A″ issues du point A, ont pour équations

$$z = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{y}{z} = \frac{a}{\omega}, \qquad \frac{y}{z} = a;$$

des six rapports anharmoniques fournis par ces quatre droites, trois sont égaux à l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité négative, et les trois autres à la racine conjuguée : un tel faisceau de quatre droites est dit *équianharmonique* [1].

4. Les neuf points considérés sont les pivots d'un

[1] Avec des axes de coordonnées quelconques Ax, Ay, les coefficients angulaires des quatre droites sont racines d'une équation du quatrième degré dont l'invariant S est nul (SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 269).

faisceau de cubiques planes, puisque ce sont les intersections de trois droites par trois autres (et cela de six manières) ; *toutes ces cubiques ont pour point d'inflexion les points en question*. Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, l'équation

$$(6)\quad A\,cyz\,(y-az)+B\,azx\,(z-bx)+C\,bxy\,(x-cy)-xyz=0$$

représente en effet des cubiques qui passent par les points A, B, C et par les points A′, B′, C′ ; si l'on écrit qu'elles passent par les points A″, B″, C″, on a les conditions

$$\frac{B}{\omega}+C=1,\qquad \frac{C}{\omega}+A=1,\qquad \frac{A}{\omega}+B=1,$$

lesquelles se réduisent à deux. On constate facilement que le point A, par exemple, est un point d'inflexion, la tangente étant $Cy=Baz$; il en est de même des points B et C ; comme les trois triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″ jouent le même rôle, les neuf points sont des points d'inflexion. On retrouve bien les neuf paramètres d'une cubique, puisque a, b, c doivent vérifier la relation $abc=\omega^2$.

Le résultat précédent ne diffère que par la forme de celui-ci qui est dû à Hesse : toute cubique menée par les neuf points d'inflexion d'une cubique a aussi ces points pour points d'inflexion. (En particulier, la hessienne d'une cubique a les mêmes points d'inflexion que la courbe elle-même.)

II.

5. Nous reprendrons ici les notations primitives. Prenons comme triangle de référence l'un des quatre triangles qui ont pour côtés les quatre groupes de trois

droites :

(1) $\quad (ABC,\ A'B'C',\ A''B''C''),$

(2) $\quad (\ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots),$

(3) $\quad (\ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots),$

(4) $\quad (AA'A'',\ BB'B'',\ CC'C'');$

ces triangles, dont chacun porte sur ses côtés les neuf points considérés, sont appelés *triangles inflexionnels* dans la théorie des cubiques. Prenons, par exemple, le triangle LMN dont les côtés portent respectivement les points A, A′, A″, les points B, B′, B″, les points C, C′, C″.

Si θ est une racine cubique imaginaire de l'unité positive, on peut réprésenter les neuf points par les relations

$$\frac{AM}{AN} = \alpha, \qquad \frac{A'M}{A'N} = \theta\alpha, \qquad \frac{A''M}{A''N} = \theta^2\alpha,$$

$$\frac{BN}{BL} = \beta, \qquad \frac{B'N}{B'L} = \theta\beta, \qquad \frac{B''N}{B''L} = \theta^2\beta,$$

$$\frac{CL}{CM} = \gamma, \qquad \frac{C'L}{C'M} = \theta\gamma, \qquad \frac{C''L}{C''M} = \theta^2\gamma,$$

avec

(7) $$\alpha\beta\gamma = 1;$$

on a bien huit paramètres.

Voici la démonstration. On a pour les coordonnées du point A, par exemple,

$$x = 0, \qquad \frac{z}{y} = -\alpha\frac{\sin\widehat{M}}{\sin\widehat{N}},$$

ou, en remplaçant α, β, γ par $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\nu}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\mu}$,

$$x = 0, \qquad \mu\sin\widehat{M}.y = -\nu\sin\widehat{N}.z;$$

en posant

$$X = \lambda\sin\widehat{L}.x, \qquad Y = \mu\sin\widehat{M}.y, \qquad \ldots,$$

les coordonnées X, Y, Z des neuf points sont :

$$
\begin{array}{lll}
(\ 0,\ 1,\ -1), & (\ 0,\ 1,\ -\theta), & (\ 0,\ 1,\ -\theta^2),\\
(-1,\ 0,\ 1), & (-\theta,\ 0,\ 1), & (-\theta^2,\ 0,\ 1),\\
(\ 1,\ -1,\ 0), & (\ 1,\ -\theta,\ 0), & (\ 1,\ -\theta^2,\ 0).
\end{array}
$$

Conformément au Tableau de Clebsch

$$
\begin{array}{c}
A\,A'\,A''\\
B\,B'\,B''\\
C\,C'\,C'',
\end{array}
$$

les quatre systèmes de trois droites auxquels donnent lieu les douze points sont :

$$
\begin{array}{llll}
(1) & X+Y+Z=0, & X+\theta^2 Y+\theta Z=0, & X+\theta Y+\theta^2 Z=0,\\
(2) & \theta^2 X+Y+Z=0, & X+Y+\theta^2 Z=0, & X+\theta^2 Y+Z=0,\\
(3) & \theta X+Y+Z=0, & X+\theta Y+Z=0, & X+Y+\theta Z=0,\\
(4) & X=0, & Y=0, & Z=0.
\end{array}
$$

6. L'équation générale des cubiques passant par les neuf points est

$$(X+Y+Z)(X+\theta^2 Y+\theta Z)(X+\theta Y+\theta^2 Z)+h\,XYZ=0,$$

ou

$$(8) \qquad X^3+Y^3+Z^3-3k\,XYZ=0\,;$$

c'est l'équation canonique habituelle. On vérifie que la droite $X=0$ contient trois points d'inflexion en mettant l'équation sous la forme

$$(kX+Y+Z)(kX+\theta^2 Y+\theta Z)(kX+\theta Y+\theta^2 Z)=(k^3-1)\,X^3\,;$$

les tangentes aux points d'inflexion A, A', A'' sont en évidence.

III.

7. Le Tableau de Clebsch peut être écrit sous la forme

00	01	02
10	11	12
20	21	22,

chacun des neuf points étant désigné par deux nombres (comme un élément d'un déterminant). *Trois des neuf points sont alors en ligne droite si la somme des premiers indices, aussi bien que celle des seconds, est multiple de* 3. Les couples numériques 00, 01, ... acquièrent un sens réel par la théorie des fonctions elliptiques, et l'énoncé précédent se présente alors de lui-même.

IV.

8. Les seize points d'une biquadratique gauche en lesquels le plan osculateur est surosculateur sont tels que le plan qui passe par trois quelconques de ces points passe par un quatrième. Comme il passe cinq plans par chaque point, le nombre de ces plans est

$$\frac{16 \times 5}{4} = 20.$$

[R3a]

SUR LE MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UNE DROITE;

PAR M. A. PAILLARD.

Dans la théorie des vecteurs, on définit en général le moment par rapport à un *axe*. Il y a cependant avantage, semble-t-il, à introduire tout d'abord la notion plus générale de moment par rapport à une *droite*, sur laquelle aucun sens n'aurait été choisi au préalable pour être appelé positif. L'exposition de la théorie se trouve ainsi légèrement simplifiée. Il faut aussi remarquer que, dans la plupart des applications, on considère des moments par rapport à des droites, et non par rapport à des axes.

On trouvera dans cette courte Note une esquisse de la théorie classique des moments, modifiée dans l'ordre d'idées que je viens d'indiquer.

Rappelons d'abord quelques propriétés.

On dit qu'un vecteur CD est de sens positif par rapport à un vecteur AB, lorsqu'un observateur, placé les pieds en A et la tête en B, et regardant C, voit CD à la droite du plan ABC.

Cette définition ne dépend, ni des grandeurs de AB et CD, ni des positions de ces vecteurs sur leurs supports. Elle suppose que les deux vecteurs ne sont pas dans un même plan.

Si deux vecteurs CD, CE, *dont l'un est perpendiculaire au plan* ABC, *forment entre eux un angle aigu, ils sont du même côté de ce plan et, par conséquent, ils ont même sens par rapport à* AB.

Réciproquement, si deux vecteurs CD, CE, dont l'un est perpendiculaire au plan ABC, sont de même sens par rapport au vecteur AB, ils forment entre eux un angle aigu.

Le sens de AB *par rapport à* CD *est le même que celui de* CD *par rapport à* AB. (Ce sens commun sera dit *sens relatif des deux vecteurs.*)

D'après la définition, on peut, sans changer ces deux sens, amener les deux origines A et B des vecteurs aux pieds de la perpendiculaire commune aux supports 1 et 2 de ces vecteurs, et donner des grandeurs égales aux deux vecteurs. Le tétraèdre ABCD admet alors un axe de symétrie, qui est la bissectrice Δ de l'angle formé par les projections des deux vecteurs sur le plan médiateur de AC, et une rotation de 180° autour de Δ amène AB sur CD, en même temps que CD sur AB. Il résulte de là que ce qu'on peut dire du vecteur situé sur la droite 2 par rapport au vecteur situé sur la droite 1, se dit, selon l'instant, de AB par rapport à CD, ou de CD par rapport à AB, ce qui démontre la propriété.

Par définition, le moment du vecteur AB par rapport à la droite D est le moment, par rapport à un point O de la droite D, du vecteur *ab*, projection de AB sur le plan P mené par O perpendiculaire à la droite D; c'est un vecteur porté par D.

On montre aisément que ce moment ne dépend pas du choix de O sur D.

Théorème. — *Quel que soit le point* O *choisi sur* D, *le moment* OH *de* AB *par rapport à* D *est la projection sur* D *du moment* OG *de* AB *par rapport à* O.

On voit aisément que OH a même grandeur que la projection de OG sur D. Il est donc, ou cette projection, ou opposé à cette projection. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que l'angle des vecteurs OG, OH est aigu.

Or, par définition, OH et *ab* sont de sens relatif positif; l'observateur OH regardant *a*, voit *ab* à sa droite. Il voit en même temps A devant lui, A*a* étant parallèle à D; il voit par suite AB à sa droite en même temps que *ab*, B*b* étant parallèle au plan DA*a*, parce que parallèle à D. Il résulte de là que OH et AB sont aussi de sens relatif positif.

OH et OG sont donc tous deux de sens positif par rapport à AB; et comme OG est perpendiculaire au plan OAB, l'angle GOH est aigu, et OH est bien la projection de OG.

On déduit de là la définition du moment d'un système de vecteurs par rapport à une droite D. C'est un vecteur parfaitement déterminé.

Dans le cas particulier où la droite D devient un *axe*, c'est-à-dire lorsqu'on choisit sur D un sens positif, les mesures des vecteurs portés par D deviennent des nombres algébriques. Mais le moment par rapport à D d'un système de vecteurs est un vecteur, complètement indépendant du sens qu'on peut choisir sur D.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1913).

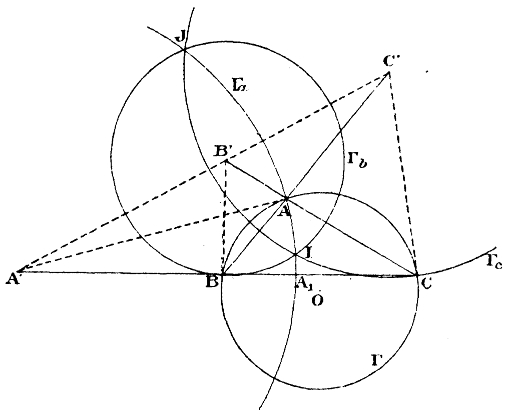
Mathématiques élémentaires.

Soit T *un triangle dont les sommets sont* A, B, C; *soit* Γ *le cercle circonscrit à* T. *On sait qu'il y a deux cercles tangents à* Γ *en* A *et qui touchent* BC : *l'un, en un point* A_1 *situé entre* B *et* C, *l'autre en un point* A_2 *extérieur au segment* BC.

1° *Construire le triangle* T *connaissant les longueurs* AA_1, AA_2 *et le côté* BC.

2° *Soit* A' *le milieu de* A_1A_2. *Calculer la lon-*

gueur AA′ *en fonction des longueurs* a, b, c, *des côtés de* T (*on supposera* $a > b > c$). *Trouver la relation qui existe entre la longueur* AA′ *et les deux autres longueurs analogues* BB′ *et* CC′.



3° *Calculer en fonction de* a, b, c, *les distances des points* A′, B′, C′, *deux à deux.*

4° *Soit* Γ_a *le cercle décrit de* A′ *comme centre avec* AA′ *comme rayon; soient* Γ_b *et* Γ_c *les deux autres cercles analogues. Démontrer que ces trois cercles se coupent en deux points* I *et* J. *Calculer les angles sous lesquels ces cercles se coupent deux à deux. Indiquer la situation précise des centres de similitude de ces cercles deux à deux. Quelles sont les particularités du triangle* A″ B″ C″ *dont les sommets sont les points homologues de* A, B, C, *dans une inversion de pôle* I?

5° *Calculer la longueur de la corde* IJ *et la distance du centre* O *de* Γ *à la droite* A′B′, *en fonction de* a, b, c.

6° *On donne les points* A′, B′, C′. *Démontrer qu'il* *existe une infinité de triangles* T *correspondants et construire ceux de ces triangles qui répondent à une valeur donnée du rayon de* Γ.

SOLUTION PAR M. THIÉ.

1° Considérons par exemple le cercle tangent à Γ en A et qui touche BC en A_1. Ce cercle rencontre AB et AC respectivement en deux points β et γ tels que $\beta\gamma$ soit parallèle à BC, puisque A est un centre de similitude de Γ et du cercle dont il s'agit. A_1 est donc milieu de l'arc $\beta\gamma$ et l'on en conclut que AA_1 est la bissectrice intérieure de l'angle BAC.

On reconnaît de même que AA_2 est la bissectrice extérieure de l'angle BAC.

Le point de rencontre A' de BC avec la tangente en A à Γ est le milieu de A_2A_1, puisque l'on a

$$A_2A' = A'A = A'A_1.$$

Si l'on se donne les longueurs AA_1 et AA_2, on peut construire le triangle AA_1A_2, rectangle en A. On a ensuite

$$A'B.A'C = \overline{A'A_1}^2, \qquad A'C - A'B = BC.$$

On est donc ramené au problème classique : *construire deux segments connaissant leur différence et leur produit.* On peut aussi donner la solution suivante : Comme B et C divisent harmoniquement le segment A_1A_2, le cercle de diamètre BC coupe orthogonalement le cercle de diamètre A_1A_2. Le système de ces deux cercles, tous deux de grandeur connue, se construit aisément, et la construction s'achève immédiatement. Le problème est toujours possible. Il n'a qu'une solution, s'il est bien spécifié que le point A doit être intérieur, et le point A extérieur à BC. Il en aurait deux dans l'hypothèse contraire.

2° On a $AA' = \frac{1}{2} A_2 A_1$. Or, la longueur du segment $A_2 A_1$ est facile à évaluer, les points A_2 et A_1 divisant BC, extérieurement et intérieurement, dans le rapport $\frac{c}{b}$. On a

$$A_2 C = \frac{ab}{b-c}, \qquad A_1 C = \frac{ab}{b+c},$$

d'où

$$A_2 A_1 = \frac{2abc}{b^2 - c^2}$$

et

$$(1) \qquad AA' = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

On trouvera de même, en ayant égard aux hypothèses faites dans l'énoncé sur les grandeurs relatives de a, b, c,

$$(2) \qquad BB' = \frac{abc}{a^2 - c^2},$$

$$(3) \qquad CC' = \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Au moyen de ces expressions, on forme aisément la relation

$$(4) \qquad \frac{1}{BB'} = \frac{1}{AA'} + \frac{1}{CC'}.$$

On reconnaît encore que les points A′, B′, C′ sont en ligne droite (théorème connu). Signalons aussi les relations

$$(5) \qquad \frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{B'C}{B'A} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{C'A}{C'B} = \frac{b^2}{a^2},$$

qui résultent des propriétés connues des divisions harmoniques.

3° Calculons $B'C'$. On peut appliquer le théorème de Stewart. On peut aussi procéder comme il suit : posons pour un moment

$$B'A = Kb, \qquad C'A = K'c.$$

On a

$$\overline{B'C'}^2 = K^2 b^2 + K'^2 c^2 - 2KK'bc \cos A;$$

mais

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

On en tire, par élimination de $\cos A$,

$$\overline{B'C'}^2 = KK'a^2 + (K - K')(Kb^2 - K'c^2)$$

Mais

$$K = \frac{c^2}{a^2 - c^2}, \qquad K' = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

On trouve, tous calculs faits,

$$B'C' = \frac{abc}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} P, \tag{6}$$

en posant

$$P = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}.$$

On trouvera de même

$$A'C' = \frac{abc}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} P, \tag{7}$$

$$A'B' = \frac{abc}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} P. \tag{8}$$

$B'C'$, $A'C'$ et $A'B'$ sont positifs, et l'on a $A'C' > A'B'$, ce qui prouve que le point B' est entre les points A' et C'.

En comparant les formules (1), (2), (3) et (6), (7), (8), on voit encore qu'on a

$$AA'.B'C' = BB'.A'C' = CC'.A'B'. \tag{9}$$

4° Le cercle Γ_a est le lieu des points M tels qu'on ait

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b},$$

ou

$$bMB = cMC.$$

Les cercles Γ_b et Γ_c sont susceptibles de définitions analogues. Si donc I est l'un des points de rencontre de ces deux derniers cercles, on a

$$aIA = bIB = cIC,$$

d'où l'on conclut que le point I appartient au cercle Γ_a. De même, le second point d'intersection J des deux cercles Γ_b et Γ_c. On verra plus loin que les points I et J sont réels.

On peut remarquer aussi que, B_1, B_2, C_1, C_2 étant les points analogues aux points A_1 et A_2, les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c ont pour diamètres respectifs les diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre droites $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$, $A_1B_1C_2$, $A_2B_2C_2$. Il en résulte, en vertu d'un théorème bien connu, qu'ils ont deux points communs.

Comme les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c coupent orthogonalement le cercle Γ, le centre O de celui-ci appartient à leur axe radical commun. Les trois points O, I, J sont donc en ligne droite.

Considérons maintenant une inversion de pôle A′ et de puissance $\overline{A'A}^2$ ou, plus brièvement, une inversion par rapport au cercle Γ_a. Cherchons l'inverse du cercle Γ_b. C'est un cercle qui doit passer par les points I et J, communs à Γ_a et à Γ_b, et par le point C, homologue du point B. Ce cercle se confond donc avec Γ_c. On voit de même que :

Deux quelconques des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c sont inverses par rapport au troisième.

Il résulte de là que deux de ces cercles coupent le troisième sous le même angle. Autrement dit, leurs tangentes, en l'un de leurs points communs, sont telles que chacune est la bissectrice de l'angle formé par les deux autres. Cela exige nécessairement que :

Les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c *se coupent mutuellement sous des angles de* 60°.

On voit aussi que le centre de chacun des trois cercles est l'un des centres de similitude des deux autres [cela résultait déjà des formules (9)]. L'examen de la disposition des trois points A', B, C' montre que le premier et le troisième sont des centres de similitude *externes*, et que le second est un centre de similitude *interne*. Les autres centres de similitude se trouvent aisément. Par exemple, le centre de similitude interne des cercles Γ_b et Γ_c est le conjugué harmonique de A' par rapport à B'C'. Il est donc sur la polaire du point A' par rapport à l'angle formé par les deux droites BB' et CC' (polaire qui se confond avec celle du point A' par rapport au cercle Γ). Cette polaire est la droite qui joint le point A au point qui divise intérieurement BC dans le rapport $\frac{c^2}{b^2}$. C'est donc, en vertu d'une propriété connue, une *symédiane* du triangle ABC.

Remarquons maintenant que le cercle BIC, de même que tout cercle passant par les points B et C, coupe orthogonalement le cercle Γ_a. Les cercles CIA, AIB jouissent de propriétés analogues. Ils se coupent donc mutuellement sous des angles de 60°. Si l'on fait une inversion de pôle I, transformant les points A, B, C en A'', B'', C'', la droite B''C'' est l'inverse du cercle BIC, etc. Les trois droites B''C'', C''A'', A''B'' se coupent donc mutuellement sous des angles de 60°, et le *triangle* A'' B'' C'' est *équilatéral*.

5° Les points I et J sont symétriques par rapport à B′C′. Donc IJ est le double de la hauteur du triangle IB′C′. En évaluant de deux manières différentes l'aire de ce triangle, et en se rappelant que l'angle B′IC′ est de 60°, on a

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{B'C'.IJ} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{IB'.IC'}.$$

Mais IB′ = B′B, IC′ = C′C. On a donc, en tenant compte des valeurs (2), (3) et (6),

$$\mathrm{IJ} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{a^2 - c^2}\,\frac{abc}{a^2 - b^2}\,\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{abc\,\mathrm{P}} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{\mathrm{P}}.$$

IJ étant réel, les deux points I et J sont aussi réels (cas, s'ils étaient imaginaires, leur distance serait une imaginaire pure).

Soit D la distance du point O à la droite A′B′C′. On a

$$2\mathrm{D} = \mathrm{OI} + \mathrm{OJ}.$$

mais OI.OJ = R^2, R étant le rayon de Γ, et

$$|\,\mathrm{OI} - \mathrm{OJ}\,| = \mathrm{IJ} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{\mathrm{P}}.$$

Donc

$$4\mathrm{D}^2 = \frac{3abc}{\mathrm{P}^2} + 4\mathrm{R}^2.$$

Or

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\mathrm{S}},$$

S étant l'aire du triangle *abc*.

Finalement

$$4\mathrm{D}^2 = abc\left(\frac{3}{\mathrm{P}^2} + \frac{1}{4\mathrm{S}^2}\right).$$

6° Étant donnés les points A′, B′, C′, le point I, tel que les angles B′IC′ et A′IB′ soient de 60° se construit aisément. On connaît donc les cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c.

Proposons-nous alors de construire le triangle ABC, connaissant le rayon R du cercle Γ. Le centre O de ce cercle doit appartenir à IJ, et être tel qu'on ait

$$OI.OJ = R^2.$$

On peut donc construire le point O de deux manières.

Le cercle Γ étant connu, il coupe chacun des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c en deux points. Ces points, associés convenablement, donnent deux triangles ABC satisfaisants. En effet, soit B l'un des points où Γ rencontre Γ_b. Dans une inversion par rapport au cercle Γ_a, Γ se transforme en lui-même et Γ_b se transforme en Γ_c. Donc, au point B correspond l'un des deux points C où Γ rencontre Γ_c. De même, le point B détermine sans ambiguïté le point A. Il reste à vérifier que AC passe bien par B'. Or cela résulte immédiatement de ce que AA', CC', BB' sont les tangentes en A, C, B au cercle Γ. Les deux premières rencontrant les côtés BC et AB respectivement aux points A' et C', le point de rencontre B' de la tangente en B et de A'C' doit nécessairement appartenir à AC.

En résumé, étant donné le rayon du cercle Γ, on trouve *quatre* triangles satisfaisants, deux à deux symétriques par rapport à A'B'C'. Si l'on fait varier R, on trouve une infinité de triangles répondant à la question.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur la dynamique des systèmes matériels, par *Et. Delassus*. — Grand in-8 de 421 pages et 15 figures. Paris, A. Hermann et fils, 1913. Prix : 14[fr].

Ce Cours, que M. E. Delassus a professé pendant plusieurs années à l'Université de Bordeaux, comprend « l'exposition systématique, avec les perfectionnements résultant de travaux récents, des théories élémentaires de la *Mécanique analytique*, c'est-à-dire des conséquences de l'équation de Dalembert, à la fois au point de vue théorique et au point de vue pratique de la résolution effective des problèmes de dynamique ». Mais sous cette apparence modeste, c'est une œuvre didactique originale et forte, appelée à devenir rapidement et à rester classique.

La Mécanique analytique est essentiellement l'étude des systèmes matériels à liaisons ; mais la notion de liaison a été laissée pendant un siècle dans certain vague, jusqu'à ce que la considération des mouvements de roulement eût amené à reconnaître que les liaisons ne pouvaient pas toutes être exprimées par des équations finies entre les paramètres et que certaines se traduisaient par des relations différentielles non intégrables. On distingue alors, selon le mot de Hertz, les systèmes matériels en systèmes holonomes et non holonomes, les équations de liaison des derniers étant linéaires par rapport aux différentielles des paramètres. Il était tout indiqué d'envisager des liaisons analogues, mais analytiquement plus complexes. Du même coup se posait, plus impérativement, la question de la réalisation matérielle de ces liaisons, laquelle peut se faire sans adjoindre, au système donné, des corps auxiliaires (réalisation directe) ou en introduisant de tels corps (réalisation indirecte, où le système proposé devient une portion d'un système plus étendu soumis à des liaisons directes). En admettant que le système auxiliaire soit sans masse, on arrive finalement à des équations du mouvement dans lesquelles le procédé de réalisation des liaisons n'a pas laissé de traces. Mais la manière dont on écrit ces équations implique cette définition : les liaisons sont réalisées matériellement quand les déplacements virtuels du système considéré comme partie d'un système plus complexe sont les mêmes que ceux définis par ses équations de liaisons.

C'est là un point de départ qui introduit évidemment un élément étranger à la notion immédiate et intuitive de liaison. Aussi M. Delassus ne l'admet-il pas : pour lui, « les liaisons sont réalisées par l'adjonction d'un système S_1 quand, des relations entre les paramètres de S et S_1 qui expriment les liaisons du système total, ne résultent entre les paramètres de S que les relations qui expriment les liaisons de ce système ». Cette définition naturelle (qui peut être en désaccord avec la précédente) se traduit sous forme analytique générale, et elle permet d'obtenir une exposition tout à fait logique, évitant les paradoxes.

A un autre point de vue, dans l'étude des liaisons unilatérales, on admet d'ordinaire « comme évidente la cessation effective et simultanée de plusieurs contacts dont les réactions sont négatives ». C'est là un postulat inadmissible, ainsi que le montre M. Delassus qui rectifie ainsi toute une importante théorie.

Il fallait commencer par indiquer ces choses de fondation, qui caractérisent le présent Livre, quoique l'Ouvrage entier fût très personnel. C'est un cours de Licence qui s'adresse à des étudiants sortant du cours de Mathématiques générales, et qui comprend, groupées autour de la Mécanique analytique, toutes les notions, théories et questions qui figurent au programme traditionnel de Mécanique rationnelle.

Les dix-huit Chapitres pourraient former quatre Parties.

La première Partie comprend des compléments de cinématique, des généralités sur les systèmes matériels (liaisons, quantités de mouvement, forces d'inertie, travail, forces vives), l'établissement des équations générales du mouvement des systèmes holonomes et non holonomes (principe de Dalembert, équations de Lagrange, de M. Appell, canoniques, équation de Jacobi, généralisations ; équations spéciales du mouvement d'un corps solide), l'étude de l'équilibre et des petits mouvements de ces systèmes.

La seconde Partie aurait pour objet l'intégration des équations obtenues : elle n'est pas tout à fait du domaine de l'Analyse, à cause de caractères spéciaux à ces équations. On envisage successivement les procédés d'obtention d'intégrales premières (intégrales linéaires, intégrale des forces vives généralisée), les principaux cas de réduction et d'intégration par quadratures des équations du mouvement d'un système holonome, et enfin l'étude approfondie du cas régulier d'intégragration par quadratures.

La troisième Partie est formée de divers compléments dont certains montrent bien la destination de l'Ouvrage : l'importante question des liaisons unilatérales, les mouvements en tenant compte de la rotation de la terre, les percussions et chocs, l'équilibre des fils flexibles et inextensibles, et enfin la brève synthèse des beaux travaux de l'Auteur sur la dynamique et la statique des systèmes soumis à des liaisons d'ordre différentiel quelconque.

Enfin la quatrième Partie a un caractère essentiellement pratique : une série habilement graduée d'une quarantaine d'exercices, la plupart nouveaux, apprend à l'étudiant comment on aborde et l'on creuse un problème de Mécanique : le lecteur est mené jusqu'au seuil du Concours d'Agrégation. Par ce report des applications à la fin du Livre, l'exposition des théories a gagné en unité et en clarté.

Nous ne saurions trop recommander aux étudiants en Mathématiques des Facultés de lire et de méditer cet Ouvrage à la pensée forte, qui les fera sortir des sentiers de la Tradition.

A. BOULANGER.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un triangle pesant homogène* ABC, *rectangle en* A *et isoscèle, est assujetti à se mouvoir de façon que la droite* AB *glisse sans frottement sur une droite horizontale fixe* OX. *Un point matériel pesant* M *est mobile sur l'hypoténuse* BC.

1° *Équations générales du mouvement du système.*

2° *Cas particulier où les vitesses initiales sont toutes nulles, le triangle* ABC *étant placé au début du mouvement dans un plan vertical et au-dessus de l'horizontale* OX, *et le point matériel* M *étant alors en* C. *Temps mis par* M *pour atteindre* B.

3° *Reprendre l'étude du cas particulier spécifié dans* 2° *en supposant qu'il y ait frottement du triangle sur la droite* OX.

II. *Petits mouvements d'une barre* AB *autour de sa position d'équilibre.*

La barre est mobile dans un plan vertical V *autour de son extrémité* A, *supposée fixe; son extrémité* B *est attirée proportionnellement à la distance par une horizontale* xy *située dans le plan* V *et au-dessus de* A; *un point déterminé* C *de la barre est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe* D *situé sur la droite d'intersection du plan* V *avec le plan horizontal passant par* A. *La barre est pesante et homogène.*

On donne :

1° *Le poids de la barre, égal à* 60^{kg};

2° *La valeur de la force attractive exercée par* D *sur* C : *cette attraction est de* 40^{kg} *quand la barre* AB *est verticale;*

3° *L'angle de la barre avec l'horizontale* xy *dans sa position d'équilibre : cet angle est de* 30°;

4° *Les longueurs*

$$AD = 0^m,60; \qquad AC = 1^m,20; \qquad CB = 2^m,80,$$

et la distance, égale à $1^m,80$, *du point* A *à l'horizontale* xy.

Cas où les divers points de la barre subissent en outre une résistance proportionnelle aux masses et aux vitesses.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans une poutre ayant la forme d'un triangle isoscèle* ABC, *on désigne par* B *le sommet d'où partent les deux côtés égaux, et par* D *le milieu de la base* AC; *les côtés égaux* BA, BC *sont constitués chacun par une tige, la base* AC *par deux tiges en prolongement articulées en* D, *et les points* B *et* D *se trouvent reliés par une cinquième tige.*

Cela étant, on suppose qu'une grue est formée de la poutre ABCD, *mobile dans un plan vertical autour du point fixe* D, *et rattachée par une chaîne* AE *au point fixe* E, *situé au-dessous du point* D *sur la verticale passant par* D. *La poutre est munie d'un système de trois poulies, la première au point fixe* D, *la deuxième au sommet* C, *la troisième formant avec la poulie* C *un palan et égale à la poulie* C. *La charge, égale à* 2000^{kg}, *s'exerce en* C *par l'intermédiaire du palan, et la puissance s'exerce verticalement sur la poulie* D; *on néglige le frottement et le poids de la grue. Les dimensions de l'appareil sont :*

$$DA = DC = DE = 3^m,60,$$
$$AE = 4^m, \qquad BD = 1^m,80.$$

1° *Déterminer la charge totale de l'articulation* C, *du point fixe* D, *et la tension de la chaîne* AE.

2° *Déterminer les tensions et compressions des différentes barres constituant la poutre* (BA, BC, DB, DC, DB).

Épure à l'échelle de $\frac{1}{10}$ *pour les longueurs, et de* 1^{mm} *par* 25^{kg} *pour les forces.*

Une feuille d'explications devra être jointe à l'épure.

(Juin 1913.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un disque circulaire homogène pesant est attaché, par deux points* C *et* C' *diamétralement opposés, à deux fils élastiques identiques* CAB *et* C'A'B'. *Le premier fil passe en* A *entre deux petites poulies sans frottement que l'on considère comme sensiblement réduites au point* A. *Son autre extrémité est fixée au point* B *tel que la longueur naturelle du fil soit* AB. *Il en va de même pour le second fil,* A *et* B *étant seulement remplacés par les points* A', B' *symétriques des précédents par rapport à* O, *les cinq points* A, B, A', B', O *étant d'ailleurs sur une même horizontale* Ox. *La tension de chaque fil pour un allongement* r *à partir de la longueur naturelle est* $< kr$, k *désignant un coefficient constant. Cela posé :*

1° *On abandonne le disque sans vitesse initiale à partir d'une position quelconque située dans le plan vertical qui passe par* Ox. *Trouver et étudier son mouvement.*

2° *Quelle doit être la position initiale du disque pour que son orientation ne change pas dans le cours du mouvement? Pour une position initiale convenable, le disque effectue de petites oscillations autour de son centre. Quel doit être le rapport* $\frac{CC'}{AA'}$ *pour qu'elles aient même période que le mouvement du centre? Où doit alors se trouver primitivement ce centre pour que le disque ne rencontre à aucun moment les poulies* A *et* A'? *Peut-on toujours trouver une telle position ?*

3° *Trouver les deux positions d'équilibre du disque. Prouver que l'une est stable et l'autre instable. La position initiale étant supposée très voisine de la position d'équilibre stable, étudier les petits mouvements du disque. Montrer que chaque point est animé sensiblement d'un* *mouvement vibratoire simple et rectiligne. Enfin, prouver que ces petits mouvements peuvent être réalisés par le roulement infiniment petit périodique d'un cercle concentrique au disque sur une droite.*

N. B. — *On supposera les points* C *et* C', *où viennent s'attacher les fils, de part et d'autre du plan du disque, mais très voisins de celui-ci, de manière que les fils ne se gênent pas dans les mouvements du disque.*

Épreuve pratique. — *Un plan incliné fait* 10° *avec le plan horizontal. Un point pesant est lancé sur ce plan avec une vitesse de* 1^m *par seconde dans une direction faisant l'angle* φ *avec la ligne de plus grande pente descendante. Il frotte suivant un coefficient de frottement égal à* $\frac{1}{2}$.

1° *Calculer en fonction de* φ *la durée* T *du mouvement et la position du point d'arrêt* P.

2° *Étudier les variations de* T *et construire le lieu de* P *quand* φ *croît de* 0 *à* π. *On calculera, en particulier, les positions la plus haute et la plus basse de* P, *à* 1^{cm} *près, et l'angle* φ *pour lequel le point* P *est au même niveau que la position initiale, à* 1 *minute près. On calculera également, à* $\frac{1}{100}$ *de seconde près, le maximum et le minimum de* T.

N. B. — *L'accélération de la pesanteur est* $9^m,80$.

(Juin 1912.)

QUESTIONS.

2214. Démontrer l'identité suivante, où p est entier et m quelconque

$$\left[\frac{x^p}{m}+\frac{p\,x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)}+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots1.(1+x)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)}\right]$$
$$\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}=1+A_1x+\ldots+A_px^p,$$

avec

$$A_1=\frac{m}{1},\qquad A_2=\frac{m(m-1)}{1.2},\qquad \ldots.$$

Pour m entier et $p \gtreqless m$, il faut faire entrer le facteur $m - m$ dans la parenthèse, simplifier comme si ce facteur n'était pas nul, et faire ensuite $m - m = 0$.

Quel résultat obtient-on en supposant que m, d'abord quelconque, tend vers le nombre entier μ, avec $p \gtreqless \mu$?

G. Fontené.

2215. Les tangentes communes intérieures à trois cercles d'un même plan, pris deux à deux, sont tangentes à une conique, homofocale à une conique inscrite au triangle qui a pour sommets les centres des trois cercles. Thié.

2216. On sait que l'on appelle *anneau* le volume engendré par le segment compris entre un arc de courbe AB et sa corde, tournant autour d'un axe X situé dans son plan et ne le rencontrant pas; la distance des projections orthogonales des points A et B sur l'axe X est la *hauteur* de cet anneau. Démontrer que, si l'arc AB appartient à une conique admettant X pour axe de symétrie, le centre de gravité de l'anneau est le milieu de sa hauteur. M. d'Ocagne.

2217. Soit PP' un diamètre variable d'une ellipse de foyers F, F'. PF et PF' rencontrent l'ellipse en M et M'; MF' et M'F se rencontrent en Q; PQ rencontre FF' en K et MM' en L. Montrer que :

1° La tangente en P' et MM' se rencontrent en R sur FF';

2° La droite MM' enveloppe une ellipse, et L est le point où MM' touche son enveloppe;

3° Le lieu de Q est une ellipse de foyer F et F';

4° Chacune des droites PQ et P'Q est normale à une ellipse fixe.

E.-N. Barisien.

2218. Quand deux normales MP, MQ à une ellipse abaissées d'un point M sont rectangulaires : 1° la droite RS, qui joint les pieds R et S des deux autres normales issues de M, est telle que les axes interceptent sur cette droite une longueur constante égale au rayon du cercle orthoptique à l'ellipse; 2° la droite PQ enveloppe une ellipse et la touche en son point de rencontre avec RS. E.-N. Barisien.

[O¹2e]

SUR LES COURBES DE DUPORCQ ET DE MANNHEIM (¹);

PAR M. F. BALITRAND

Les courbes de Duporcq sont caractérisées par la propriété suivante :

Leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

Les courbes de Mannheim par celle-ci :

Le rapport entre le rayon vecteur issu d'un pôle fixe et le rayon de courbure est constant pour tous les points d'une telle courbe.

La liaison cinématique entre les deux familles de courbes s'établit par le théorème ci-après :

Si une courbe de Mannheim roule sur une de ses tangentes, son pôle décrit une courbe de Duporcq.

Cette proposition résulte immédiatement de la construction, donnée par Mannheim, du centre de courbure d'une courbe de Duporcq ; mais on peut aussi l'établir géométriquement d'une façon directe.

A cet effet, soit O le pôle d'une courbe de Mannheim et M un de ses points. Menons la tangente MT en ce point. Prenons sur la courbe un point M′, infiniment voisin du point M, et sur la tangente un point M_1 tel que $MM_1 =$ arc MM′. Si la courbe roule sur la droite, le

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 1902, p. 181-184, 337-343 et 481-482.

point M′, après un déplacement infiniment petit, viendra en M_1 et, en même temps, le point O viendra en O_1. On a

$$\text{arc } OO_1 = OM \times \widehat{OMO_1}.$$

Mais l'angle $\widehat{OMO_1}$ n'est autre que l'angle $\widehat{M'MM_1}$; c'est-à-dire que l'angle de contingence de la courbe au point M. Il est donc égal à

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{MM'}{\rho} = \frac{MM_1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe au point M. Par hypothèse, $\frac{OM}{\rho}$ est constant; donc $\frac{OO_1}{MM_1}$ l'est aussi. D'autre part, $O_1 M_1$ est la normale en O_1 à la courbe lieu du point O, qui, par suite, est bien une courbe de Duporcq.

Cela posé, prenons comme axes de coordonnées mobiles la tangente Ox et la normale Oy à la courbe, lieu du point O et rappelons les formules de Cesàro :

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho},$$

x et y désignant les coordonnées d'un point du plan par rapport aux axes mobiles; les caractéristiques δ et d se rapportent au déplacement absolu et au déplacement relatif du point (x, y); l'arc s de la courbe (O) a été choisi pour variable indépendante.

Soit P le point où la normale Oy rencontre la droite fixe que nous appellerons désormais *directrice*. Désignons par λ le segment OP. Les formules précédentes appliquées au point P $(0, \lambda)$ donnent

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{k}{\rho} = k \cos\theta, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \lambda' = k \sin\theta,$$

auxquelles il faut joindre, puisque le point P décrit une droite,

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta' = -\frac{1}{\rho}; \tag{2}$$

k désigne le rapport, constant par hypothèse, des arcs décrits par les points P et O ; θ représente l'angle de la directrice avec la tangente Ox.

Ces formules suffisent pour l'étude des courbes de Duporcq. La première des relations (1) conduit immédiatement à la construction du centre de courbure donnée par Mannheim (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 337).

Sur la perpendiculaire élevée en P *à la directrice prenons* $PQ = k.OP$. *La droite* OQ *coupe en* R *la parallèle à* Ox *menée par* P; *la parallèle à* PQ, *menée par* R, *rencontre la normale* Oy *au centre de courbure* C.

Soit G la projection du point Q sur OP. On a

$$OG = \lambda - k\lambda \cos\theta = \frac{\lambda^2}{\rho}, \tag{3}$$

d'où une nouvelle construction du centre de courbure.

Sur GQ *prenons* Q_1 *tel que* $OQ_1 = OP$; *la perpendiculaire élevée en* Q_1 *à* OQ_1 *passe au centre de courbure* C.

On peut encore remarquer qu'en appelant P_1 le symétrique de P par rapport à O, les quatre points P_1, G, P, C forment une division harmonique.

En différentiant la première des relations (1) et tenant compte de la seconde, on arrive à l'équation

$$\frac{2\lambda'}{\lambda} = \frac{\rho'}{\rho},$$

ou bien

$$\lambda^2 = \alpha\rho,$$

α désignant une constante. Cette formule est due à Duporcq. Il est intéressant de rechercher la signification géométrique de la constante α. La formule (3) montre que $\alpha = \mathrm{OG}$ et par conséquent que OG est une constante. Ainsi :

La projection du point Q sur la normale décrit une courbe parallèle à la courbe (O).

Les coordonnées du point Q sont :

$$x = k\lambda \sin \theta = \lambda\lambda', \qquad y = \alpha.$$

De la relation $\lambda^2 = \alpha\rho$ on déduit

$$2\lambda\lambda' = \alpha\rho' = \alpha \frac{\rho_1}{\rho},$$

et, par suite, la droite OQ a pour équation

$$y = \frac{2\rho}{\rho_1} x,$$

ρ_1 désignant le rayon de courbure de la développée de O. La droite OQ passe donc par le milieu de ce rayon de courbure et par suite :

Le rayon de courbure de la développée de (O) *s'obtient en doublant le segment déterminé sur la normale à cette développée par la droite* OQ.

En additionnant les formules (1) après les avoir élevées au carré, et tenant compte de $\lambda^2 = \alpha\rho$, on arrive à

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = k^2,$$

ou bien

(4) $$ds = \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{k^2\lambda^2 - (\lambda - \alpha)^2}}.$$

Cette relation est due à Duporcq. Elle peut toujours être intégrée et en y remplaçant ensuite λ par $\sqrt{\alpha\rho}$ on obtient l'équation intrinsèque des courbes en question sous forme finie. Le résultat est assez compliqué. La marche suivie ici a l'avantage de mettre en évidence la signification géométrique des constantes de l'équation (4).

Par un point fixe I menons des rayons vecteurs égaux et parallèles aux segments de normales d'une courbe de Duporcq, compris entre la courbe et sa directrice, et proposons-nous d'étudier la courbe lieu des extrémités de ces segments.

Nous emploierons des coordonnées polaires; le point I étant le pôle, l'axe polaire étant parallèle à la directrice, et nous désignerons par ω l'angle polaire.

Il est commode d'employer les valeurs de λ, λ', λ'', ..., ρ, ρ_1, ρ_2 en fonction de l'angle θ.

Ces valeurs sont les suivantes :

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta' = -\frac{1 - k\cos\theta}{\alpha},$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{1 - k\cos\theta}, \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \lambda' = k\sin\theta,$$

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \lambda'' = -\frac{k\cos\theta\,(1 - k\cos\theta)}{\alpha},$$

$$\rho = \frac{\alpha}{(1 - k\cos\theta)^2}, \qquad \frac{d\rho}{ds} = \rho' = \frac{2k\sin\theta}{1 - k\cos\theta},$$

$$\rho_1 = \frac{2k\alpha\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^3}, \qquad \rho_2 = \frac{2k\alpha(k - \cos\theta + 2k^2\sin^2\theta)}{(1 - k\cos\theta)^4}.$$

On a aussi

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\rho\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{k\alpha\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^2}.$$

Cela posé, l'angle que fait la tangente en un point de la courbe avec le rayon vecteur est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{k\,d\omega}{d\lambda} = -\frac{1 - k\cos\theta}{k\sin\theta}.$$

Mais si l'on appelle φ l'angle que la normale de la courbe de Duporcq correspondante fait avec la droite OQ, le triangle OGQ donne

$$\frac{GQ}{GO} = \frac{k\sin\theta}{1 - k\cos\theta} = \operatorname{tang}\varphi\,;$$

donc

$$\operatorname{tang} V = -\cot\varphi = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

et la tangente cherchée est perpendiculaire à la droite OQ.

Le rayon de courbure est donné par la formule

$$R = \frac{\left[\lambda^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + 2\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 - \lambda\frac{d^2\lambda}{d\omega^2}}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette expression se calculent aisément en fonction de θ, et, après quelques réductions, on arrive à la valeur suivante pour R :

$$R = \frac{\alpha}{\cos^3\varphi}. \tag{5}$$

Par suite, si l'on projette G en G_1 sur OQ, puis G_1 en G_2 sur OP, et enfin G_2 en G_3 sur OQ, le segment OG_3 est égal au rayon de courbure R.

Passons maintenant aux courbes de Mannheim. Soient O le pôle et M un point de la courbe (M). Prenons pour axes de coordonnées mobiles la tangente Mx et la normale My en M à la courbe (M).

Des formules de Cesàro on déduit, pour exprimer les conditions de fixité du point (x, y), les conditions

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

ou en coordonnées polaires (r, θ)

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \qquad \frac{\sin\theta}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho}.$$

En les appliquant au pôle O, et en tenant compte de la relation $\rho = kr$, on obtient successivement :

$$\frac{d\rho}{ds} = k\frac{dr}{ds} = -k\cos\theta,$$
$$\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{k\sin\theta - 1}{k\rho\cos\theta},$$
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{k\cos\theta\, d\theta}{k\sin\theta - 1} = 0;$$

d'où, par intégration de cette dernière,

(6) $$\rho(k\sin\theta - 1) = a,$$

a désignant une constante.

On arrive aussi aisément à la relation

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = k^2 - \left(1 + \frac{a}{\rho}\right)^2,$$

ou bien

(7) $$ds = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{k^2\rho^2 - (\rho + a)^2}},$$

qui n'est autre que l'équation différentielle intrinsèque des courbes de Mannheim. Elle peut toujours se mettre sous forme finie, mais elle est alors assez compliquée. Elle se simplifie lorsque $k = 1$. En faisant le changement de variable $\sqrt{2\rho + a} = \frac{1}{z}$, on arrive aisément à l'expression

$$s = \frac{(\rho - a)\sqrt{2\rho + a}}{3\sqrt{-a}}.$$

On peut encore remarquer que l'équation (7) est identique à celle qui, pour les courbes de Duporcq, relie l'arc de la courbe au segment de normale compris entre la directrice et le point d'incidence.

Les développées des courbes de Mannheim ont une équation intrinsèque remarquable. Les formules qui permettent de passer d'une courbe à sa développée sont les suivantes :

$$s_1 = \rho, \qquad \rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds};$$

en les appliquant à l'équation (7), on obtient :

$$\rho_1^2 = (k^2 - 1)\, s_1^2 - 2\, a s_1 - a^2.$$

Ces courbes sont des épicycloïdes ou des hypocycloïdes. Pour $k = 1$, on a une développante de cercle. Ainsi :

Les courbes de Mannheim sont des développantes d'épi- ou d'hypocycloïdes.

La formule $\frac{d\rho}{ds} = -k \cos\theta$ peut s'écrire

$$\rho_1 + k\rho\cos\theta = 0.$$

Or, si l'on projette le centre de courbure C en γ sur le rayon vecteur, on a $C\gamma = \rho\cos\theta$; le rayon de courbure de la développée de (M) est donc égal à k fois $C\gamma$.

La relation $\rho(k\sin\theta - 1) = a$ peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad k(\rho\sin\theta - r) = a.$$

Elle nous montre que le point γ décrit un cercle de centre O et de rayon a. Ce théorème est dû à Mannheim et l'équation (8) fournit une interprétation géométrique de la constante d'intégration a.

La même relation peut encore s'écrire

$$kr \sin \theta - r = \frac{a}{k},$$

ou, en appelant p la distance du pôle à la tangente en M,

$$r = kp - \frac{a}{k}.$$

Les courbes de Mannheim sont donc caractérisées par la propriété suivante :

Il existe une relation linéaire entre les distances du pôle à un point de la courbe et à la tangente en ce point.

Cela va nous permettre de trouver l'équation différentielle de ces courbes en coordonnées polaires.

Prenons pour origine le pôle et pour axe polaire une droite quelconque passant par ce point. Soit ω l'angle polaire. En remarquant que θ désigne l'angle de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur, on a

$$p = r \sin \theta, \qquad \sin \theta = \frac{r\, d\omega}{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\omega^2}}.$$

On en déduit sans peine

$$k^2 p^2 = k^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{k^2 r^4\, d\omega^2}{dr^2 + r^2\, d\omega^2} = \left(r + \frac{a}{k}\right)^2,$$

d'où

$$(9) \qquad d\omega = \frac{dr\left(r + \frac{a}{k}\right)}{r\sqrt{k^2 r^2 - \left(\quad \frac{a}{k}\right)^2}};$$

c'est l'équation différentielle cherchée.

Il est, d'autre part, évident que, pour toute courbe de Mannheim :

Il existe une relation linéaire, en chacun de ses points, entre le rayon de courbure et la distance de la tangente à un pôle fixe.

Divisons (9) par (7), après avoir remplacé r par $\frac{\rho}{k}$, nous obtenons

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}.$$

Les courbes de Mannheim sont donc un cas particulier de celles qui ont été étudiées par M. Haag (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 397 et suiv.). Elles correspondent au cas où $f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}$.

[$K^1 2c$]

SUR LE POINT DE FEUERBACH;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

L'une des plus anciennes constructions du point φ de contact des cercles inscrit I et des neuf points ω d'un triangle est due au géomètre Hamilton. Elle est bien connue et deux démonstrations géométriques en ont été données dans ce journal par Gérono en 1865 et Canon (Mannheim) en 1903.

Entre ces deux démonstrations sont parues dans diverses Revues des propriétés fondamentales du point φ dont les deux plus importantes qui, à notre avis, constituent l'essentiel actuellement connu sur la question, sont les suivantes :

1° *Le point de Feuerbach est le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par les sommets d'un triangle* ABC *et le centre* I *du cercle inscrit* (¹).

2° *Le point de Feuerbach est le foyer de la parabole qui admet le triangle* ABC *comme triangle conjugué et qui admet pour directrice la droite* OI *qui joint les centres des cercles circonscrit et inscrit. Cette parabole est d'ailleurs inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux* A_1, B_1, C_1 *des côtés du triangle* ABC (²).

Nous nous proposons d'utiliser ces deux théorèmes pour donner de la construction d'Hamilton deux démonstrations élémentaires qui sont peut-être nouvelles et qui ont l'avantage d'être plus simples que celles rappelées ci-dessus. Ces démonstrations nous conduiront de plus à quelques propriétés qui n'ont peut-être pas été présentées aux lecteurs de cette Revue.

1. Rappelons ce théorème énoncé par M. Th. Lemoyne (*Nouvelles Annales*, 1904) :

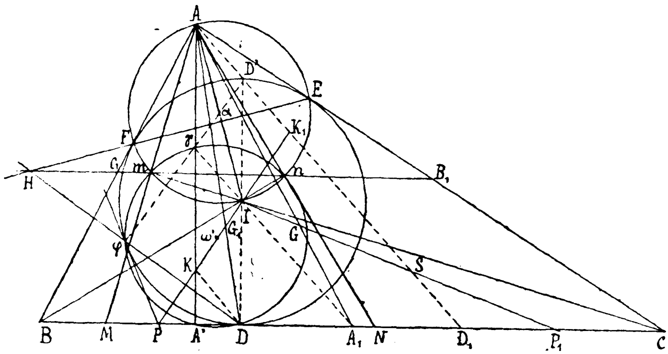
Si, étant donné un triangle ABC *inscrit à une conique* Σ, *on projette un point quelconque* P *de cette conique sur les côtés du triangle, en* Q, R, S, *le cercle* QRS *est orthogonal à un cercle fixe, réel ou imaginaire. Quand, en particulier, la conique* Σ *est une hyperbole équilatère, le cercle* QRS *passe par le centre de cette hyperbole.*

(¹) Lemoine, *Association française pour l'Avancement des Sciences,* 1889, p. 203. — Ch. Michel, *Journal de Mathématiques spéciales de G. de Longchamps*, janvier 1895.

(²) Ch. Michel, *Journal de Mathématiques spéciales de G. de Longchamps,* janvier 1895. — Bouvaist, *Nouvelles Annales,* 1906, p. 510. — V. Thébault, *Nouvelles Annales*, 1910, p. 275.

Dans un triangle ABC (*fig.* 1), traçons les perpendiculaires AmM et AnN sur les bissectrices BI et CI, m, n, M, N étant les intersections de ces perpendicu-

Fig. 1.



laires avec BI, CI et BC. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs, D, E, F les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB.

D'après le théorème de M. Lemoyne, *le cercle des neufs points* ω' *du triangle* AMN *passe au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC. Il contient aussi le point de contact D qui, visiblement, est milieu de MN.

Le cercle α circonscrit au triangle Amn, de diamètre AI, passe en E et F ; il est d'ailleurs égal à ω'. Ces deux cercles α et ω', passant en m et n, sont symétriques par rapport à B_1C_1 qui est leur axe radical.

Or EF étant l'axe radical des cercles I et α, le point H, commun à B_1C_1 et EF, a même puissance par rapport à I, ω' et α. C'est leur centre radical, et Dφ, corde commune à I et ω', passe par ce point H. D'où la construction d'Hamilton :

La droite, qui joint les points de contact avec (I) *des côtés* AB, AC *du triangle, et la droite qui joint les* *milieux de ces côtés se coupent en un point* H : *la droite* DH *rencontre le cercle* (I) *au point* φ *de Feuerbach.*

Remarques. — *a.* On peut obtenir directement que le cercle des neuf points du triangle AMN passe au point φ, sans se servir du théorème de M. Lemoyne.

On sait, en effet, que DE contient le milieu m de AM et que

$$\text{angle } \mathrm{D}\varphi\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

Il suffit donc d'obtenir

$$\text{angle } \mathrm{D}m\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

Or,

$$\widehat{\mathrm{D}m\mathrm{A}'} = \widehat{m\mathrm{A}'\mathrm{B}} - \widehat{m\mathrm{DB}} = 90^\circ - \frac{\mathrm{C}}{2} - \left(90^\circ - \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

b. Le triangle AMN donne quelques propriétés intéressantes. L'orthocentre K de ce triangle est tel que $\mathrm{AK} = 2\,\mathrm{ID} = 2r$, r étant le rayon du cercle I (car I est aussi le centre du cercle circonscrit à AMN). *La droite d'Euler* IK *rencontre donc* BC *en un point* P *de l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points du triangle* ABC.

La figure $\mathrm{DI}\gamma\mathrm{K}$ (γ milieu de AK), étant en effet un parallélogramme,

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PA}_1} = \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PD}}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\mathrm{PD}}^2 = \mathrm{PA}_1 \times \mathrm{PA}';$$

$\mathrm{A}_1\mathrm{I}$ passant, comme l'on sait, en γ milieu de AK.

c. Soit G le point de concours des médianes du triangle ABC ; traçons $\mathrm{AD}'\mathrm{D}_1$, D′ étant l'extrémité du diamètre DI. On sait que $\mathrm{DA}_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$.

IG et IK rencontrant AD_1 respectivement en S et K_1, et comme A_1I est parallèle à AD_1,

$$\frac{IG}{GS} = \frac{1}{2} = \frac{IG_1}{G_1K}.$$

G_1 étant l'intersection de IK et de AD; SK est donc parallèle à GG_1, c'est-à-dire à BC, et

$$SD_1 = DK = AD' = D'K_1.$$

Comme I est le milieu de DD' :

La droite d'Euler IK *du triangle* AMN *est la transversale réciproque, dans le triangle* $DD'D_1$, *de la droite qui joint le centre de gravité* G *au centre* I *du cercle inscrit du triangle* ABC.

2. Nous avons donné en octobre 1911, dans le *Journal de Vuibert*, le théorème qui suit et qui complète celui énoncé au début de cette Note :

Les côtés du triangle qui a pour sommets les points de contact D, E, F, *du cercle inscrit et des côtés du triangle* ABC, *sont tangents à une parabole dont le foyer est le point* φ *de Feuerbach et la directrice*, OI.

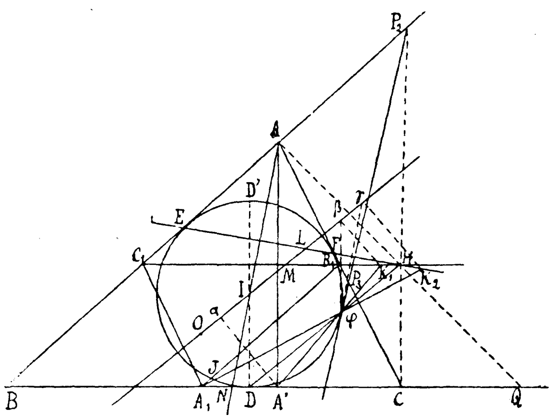
Considérons la droite φD; *elle est bissectrice de l'angle* $A_1\varphi A'$. En effet, le cercle des neuf points de ABC étant tangent en φ au cercle inscrit I, φD coupe le premier au point homologue de D, c'est-à-dire au point de contact de la tangente parallèle à BC. Or, cette tangente touche le cercle d'Euler au milieu de l'arc A_1A'.

Nous allons alors établir les intéressantes propriétés ci-dessous :

a. Les droites qui joignent les pieds des hauteurs du triangle ABC *au point de Feuerbach rencontrent respectivement les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *en leurs* *points de contact avec la parabole de foyer* φ *et de directrice* OI.

Traçons $\varphi\beta$ perpendiculaire sur B_1C_1 jusqu'à la rencontre avec la directrice OI, soit K_1 (*fig.* 2) inter-

Fig. 2.



section de B_1C_1 et $\varphi A'$. Il suffit de prouver que l'angle $O\beta K_1$ est droit, c'est-à-dire que $K_1\beta\varphi = K_1M\beta$, M étant l'intersection de OI et B_1C_1 ; car β étant symétrique de φ par rapport à B_1C_1, $K_1\beta = K_1\varphi$, de sorte que si $O\beta K_1$ est droit, K_1 appartient à la parabole de foyer φ et de directrice OI.

Or, nous savons que

$$\text{angle } K_1\beta\varphi = K_1\varphi\beta = \varphi A'A = AA'\alpha = MPA' = K_1M\beta,$$

$A'\alpha$ étant perpendiculaire à OI.

Voir notre article, *Sur quelques théorèmes de géométrie élémentaire* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 271), où nous avons établi la symétrie de $A'\varphi$ et $A'\alpha$ par rapport à AA'. K^1 est donc le point de contact de B_1C_1 et de la parabole précédente.

b. Les droites qui joignent le point de Feuerbach aux milieux des côtés du triangle ABC *rencontrent respectivement les côtés du triangle* DEF *aux points de contact avec la parabole précédente de foyer* φ *et de directrice* OI.

Soit J intersection de AI et φA_1 ; traçons $\varphi\gamma$ perpendiculaire sur EF et joignons γ au point K_2 de rencontre de EF et φA_1 ; γ est symétrique de φ par rapport à EF, donc $K_2\gamma = K_2\varphi$. Il suffit, par suite, de montrer que l'angle $O\gamma K_2$ est droit, soit que

$$\text{angle } \varphi\gamma K_2 = \gamma\varphi K_2 = AJK_2.$$

Or $\varphi DA' = PIN$. De plus, φD étant bissectrice de $A_1\varphi A'$, $A_1\varphi$ coupe le cercle I en D_1 symétrique de D par rapport à AI, car

$$\text{angle } DIN = AID_1 = \frac{C - B}{2} = A_1\varphi D.$$

On a donc, dans la circonférence I,

$$\text{mes. } AJK_2 = \text{mes. } \varphi DD';$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{angle } AJK_2 = D'D\varphi &= 90^\circ - \varphi DA' \\ &= 90^\circ - PIN = 90^\circ - AIL = ELI = \gamma LK_2,\end{aligned}$$

L étant l'intersection de OI et EF.

Alors, C_1B_1 et EF étant tangentes à la parabole de foyer φ et de directrice OI, d'après un théorème classique, φH qui joint le foyer à l'intersection des tangentes est bissectrice de l'angle $K_1\varphi K_2$, ou de son opposé par le sommet $A_1\varphi A'$; φH est donc le prolongement de $D\varphi$ et la construction d'Hamilton est à nouveau établie.

Remarques. — La propriété (a) se généralise pour une parabole quelconque tangente aux côtés d'un triangle.

Les points de contact des côtés d'un triangle tangent à une parabole sont situés sur les droites qui joignent respectivement le foyer aux pieds des hauteurs du triangle obtenu en menant, par les sommets, les parallèles aux côtés du premier.

La proposition *a* ne dépend en effet que de la symétrie de $\varphi A'$ et $A'\alpha$ par rapport à la hauteur AA'. Or, nous avons prouvé (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 274) que cette propriété est générale.

La propriété *b* n'est d'ailleurs pas différente de *a*, car on montre, sans difficulté, que le pied de la hauteur du triangle $D_1E_1F_1$, obtenu en menant les parallèles aux côtés du triangle DEF par ses sommets, n'est autre que l'intersection de φA_1 avec le cercle I.

3. Soit P_2P_3 la portion de l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points comprise entre BA et AC. Dans le quadrilatère circonscrit au cercle I, BCP_2P_3, le point de concours des diagonales BP_3 et CP_2 est le point H commun aux droites EF et φD des points de contact, c'est-à-dire le point d'Hamilton.

En utilisant le théorème que M. Van Aubel a donné dans *Mathesis*, sous le n° 128, on obtient:

$$\frac{P_2A}{P_2B}+\frac{AP_3}{P_3C}=\frac{AH}{HQ}=1,$$

Q étant le point où AH rencontre BC (*fig.* 2).

P_2P_3 est donc la transversale réciproque d'une droite Δ qui contient le point de concours G des médianes du triangle ABC.

Nous montrerons tout à l'heure que Δ est la droite IG qui joint le centre I du cercle inscrit au centre de gravité G du triangle. D'où cette propriété :

Les droites qui joignent deux sommets B *et* C, *par exemple, au point* H *correspondant d'Hamilton, coupent* A_1C_1 *et* B_1A_1 *sur la droite* IG *qui joint le centre de gravité au centre du cercle inscrit du triangle* ABC.

4. Il résulte de la remarque *b* du premier paragraphe que le point φ de Feuerbach est le symétrique du contact D par rapport à la droite d'Euler IK du triangle AMN (*fig.* 1).

Mannheim, qui fit cette remarque après sa démonstration de la construction d'Hamilton (*Nouvelles Annales*, 1903), en déduisit la construction suivante de φ (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, décembre 1912, question 1200) :

La droite qui joint le point D' *diamétralement opposé au contact* D, *sur le cercle inscrit, au milieu de* AI, *coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle* ABC.

$D'\varphi$ qui est en effet perpendiculaire sur $D\varphi$ est parallèle à IK (*fig.* 1) et rencontre par suite KA en γ tel que

$$K\gamma = ID' = A\gamma,$$

γ étant milieu de AK. $D'\varphi$ est alors diagonale du parallélogramme $A\gamma ID'$ et passe au milieu α de AI.

Joignons φ aux milieux A_1, B_1, C_1 des côtés du triangle ABC (*fig.* 3). Les longueurs φA_1, φB_1, φC_1 sont respectivement en fonction des côtés et des rayons des cercles inscrit et circonscrit :

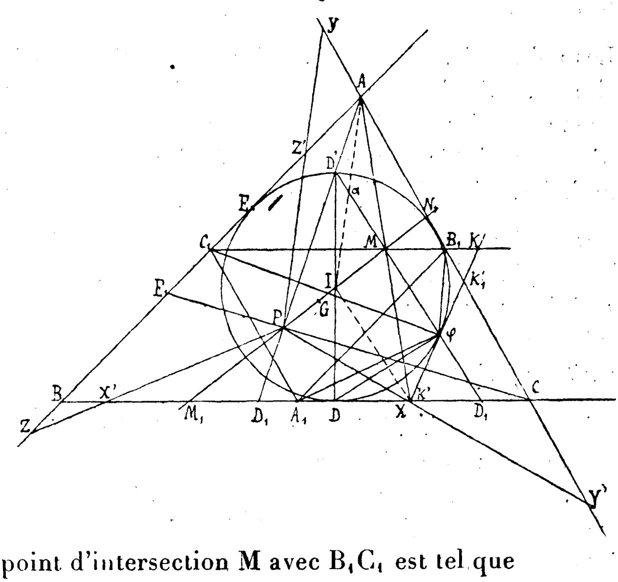
$$\varphi A_1 = \frac{b-c}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}},$$

$$\varphi B_1 = \frac{a-c}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}},$$

$$\varphi C_1 = \frac{a-b}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}}.$$

$D'\alpha$ est bissectrice intérieure de l'angle $B_1\varphi C_1$, et le

Fig. 3.



point d'intersection M avec B_1C_1 est tel que

$$(1) \qquad \frac{B_1M}{MC_1} = \frac{\varphi B_1}{\varphi C_1} = \frac{AP}{QA} = \frac{a-c}{a-b}.$$

De même la droite analogue $\varphi F'$ rencontre C_1A_1 en N, et

$$(2) \qquad \frac{A_1N}{NC_1} = \frac{\varphi A_1}{\varphi C_1} = \frac{c-b}{a-b};$$

d'où l'on tire, en additionnant (1) et (2),

$$\frac{B_1M}{MC_1}+\frac{A_1N}{NC_1}=1,$$

ce qui, d'après une propriété connue, nous indique que MN contient G, point de concours des médianes de $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire de ABC.

Les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC étant semblables, le centre de similitude étant G,

$$\frac{B_1M}{MC_1}=\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{a-c}{a-b} \quad \text{et} \quad \frac{A_1N}{NC_1}=\frac{AN_1}{N_1C}=\frac{c-b}{a-b}.$$

Les points M_1, N_1 sont donc les intersections de la droite IG, qui joint le centre du cercle inscrit au point de concours des médianes, avec les côtés AC et CB. D'où cette intéressante propriété des droites de Mannheim, $D'\alpha$, $E'\gamma$, $F'\beta$, que nous croyons nouvelle :

Les droites de Mannheim rencontrent les côtés du triangle formé en joignant les milieux A_1, B_1, C_1, *des côtés du triangle* ABC, *en trois points qui sont situés sur la droite* IG *joignant le centre du cercle inscrit au point de concours des médianes.*

Joignons AMK', M étant milieu de AK' ; IK' est parallèle à $D'\alpha$, par suite perpendiculaire sur $D\varphi$ en son milieu. $K'\varphi$ est donc tangente en φ au cercle I et n'est autre que l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points de ABC.

Mais $BM_1 = 2B_1M = CK'$ et K' est le symétrique de M_1 par rapport au milieu A_1 de BC. La même propriété subsiste évidemment pour les points analogues à K' par rapport aux côtés AC et BA. Par suite :

La transversale réciproque de la droite qui joint le centre de gravité d'un triangle au centre de son *cercle inscrit est la tangente au point de Feuerbach.*

Cette belle propriété a été publiée dans le *Journal de Vuibert*, 36e année (p. 132).

Remarques. — *a*. Ce dernier théorème est d'ailleurs également donné par la remarque *c* du paragraphe 1, en observant que $PA_1 = A_1P_1$ (*fig.* 1).

b. Soient H et H_1 les points d'Hamilton situés sur C_1B_1 et A_1C_1 (*fig.* 3). On trouve sans difficulté

$$\frac{HB_1}{HC_1} + \frac{H_1A_1}{H_1C_1} = \frac{\varphi B_1}{\varphi C_1} + \frac{\varphi A_1}{\varphi C_1} = 1.$$

Si l'on porte sur C_1B_1 et A_1C_1, $HB_2 = HB_1$ et $H_1A_2 = H_1A_1$, on a, par exemple, cette propriété :

La droite HH_1 *qui joint deux points d'Hamilton du triangle* ABC *contient le point de concours des médianes du triangle* $A_2C_1B_2$.

5. La propriété relative à la tangente au cercle inscrit au point φ de Feuerbach n'est qu'un cas particulier du théorème général :

Quand une droite tourne autour d'un point quelconque P, *sa transversale réciproque par rapport à un triangle* ABC *enveloppe une conique inscrite au triangle et qui touche l'un quelconque de ses côtés*, BC *par exemple*, *au point* P'_1 *isotomique du point* P_1 *où la droite* AP *qui joint* P *au sommet opposé rencontre ce côté.*

1° Cette conique devient le cercle inscrit I au triangle quand P'_1, P'_2, P'_3 sont les contacts D, E, F, avec les côtés. Le point P n'est autre que le *point de Nagel* du triangle ABC. Ce point est donc tel que *la transversale réciproque de toute droite* Δ *qui le contient*, *par rapport au triangle* ABC, *enveloppe le cercle inscrit* I.

En remarquant que le centre I n'est autre que le point de Nagel du triangle $A_1B_1C_1$, on obtient cette propriété :

La transversale réciproque, par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ *de toute droite* Δ *passant au centre du cercle inscrit du triangle* ABC, *enveloppe un cercle fixe, inscrit à* $A_1B_1C_1$, *dont le centre est milieu de* IP, P *étant le point de Nagel du triangle* ABC (*fig.* 3).

On sait que le point de Nagel est le point de concours des droites Y′X, X′Z, Z′Y, telles que

$$\overline{AZ'} = c - b, \qquad \overline{BX'} = a - c, \qquad \overline{cY'} = b - a.$$

Il est évident, en effet, que les transversales réciproques de ces droites par rapport au triangle sont tangentes au cercle I, les triangles ABC et X_1CY_1 par exemple, étant égaux.

2° Rappelons le point K du cercle des neuf points relatif à un diamètre quelconque Δ du cercle circonscrit à un triangle ABC, dont nous avons donné ici-même (juin 1910, p. 271) quelques propriétés.

M. Neuberg, le savant professeur de l'Université de Liège, appelle d'ailleurs ce point K *orthopôle de* Δ et Δ *orthopolaire de* K.

Le théorème précédent nous permet alors d'énoncer que :

L'enveloppe de la transversale réciproque Δ' *par rapport à un triangle* ABC, *d'un diamètre mobile* Δ *du cercle circonscrit à ce triangle est la conique qui a pour foyers l'orthocentre* H *et le centre* O *du cercle* *circonscrit et qui est inscrite au triangle* ABC. *D'ailleurs* Δ' *passe par l'orthopôle* K *de* Δ.

En particulier :

La transversale réciproque Δ' *de la ligne* OI *des centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle, touche cette conique.* Δ' *passe, de plus, par le point* φ *de Feuerbach.*

3° Enfin, il est bien connu que :

Lorsqu'une droite Δ *tourne autour du centre de gravité* G *d'un triangle, sa transversale réciproque enveloppe la conique tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.*

[D2bβ]

SUR L'ÉQUATION DE FERMETURE POUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. NICOLAS KRYLOFF,
à Saint-Pétersbourg.

Dans la théorie des séries de Fourier, ou plutôt dans la théorie des constantes de Fourier, la relation suivante joue un rôle tout à fait fondamental :

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,ax,$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b).

Cette formule (1) nommée *équation de fermeture* par M. W. Stekloff, a été généralisée par ce savant pour bien d'autres fonctions, rencontrées dans la Physique mathématique et l'Analyse pure.

Vu son importance, le théorème, exprimé par la relation (1), a reçu dans ce dernier temps plusieurs démonstrations ([1]), basées, presque toutes, sur diverses formules de sommation des séries trigonométriques divergentes.

Il est donc naturel d'essayer d'appliquer à la démonstration du théorème susdit une méthode plus directe de sommation, fondée sur cette remarque bien connue que toute série trigonométrique peut être intégrée terme à terme; autrement dit, en partant de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, série généralement divergente, on forme, par l'intégration terme à terme, une fonction bien déterminée,

$$(2)\quad \begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(x)\,dx \\ &= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_0^x \cos nx\,dx + b_n \int_0^x \sin nx\,dx\right); \end{aligned}$$

on est donc réellement en possession d'un procédé de sommation de la série, car, grâce à la formule (2) qui donne $F(x)$, on obtient évidemment la fonction correspondant à la série de Fourier considérée, c'est-à-dire $f(x)$ partout où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

([1]) Ainsi, diverses démonstrations ont été données par M. Ulysse Dini (cette démonstration date de 1873, mais elle n'a pas été publiée par son auteur), M. V. Poussin (1893), M. Liapounoff (1896), M. Stekloff (1904, 1911), M. Hurwitz, (1903), M. Fatou (1905), M. Moore (1908), M. Westfall (1908).

Cela étant, remarquons que la série obtenue par l'intégration terme à terme sera, comme il est bien connu, uniformément convergente, si les extrémités de l'intervalle de l'intégration sont variables; par suite, la valeur de h étant donnée, on peut trouver, si petit que soit ε, une valeur N de n telle que, pour $n \geqq N$, on ait

$$(3) \qquad \left| f_h - \left(\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{x-h}^{x+h} \cos it\, dt + b_i \int_{x-h}^{x+h} \sin it\, dt \right) \right| < \varepsilon,$$

en posant

$$f_h = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Désignons par $S(n, h)$ la somme entre crochets dans le premier membre de la formule (3); alors, en intégrant entre 0 et 2π, on obtient, pour $n \geqq N(h)$, le résultat suivant :

$$\int_0^{2\pi} [f_h - S(n, h)]^2\, dx < \varepsilon_1,$$

où $\lim \varepsilon_1 = 0$.

En formant, à présent, la différence

$$(4) \qquad \begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f - S(n, h)]^2\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ (f - f_h) + [f_h - S(n, h)] \}^2\, dx, \end{aligned}$$

on s'assure bien facilement qu'on a

$$I_n < \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - f_h)^2\, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_h - S(n, h)]^2\, dx;$$

donc, pour une valeur suffisamment petite de h et pour une valeur suffisamment grande de n, on aura

$$\mathrm{I}_n < \frac{2\varepsilon_2}{\pi} + \frac{2\varepsilon_1}{\pi};$$

par conséquent, I_n sera infiniment petit, car, d'après un lemme établi par M. W. Stekloff (1), on peut trouver une valeur de h assez petite pour que l'on ait

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} (f - f_h)^2 \, dx < \varepsilon_2,$$

quelle que soit le petitesse de ε_2.

Écrivons maintenant la formule (4) sous une forme plus développée :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 \, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,\mathrm{S}(n, h)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{S}(n, h)^2 \, dx,$$

et remarquons que

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \cos it \, dt = \frac{\sin ih \cos ix}{ih},$$

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \sin it \, dt = \frac{\sin ih \sin ix}{ih}.$$

On a donc

$$\mathrm{S}(n, h) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \frac{\sin ih}{ih}(a_i \cos ix + b_i \sin ix);$$

par conséquent,

$$(6) \qquad \mathrm{I}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 \, dx - 2\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\frac{\sin ih}{ih}$$
$$- \frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\left(\frac{\sin ih}{ih}\right)^2;$$

---

(1) W. Stekloff et Tamarkine, *Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1911).

augmentons et diminuons le second membre de la formule (6) de la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2 ;$$

cela ne change pas évidemment le résultat et l'on obtient ainsi

$$(7) \qquad \mathrm{I}_n = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 \, dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2 \right) + \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) \left(1 - \frac{\sin ih}{ih} \right)^2 \right];$$

chacune des expressions entre parenthèses dans le second membre de (7) est positive : le fait est évident pour la seconde et, pour la première, il résulte de ce qu'on a toujours

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + b_i^2 \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 \, dx ;$$

donc, chacune d'elles peut être rendue aussi petite qu'on veut pour une valeur suffisamment petite de h et une valeur suffisamment grande de n, puisqu'il en est ainsi pour I_n, comme on l'a vu plus haut ; par conséquent, on aura, en particulier,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + b_i^2 ,$$

c'est-à-dire l'équation de fermeture qu'il fallait établir.

Quoique la démonstration bien simple, qui précède, utilise un lemme [1] de M. W. Stekloff, elle diffère

---

(1) Ce lemme intervient implicitement, sous une forme ou sous

néanmoins des diverses démonstrations que ce géomètre a données de l'équation de fermeture pour les fonctions trigonométriques et se rapproche plutôt par son idée de la démonstration de M. Hurwitz ([1]) (fondée sur la méthode de sommation par les moyennes arithmétiques de M. Fejér); elle paraît cependant plus simple, car elle est basée sur la possibilité d'intégrer la série terme à terme ([2]).

Mai 1913.

[D2b]

SUR UNE FORMULE DE SOMMATION CONNUE;

Par M. CHALDE.

La formule

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

qui est un cas particulier de formules relatives aux quantités $\sum \frac{1}{m^{2k}}$ (Jordan, *Cours d'Analyse*), s'établit d'habitude en comparant les développements de $\sin x$ en série et en produit infini, ou en développant la fonc-

---

une autre, et par la nature même de la question, dans presque toutes les démonstrations de l'équation de fermeture données jusqu'ici par divers auteurs; dégagé par M. Stekloff de la manière la plus heureuse, ce lemme doit rendre, à notre avis, de grands services dans ce genre de questions.

([1]) *Math. Annalen*, 1903.

([2]) Après la rédaction de cette Notice et pendant la correction des épreuves, j'ai appris qu'un théorème très général dans cet ordre d'idées a été établi tout récemment par M. Severini (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. XXXVI).

tion x^2 en série de Fourier. M. Camille Denquin (*Nouv. Ann.*, 1912, p. 127) a établi directement la formule équivalente

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

en partant de la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

On peut déduire la formule en question du rapprochement des formules

$$(1) \qquad p\,u = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

$$(w = 2m\,\omega + 2m'\,\omega'),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum \frac{1}{\left(u - m\pi\right)^2}.$$

On a en général, avec des périodes identiques,

$$p\,u = \frac{1}{sn^2 u} - \frac{1+k^2}{3},$$

la fonction pu étant construite à partir de quantités e_1, e_2, e_3 qui satisfont aux relations

$$e_1 - e_3 = 1, \qquad e_2 - e_3 = k^2,$$

en employant les notations habituelles [1] ; pour $k = 0$, on a, en particulier,

$$p\,u = \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3},$$

---

[1] Dans l'opuscule de M. Ch. Henry, les indices 1 et 3 sont échangés ; on n'a plus, eu égard à d'autres notations classiques, $\omega_1 = \omega$, $\omega_3 = \omega'$, mais le contraire. Ce changement est regrettable, dans un livre d'ailleurs excellent.

l'une des périodes étant $\frac{\pi}{2}$, l'autre étant $i\infty$; la formule (1) devient

$$(1') \qquad \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3} = \frac{1}{u^2} + \sum\left[\frac{1}{(u - m\pi)^2} - \frac{1}{m^2\pi^2}\right].$$

La comparaison des formules (1') et (2) donne la formule cherchée, où le signe sommatoire s'applique de 1 à ∞, et non plus de $-\infty$ à $+\infty$, zéro excepté.

[$P^1$4b]

SUR LES COURBES QUI DEMEURENT INVARIABLES QUAND ON LES SOUMET A UNE TRANSFORMATION QUADRATIQUE INVOLUTIVE;

PAR M. A. MYLLER.

On sait qu'il y a seulement deux transformations quadratiques involutives qu'on peut représenter en coordonnées trilinéaires par les formules

$$(1) \qquad x' : y' : z' = \frac{1}{y} : \frac{1}{x} : \frac{k}{z}$$

et

$$(2) \qquad x' : y' : z' = \frac{a}{x} : \frac{b}{y} : \frac{c}{z}.$$

Les courbes qui demeurent invariables par la transformation (1) sont connues. Elles ont été étudiées ([1]) spécialement dans le cas où deux des sommets du triangle de référence sont situés dans les points circu-

([1]) G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

laires à l'infini. Ces courbes sont appelées *analagmatiques.*

Je m'occuperai, dans ce qui suit, des courbes qui demeurent invariables quand on les soumet à la transformation (2).

Considérons une droite quelconque

$$(3)\qquad uX + vY + wZ = 0.$$

Sur cette droite, se trouvent seulement deux points M, M′ qui se correspondent par la transformation (2). Si x, y, z sont les coordonnées d'un de ces points M, les coordonnées du point M′ sont $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$ et les coefficients de la droite (3) qui les réunit sont donnés en fonction de x, y, z par les formules

$$(4)\qquad \frac{u}{\frac{x}{a}\left(\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}\right)} = \frac{v}{\frac{y}{b}\left(\frac{z^2}{c}-\frac{x^2}{a}\right)} = \frac{w}{\frac{z}{c}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right)}.$$

Faisons tourner la droite (3) autour d'un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0). Les points M et M′ décriront alors une courbe dont on obtient l'équation en remplaçant dans (3) X, Y, Z par x_0, y_0, z_0 et u, v, w par les valeurs obtenues des formules (4). Cette équation est

$$(5)\qquad \frac{xx_0}{a}\left(\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}\right) + \frac{yy_0}{b}\left(\frac{z^2}{c}-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{zz_0}{c}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right) = 0.$$

Elle représente une cubique qu'on pourrait considérer comme la plus simple des courbes qui se changent en elles-mêmes par la transformation (2). Cette cubique est complètement déterminée par les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point M_0 que nous nommerons *point caractéristique.* Elle passe par les points doubles de la transformation

$$(6)\qquad \begin{cases} (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), & (-\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), \\ (\sqrt{a}, -\sqrt{b}, \sqrt{c}), & (\sqrt{a}, \sqrt{b}, -\sqrt{c}), \end{cases}$$

par les sommets du triangle de référence

$$(7)\qquad (1, 0' 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

et par le point (x_0, y_0, z_0). Les tangentes aux quatre premiers de ces points se rencontrent au point caractéristique et les tangentes aux quatre derniers au point transformé du point caractéristique.

Prenons deux courbes du système (5) avec les points caractéristiques M_0 (x_0, y_0, z_0) et M_1 (x_1, y_1, z_1). Ces cubiques se rencontrent en dehors des sept points (6) et (7) qui sont communs à toutes les cubiques du système (5) encore en deux points M et M'. La droite M_0M_1, qui réunit les points caractéristiques des deux courbes, passe par les points de rencontre M et M'.

Laissons maintenant le point caractéristique décrire une courbe (K) que nous nommerons de même *courbe caractéristique*. La cubique correspondante enveloppera alors une courbe (C). Cette courbe (C), étant formée par les intersections successives des cubiques (5), possède comme elles la propriété de demeurer invariable quand on la soumet à la transformation (2). La droite qui réunit deux points correspondants M et M' sur la courbe (C) est tangente à (K). En effet, les points M et M' étant à l'intersection des deux cubiques infiniment voisines, la droite qui les réunit passe par les deux points caractéristiques infiniment voisins, c'est-à-dire qu'elle est tangente à (K).

Inversement, étant donnée une courbe (C), qui a la propriété de rester invariable par la transformation (2), la droite qui réunit deux points correspondants enveloppe une courbe caractéristique (K). La courbe donnée (C) peut être envisagée comme enveloppée par une cubique (5) dont le point caractéristique décrit la courbe caractéristique (K).

Soit

$$(8) \qquad \varphi(u, v, w) = 0$$

l'équation tangentielle de la courbe caractéristique (K). On obtient alors l'équation de la courbe (C) invariable par la transformation (2) en éliminant u, v, w entre (4) et (8). Cette équation est

$$(9) \quad \varphi\left[\frac{x}{a}\left(\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}\right), \; \frac{y}{b}\left(\frac{z^2}{c}-\frac{x^2}{a}\right), \; \frac{z}{c}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right)\right] = 0.$$

En imaginant une tangente roulant sur la courbe caractéristique (K) et portant sur elle les deux points mobiles M et M' qui décrivent la courbe (C), on peut constater les relations suivantes entre les courbes (C) et (K) :

1° A chaque tangente double de (K) correspondent deux points doubles de (C). Ce sont les deux points qui se correspondent par la transformation (2) et qui sont situés sur cette tangente.

2° A chaque point d'inflexion de (K) correspondent deux points de rebroussement de (C) situés sur les tangentes stationnaires.

3° Les points doubles (6) de la transformation sont points multiples de (C) d'un ordre égal à la classe de la courbe (K). Les tangentes dans ces points multiples sont les tangentes menées par ces points à la courbe (K).

Dans un cas spécial, où deux des sommets du triangle de référence sont situés dans les points circulaires à l'infini. la transformation (2) prend la forme

$$(10) \qquad x' = k\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y = -k\frac{y}{x^2+y^2}.$$

C'est une inversion suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Elle constitue ensemble avec l'inversion simple la *corrélation circulaire* de Möbius ([1]) caractérisée par la propriété de transformer chaque cercle dans un autre cercle.

Les courbes invariables par la transformation (10) ont une équation de la forme

$$\varphi\left(-\frac{x^2+y^2+k}{2kx}, \quad \frac{x^2+y^2-k}{2ky}\right) = 0.$$

Parmi ces courbes se trouve la cubique

$$(xy_0 - yx_0)(x^2+y^2) + 2kxy - k(xy_0 + yx_0) = 0,$$

qui correspond à la cubique (5).

BIBLIOGRAPHIE.

Les principes de l'analyse mathématique, exposé théorique et critique; Tome I, par *Pierre Boutroux*, 1 vol. in-4°, de XI + 547 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1914. Prix : 14fr.

Le beau Livre de M. P. Boutroux s'adresse aux personnes qui aimeraient à jeter un coup d'œil sur l'ensemble de l'Analyse mathématique : étudiants désireux de compléter une éducation surtout technique, philosophes dont l'attention se tourne vers les sciences. Il est très original dans son plan et pour cette raison difficile à définir. On sépare d'habitude les mathématiques, la philosophie des mathématiques et l'histoire des mathématiques. M. Boutroux a, de parti pris, mêlé les

([1]) A. F. Möbius, *Gesammelte Werke*, Vol. II, p. 243.

trois genres. On trouve, dans son Ouvrage, un cours de Mathématiques générales, des considérations sur les méthodes et d'abondantes indications sur la formation de la science. M. Boutroux a surtout en vue le « contenu » de l'Analyse et adopte une grande largeur d'exposition. Je n'oserais affirmer qu'un lecteur tout à fait novice pourrait acquérir dans *Les Principes de l'Analyse mathématique* les connaissances solides qui sont le fruit d'une lente étude : la rapidité des démonstrations, souvent esquissées, la variété des sujets (parfois abandonnés et repris, comme la Trigonométrie élémentaire, qui se trouve répartie en deux Chapitres éloignés l'un de l'autre) risqueraient peut-être de déconcerter le débutant. M. Boutroux ne prétend d'ailleurs pas substituer son exposé à celui qu'on trouve dans les traités spéciaux auxquels il renvoie fréquemment. Quoi qu'il en soit, la lecture de l'Ouvrage est extrêmement attrayante pour toute personne ayant déjà quelque familiarité avec les mathématiques. En particulier, les renseignements historiques, dont le nombre témoigne d'une érudition vraiment surprenante, ont le plus grand prix. L'histoire des Mathématiques est très négligée dans notre pays, et ce ne sont pas seulement les étudiants qui pourront s'y initier, grâce à M. Boutroux.

Le Tome I qui vient de paraître est divisé en deux Livres, intitulés : *Constatation des faits* et *Construction.*

Dans le premier Chapitre du premier Livre, *Les Nombres*, sont établies ou rappelées les propriétés fondamentales des entiers et des fractions, de la numération, etc. L'Auteur insiste sur l'origine historique ou logique des notions qui s'introduisent successivement; l'abondance des idées intéressantes et de la documentation est telle que je dois me borner à la signaler. Cette observation peut d'ailleurs être « mise en facteur » dans tout ce compte rendu trop sommaire.

Au Chapitre II, on aborde les *Grandeurs*, et particulièrement les grandeurs géométriques. Citons, comme très instructif, le paragraphe 5, sur « la confrontation du nombre et de la grandeur »; on y voit au prix de quelles difficultés s'est imposée, grâce à Descartes, l'identité du calcul algébrique et du calcul des grandeurs, identité qui nous paraît aujourd'hui si naturelle. Pour en approfondir la nature, il faut introduire les nombres incommensurables et les nombres relatifs, la notion de suite convergente et celle de limite.

On voit ensuite comment des besoins pratiques ont conduit au calcul logarithmique et à la trigonométrie.

Au Chapitre III, la Géométrie est considérée d'un autre point de vue, et les figures sont étudiées pour elles-mêmes. M. Boutroux distingue la *Géométrie qualitative* et la *Géométrie métrique*, fondée sur le calcul des grandeurs géométriques. En un nombre de pages relativement restreint, l'Auteur passe en revue à peu près toute la Géométrie élémentaire, y compris la théorie des pôles et polaires, celle de l'inversion, etc.

Étudiant ensuite le mécanisme de la démonstration géométrique, il montre que, si admirable que fût en elle-même la géométrie des Alexandrins, son principe la condamnait à une certaine stérilité et que la Science a dû, pour se rajeunir, chercher un contact plus intime avec la réalité.

Le Chapitre se termine par l'étude de la construction géométrique et des lieux géométriques.

Le Chapitre IV du premier Livre est consacré au *Calcul combinatoire*.

Le premier Chapitre du Livre II concerne le *Calcul algébrique* (histoire de l'Algèbre, règles du calcul algébrique, théorie des équations) et le Chapitre II le *Calcul des fonctions* (calcul des dérivées, des intégrales, équations différentielles et même indications sur les équations intégrales). Enfin, dans le Chapitre III, consacré à l'*Algèbre géométrique*, l'Auteur revient sur les principes de la Géométrie analytique et s'étend sur les secours que la méthode graphique apporte à l'étude des fonctions et des équations.

Encore une fois, il m'a été impossible de donner autre chose qu'une idée bien affaiblie de la richesse du Livre de M. Boutroux. Cet Ouvrage, une fois complété, ne peut manquer de constituer un tableau grandiose du développement et de l'état actuel de la Science mathématique. R. B.

Leçons sur la théorie des nombres, par *A. Châtelet*, 1 vol. in-8, x+153 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913. Prix : 5fr,50.

Ce petit volume constitue le premier Ouvrage publié par un Français sur la Théorie des corps algébriques. Il ne suppose connu du lecteur que l'Arithmétique élémentaire, les résultats classiques de la Théorie des équations, et quelques définitions relatives aux ensembles de points et aux intégrales multiples.

Partant de là, il expose : des notions relatives aux formes et aux substitutions linéaires, au calcul des tableaux, et à la géométrie des nombres; une théorie des modules de points; l'analyse diophantienne du premier degré; les éléments de l'arithmétique des corps algébriques, la définition des idéaux, la décomposition en idéaux premiers; la réduction continuelle d'Hermite; deux théorèmes de la géométrie des nombres de Minkowski; la recherche des unités d'un corps; le théorème d'Hermite, à savoir qu'il n'y a qu'un nombre fini de corps de discriminant donné; la notion de classes d'idéaux, le fait qu'elles sont en nombre fini; l'extension due à Dedekind, dans le corps de tous les entiers algébriques, de la propriété du plus grand commun diviseur des entiers ordinaires. Trois notes sont ajoutées à l'Ouvrage; la première a trait aux périodes des fonctions, la seconde est un exemple de corps algébrique avec calculs détaillés, la troisième est relative aux congruences dont le module est un idéal.

Bien que ces questions ne soient pas poussées jusqu'aux limites de la science actuelle, on peut s'étonner d'une telle abondance de matières dans un livre de dimensions aussi restreintes, et craindre qu'elle ne soit pas toujours obtenue sans dommage pour la clarté. Même en reconnaissant que l'Ouvrage est en effet un peu trop concis, il faut cependant signaler que cette grande concision tient en partie au point de vue élevé auquel se place M. Châtelet et aux méthodes très générales qu'il emploie. En particulier, il a fait le premier dans cette théorie un usage constant des tableaux et d'un théorème sur les modules de points. Ce théorème lui permet de ramener à un principe unique les démonstrations de plusieurs propriétés, présentant des analogies manifestes, mais qu'on n'avait pas encore réunies de cette façon : approximation de plusieurs incommensurables par des fractions du même dénominateur, base des entiers d'un corps, base d'un idéal, unités fondamentales. Je regrette que la place me manque ici pour parler plus en détail de ces démonstrations. Je me bornerai à dire qu'elles sont très intéressantes, et à souhaiter au Livre de M. Châtelet tout le succès qu'il *mérite*.

E. Cahen.

Théorie du point, Géométrie curviligne (deuxième Partie); Courbes dérivées de la circonférence : ellipse, parabole, hyperbole; par M. le lieutenant-colonel *P.-L. Monteil*, 1 vol. in-4°. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1914.

Les lecteurs du nouvel Ouvrage de M. le lieutenant-colonel Monteil seront surpris d'apprendre, entre autres choses :

1° Que $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (thèse soutenue depuis longtemps par l'auteur);

2° Que la parabole et l'hyperbole ne sont pas des courbes à branches infinies;

3° Que le nombre 1, quoique satisfaisant à l'équation

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

n'est pas racine de cette équation.

Ils s'expliqueront plusieurs de ces propositions contraires aux opinions les plus répandues, comme le faisait Jules Tannery dans un rapport reproduit par M. le colonel Monteil : « Il change les définitions... Les définitions étant changées, on ne peut s'étonner de voir les conclusions modifiées. » Mais ce qui rend perplexe, c'est de rencontrer, au milieu des assertions hétérodoxes de M. le colonel Monteil, des énoncés conformes à la Géométrie classique. Par exemple, l'Auteur estime, comme tout le monde, que l'aire de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ est égale à πab. De même, en ce qui concerne le segment parabolique, pour l'aire duquel il retrouve, d'une façon un peu mystérieuse, il faut l'avouer, la formule des géomètres traditionalistes, qu'il a tort, en ce cas, de vouloir confondre. En effet, la formule « classique », qu'il oppose à la sienne, et qu'il a trouvée, paraît-il, dans un livre d'enseignement, est affectée d'une erreur de coefficient numérique. R. B.

CORRESPONDANCE.

M. **Chalde**. — *Au sujet d'un théorème de P. Serret.* — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1847, P. Serret, alors élève, faisait cette remarque : Si ABCD est un contour quadrangulaire inscriptible à un cercle, E étant le point de rencontre des droites DA et BC, G étant le point de rencontre des droites DC et AB, le segment qui a pour extrémités les orthocentres des deux triangles EAB, ECD, et celui qui a pour extrémités les orthocentres des deux triangles GDA, GBC, segments portés (comme l'on sait) par la même droite, ont même milieu. On peut compléter cette remarque.

Soient A, B, C, D quatre points d'un cercle. On sait que les six droites menées par les milieux des côtés du quadrangle ABCD perpendiculairement aux côtés opposés passent par un même point Ω. Si DA et BC, par exemple, se coupent en E, et si l'on considère par exemple les deux triangles EAB, ECD, leurs orthocentres sont symétriques par rapport à Ω ; cela est immédiat, si l'on détermine les orthocentres et le point Ω par des perpendiculaires aux droites DA et BC.

Si DC et AB se coupent en G, les deux triangles GDA et GBC ont leurs orthocentres sur la droite qui joint les deux précédents, et ces deux orthocentres sont naturellement symétriques eux aussi par rapport à Ω. Les quatre triangles considérés sont ceux du quadrilatère complet fourni par le contour quadrangulaire DABC; on peut partir également du contour DBCA ou du contour DCAB.

Si O et O' sont les centres des cercles circonscrits aux triangles EAB, ECD, le centre du cercle ABCD étant désigné par I, le quadrilatère EOIO' est un parallélogramme dont les côtés sont perpendiculaires aux droites AB et CD.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Énoncer les principaux théorèmes relatifs aux séries à termes positifs.*

2° *Démontrer le théorème basé sur l'étude du rapport* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

3° *Indiquer la marche à suivre pour le calcul approché* *d'une série. Application : Calculer à* $\frac{1}{100000}$ *près la valeur de la série* $u_n = \frac{1}{(n!)^4}$.

Calcul. — *On donne la courbe* $y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$. *La construire. Évaluer la longueur d'un arc, l'aire comprise entre une boucle et l'axe des* x, *les coordonnées du centre de gravité, le volume engendré par l'aire d'une boucle tournant autour de* Ox.

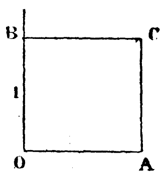
Épreuve pratique. — 1° *Intégrer*

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

2° *L'expression*

$$du = 2x \frac{e^y - e^{-y}}{(x^2+1)^2} dx + \frac{x^2 c^y - e^{-y}}{x^2+1} dy$$

est-elle une différentielle exacte ?



L'intégrer suivant OAC, *suivant* OBC.

(Juin 1911.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation linéaire à coefficients constants*

$$\frac{d^2 y}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x.$$

2° *Déterminer les constantes d'intégration de façon que la courbe* $y = f(x)$ *passe par l'origine des coordonnées et soit tangente en ce point à* Ox.

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe ainsi déterminée, l'axe des* x *et les abscisses* 0 *et* 1.

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$
$$+(x^2-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

définissant une fonction z *de* x *et* y.

On fait le changement de variables

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,$$

en prenant ρ *et* φ *comme nouvelles variables indépendantes.*

Intégrer l'équation transformée. Donner l'intégrale de l'équation primitive.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Appliquer la méthode des parties proportionnelles, puis la méthode de Newton au calcul approché des racines de l'équation*

$$z^4-z+1=0.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Expliquer sur l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{ax}$$

la méthode d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Donner l'intégrale générale.

2° *Cas où* $a=2$.

3° *Dans le cas où* $a\neq 2$ *ou* 3, *en considérant cette intégrale comme l'équation d'une courbe, déterminer les constantes arbitraires de façon que la courbe passe par l'origine et soit tangente en ce point à* Ox.

4° *En supposant* $a=4$, *déterminer les points d'inflexion de cette courbe.*

5° *Construire cette courbe. Calculer la fraction de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des* x, *dans la* région *négative des abscisses.*

(Novembre 1912.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Cours. — *Maxima et minima de la fonction*

$$u = \frac{A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

à l'égard des trois variables indépendantes x, y et z; application à la démonstration de la réalité des racines de l'équation en S.

Problèmes. — I. *Condition pour qu'un cône du second degré admette un système de trois génératrices perpendiculaires deux à deux.*

II. *Transformer et intégrer l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

par le changement de variables

$$\xi = x + at,$$
$$\zeta = x - at.$$

III. *Déterminer la fonction de n variables indépendantes $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ qui, étant de la forme*

$$F(r); \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

satisfait identiquement à l'équation

$$\frac{d^2 F}{dx_1^2} + \frac{d^2 F}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 F}{dx_n^2} = 0.$$

Cas particuliers de $n = 2$ et de $n = 3$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Quelles sont les surfaces représentées par l'équation*

$$-9ax^2 + (8 - a)y^2 - 2xy(3a + 4) - z^2 - 2yz - 22x = 0$$

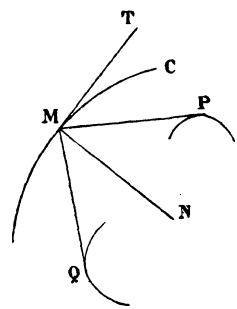
pour les diverses valeurs de a?

(Juin 1912.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Démontrer que toute courbe, pour laquelle le rayon de courbure reste constant quand on se déplace le long de la courbe, est un cercle.*

II. *Soient* C *une courbe,* M *un point quelconque pris sur la courbe,* MN *la normale. On considère un angle droit*



QMP *dont la bissectrice est la normale* MN. *Lorsque* M *varie, les droites* MP *et* MQ *ont chacune une enveloppe.*

1° *Démontrer que les points* P, Q, *où les droites* MP, MQ *touchent respectivement leurs enveloppes, sont à égale distance du point* M.

2° *Quelle doit être la courbe* C *pour que les distances égales* MP, MQ *restent constantes lorsque le point* M *se déplace sur la courbe* C.

Épreuve pratique. — *On considère l'ellipse* ABA'B' *qu'on suppose représenter une méridienne de la surface terrestre,* B'B *étant la ligne des pôles. L'équation de cette ellipse dans le système d'axes rectangulaires* Ox, Oy *sera*

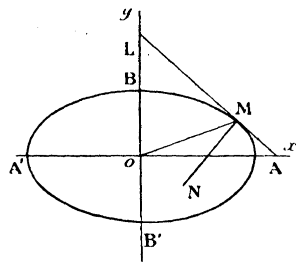
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et l'on donne

$$a = 6378^{\text{km}}, \qquad b = 6356^{\text{km}}.$$

Si M *est un point quelconque de la portion* AB *de l'ellipse,* ML *la tangente en* M *qui fait avec* Oy *un angle* φ

égal à la latitude *du point* M, *la verticale apparente* MN *est la normale en* M *à l'ellipse. Cette verticale fait avec*



OM *un angle* Σ *variable avec* φ. *On demande de calculer, à* 1′ *près, la latitude pour laquelle* Σ *est maximum et, à* 1″ *près, la valeur de ce maximum.*

(Novembre 1911.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1)\qquad (1+x^2)y' + 2xy - 2x\sin x - (1+x^2)\cos x = 0.$$

2° *Déduire du résultat trouvé l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(2)\qquad (1+x^2)y'' + 2xy' - 2x\sin x - (1+x^2)\cos x = 0.$$

3° *Quelle est l'intégrale particulière de l'équation* (2) *qui s'annule en même temps que sa dérivée pour* $x = 0$?

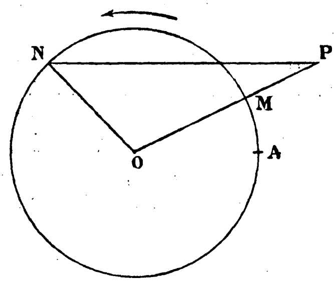
II. *Un point* M, *primitivement en* A, *décrit la circonférence de centre* O *et de rayon* OA = R *dans le sens de la flèche. On porte sur* OM, *dans le sens du vecteur* $\overline{\text{OM}}$, *un segment* $\overline{\text{MP}}$ *de longueur égale à celle de l'arc* AM.

1° *Construire le lieu géométrique* C *du point* P.

2° *Montrer que la normale à la courbe* C *au point* P *passe par le point* N *de la circonférence, tel que l'angle* MON *soit égal à un angle droit.*

3° *Évaluer la longueur de l'arc décrit par le point* P *quand le point* M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s.*

4° *Évaluer l'aire balayée par le segment* MP *quand le*



point M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s.*
Cas particulier où $s = 2\pi R$.

Épreuve pratique. — I. *Appliquer le développement en série de* e^x *au calcul de* $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ *avec trois décimales.*

II. *Montrer que l'équation*

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

a une seule racine réelle, et calculer cette racine avec deux décimales.

(Novembre 1911.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

Épreuve théorique. — *On envisage tous les cercles définis par l'équation*

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2,$$

où l'on a

$$\alpha = u - \operatorname{tang} u, \qquad r = \operatorname{tang} u,$$

u désignant une variable arbitraire. On demande : 1° *de déterminer les trajectoires orthogonales de tous ces cercles et de calculer l'élément linéaire du plan rapporté au système de coordonnées curvilignes formé de ces cercles et de leurs trajectoires orthogonales;* 2° *de faire la carte de la sphère de telle manière que les parallèles correspondent aux cercles précédents et les méridiens à leurs trajectoires orthogonales, l'équation de la sphère correspondant au cercle de rayon infini* $\left(u = \frac{\pi}{2}\right)$ *et le méridien de longitude nulle à l'axe des x, les longueurs étant de plus conservées à la fois sur l'équation et sur le méridien de longitude nulle.*

On supposera le rayon de la sphère égal à l'unité.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Représenter, dans le système de la projection équivalente de Lambert, la moitié de l'hémisphère Nord. Tracer les parallèles et les méridiens de* 10° *en* 10° *en prenant le méridien central pour origine et le pôle Nord pour centre du tracé.*

Les formules qui donnent les coordonnées polaires du point du plan qui correspond au point de la sphère de longitude v et de colatitude u sont

$$w = v, \qquad \rho = 2a \sin\frac{u}{2};$$

a désigne le rayon de la sphère que l'on prendra égal à 9^{cm}.

On pourra déterminer les valeurs de ρ soit graphiquement, soit par le calcul.

II. *Faire la perspective du canevas obtenu, supposé dessiné sur le géométral, le tableau étant un plan vertical parallèle au diamètre qui limite le canevas, situé à* 15^{cm} *de ce diamètre, du côté où se trouve le canevas.*

L'horizon est à une cote de 9^{cm}; *le point principal est dans le plan de profil mené par le méridien central et la distance vaut* 12^{cm}. *L'échelle du tableau est double de celle du géométral. Faire le dessin dans un cadre de* $28^{\text{cm}} \times 44^{\text{cm}}$. *Placer la projection au-dessous du petit axe du cadre et la perspective au-dessus.* (Mars 1911.)

Épreuve écrite. — 1° *Trouver les modes de représentation de la sphère sur le plan dans lesquels les aires sont conservées; les méridiens correspondent à des droites concourantes et les parallèles à des droites parallèles.*

2° *Déterminer les lignes géodésiques de la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule*

$$ds^2 = (x^2 + y^2 + a^2)(dx^2 + dy^2).$$

Épreuve pratique. — *Faire une projection stéréographique sur le plan du méridien perpendiculaire au méridien de Paris.*

Représenter les méridiens et les parallèles de 10° *en* 10°, *en déterminant leurs éléments soit graphiquement, soit par le calcul.*

Placer le centre de la carte au centre de la feuille, le méridien de Paris suivant le grand axe de la feuille. Le rayon de la carte vaut 6^{cm}.

Construire l'horizon de Paris ($l = 0$, $\lambda = 48°,50$).

Déterminer la projection du grand cercle qui passe par les deux points a ($l = -60°$, $\lambda = -20°$), b ($l = -30°$, $\lambda = -50°$), *le pôle de ce grand cercle et la distance des deux points.*

On dessinera en trait noir fin les résultats, c'est-à-dire les parallèles limités au contour de la carte et les méridiens limités aux parallèles de 80°; *en rouge, les lignes de construction.*

On expliquera très sommairement les tracés effectués.

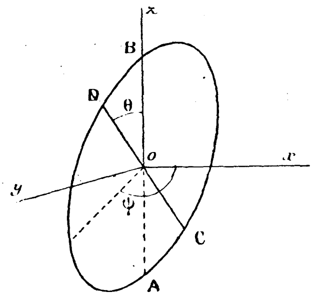
(Octobre 1911.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Une circonférence homogène de masse* 2M, *de rayon* R, *peut tourner autour d'un de ses diamètres* AB *qui est fixe. Les deux extrémités* CD *d'une tige rectiligne homogène infiniment mince de longueur égale au diamètre de la circonférence glissent sur cette circonférence. La masse de la tige est* 3M. *Les liaisons sont sans frottement.*

1° *Former et intégrer les équations du mouvement du système. On prend comme paramètres l'angle* ψ *du plan* *de la circonférence et d'un plan fixe passant par* AB *et l'angle* θ *de la barre* CD *et du diamètre fixe* AB.



2° *Discuter : on désignera par* θ'_0, ψ'_0 *les valeurs initiales de* $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$, $\psi' = \dfrac{d\psi}{dt}$, *et l'on supposera les valeurs initiales de* ψ *et* θ *respectivement égales à zéro et* $\dfrac{r}{2}$.

3° *Indiquer une méthode pour déterminer, autant qu'il est possible de le faire, les réactions s'exerçant en* C *et* D.

(Juillet 1912.)

QUESTIONS.

2219. Une hypocycloïde (H) et une épicycloïde (E) à trois rebroussements ont les mêmes points de rebroussement : démontrer que la tangente à (H) en un point quelconque A coupe (E) en deux points réels B et B′ dont la distance est constante, que les milieux de AB et AB′ appartiennent à (H); les normales en B et B′ à (E) sont rectangulaires et se coupent sur le cercle des rebroussements; les tangentes en ces points se coupent sur le cercle des sommets de (E); le cercle de diamètre BB′ touche les deux cercles précédents.

J. Lemaire.

2220. On considère les trajectoires orthogonales Γ d'un système de cercles C homothétiques entre eux par rapport au pôle O. Le centre de courbure de la courbe Γ répondant au point M où elle coupe orthogonalement le cercle C est le pôle de la droite OM par rapport à ce cercle.

M. d'Ocagne.

[O¹2q]

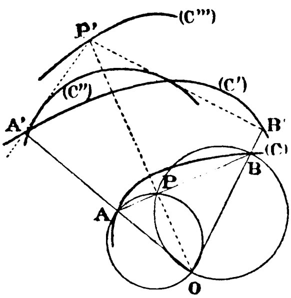
SUR LES CORDES D'UNE COURBE VUES D'UN POINT FIXE SOUS UN ANGLE CONSTANT;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Soient O un point fixe dans le plan d'une courbe (C), A et B deux points variables de (C) tels que l'angle AOB soit un angle constant α (*fig.* 1). Désignons par E_α l'enveloppe de la corde AB.

Fig. 1.



Soit P la projection de O sur la corde AB; ce point est à l'intersection des cercles décrits sur OA et OB comme diamètres, et l'enveloppe E_α est l'antipodaire du lieu de P. Transformons la figure par une inversion de pôle O, de puissance quelconque, et affectons d'accents les lettres qui désignent les transformés des éléments correspondants de la figure primitive.

Les droites $A'P'$ et $B'P'$ enveloppent l'antipodaire (C'') de la courbe (C') relativement à O, et, comme l'angle

$A'P'B'$ est constant et égal à $\pi - \alpha$, le point P' décrit la courbe isoptique d'angle $\pi - \alpha$ de la courbe (C'').

Or, l'antipodaire (C'') de l'inverse (C') de la courbe (C) est la polaire réciproque de (C) par rapport à un cercle de centre O [1].

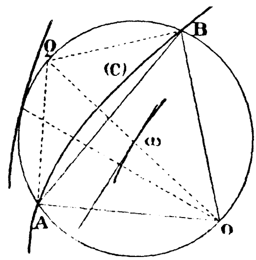
Le lieu de P est donc l'inverse de l'isoptique (C''') de (C''), et E_α est l'antipodaire de l'inverse de (C''').

On est ainsi conduit à ce théorème :

Théorème A. — *L'enveloppe* E_α *est la polaire réciproque de l'isoptique d'angle* $\pi - \alpha$ *de la polaire réciproque de* (C).

2. Soit ω le centre du cercle AOB, et cherchons le lieu L_α de ce point (*fig.* 2). Désignons par Q le point

Fig. 2.



d'intersection des perpendiculaires élevées en A et B sur OA et OB; le lieu de ω est homothétique de celui de Q (rapport 1:2). Or, QA et QB enveloppent l'antipodaire de (C) par rapport à O et, comme l'angle Q est constant et égal à $\pi - \alpha$, on a ce théorème :

Théorème B. — *Le lieu* L_α *du centre du cercle* AOB

---

(1) S. Lie und G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, 1896, p. 17.

est homothétique de l'isoptique d'angle $\pi - \alpha$ *de l'antipodaire de* (C).

Les considérations qui précèdent montrent qu'il existe entre une enveloppe E_α et un lieu L_α la relation suivante :

THÉORÈME C. — *L'enveloppe* E_α *pour une courbe* (C) *est homothétique de la polaire réciproque du lieu* L_α *pour la courbe inverse.*

Dans le cas où l'angle α est droit, ω est le milieu de AB, et le théorème B devient le suivant :

THÉORÈME D. — *Le lieu* $L_{\frac{\pi}{2}}$ *des milieux des cordes d'une courbe, vues d'un point fixe sous un angle droit, est homothétique de l'orthoptique de l'antipodaire de la courbe.*

Enfin, l'enveloppe du cercle AOB s'obtient aisément en utilisant le théorème B. On sait que l'enveloppe d'un cercle qui passe par un point fixe, est homothétique de la podaire (rapport 2 : 1) du lieu de son centre.

THÉORÈME E. — *L'enveloppe du cercle* AOB *est la podaire de l'isoptique d'angle* $\pi - \alpha$ *de l'antipodaire de* (C).

Les théorèmes précédents ramènent la recherche des lieux et des enveloppes considérés à des transformations connues.

II. — APPLICATIONS.

3. *Coniques.* — La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle quelconque est une seconde

conique; les isoptiques de cette conique sont des spiriques de Perseus ([1]).

L'enveloppe des cordes d'une conique vues d'un point fixe sous un angle constant est la polaire réciproque d'une spirique de Perseus.

La recherche de cette enveloppe a été proposée par M. Barisien dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ([2]). La solution analytique (*Quilibet*) montre que l'enveloppe est de la quatrième classe, ce qui résulte aussi du théorème précédent.

Si le point O est sur la conique, la polaire réciproque de la conique par rapport à un cercle de centre O est une parabole, dont les isoptiques sont des coniques.

Ainsi, *les cordes d'une conique vues d'un point fixe de la courbe sous un angle constant, enveloppent une conique.*

Si le point O *coïncide avec un foyer*, la polaire réciproque est un cercle et *l'enveloppe* E_α *est une conique.*

Si l'angle α *est droit et si le point* O *est quelconque*, l'orthoptique de la polaire réciproque étant un cercle, *l'enveloppe* $E_{\frac{\pi}{2}}$ *est une conique.*

Quand le point O est au centre de la conique, cette enveloppe est un cercle.

Enfin, si le point O est sur la conique et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la polaire réciproque ayant pour orthoptique une droite, la corde AB pivote autour du pôle de cette droite. C'est le théorème de Frégier.

4. Si l'on considère les cordes d'un cercle qui

([1]) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 132.
([2]) Février 1913, p. 30.

passent par un point fixe, leurs milieux sont sur un cercle passant par le centre du cercle considéré. Par affinité, cette propriété s'étend aux coniques.

Dès lors, si l'on considère les cordes d'une conique vues d'un point de la courbe sous un angle droit, elles passent par un point fixe, et la propriété précédente est applicable.

Ainsi, *le lieu des milieux des cordes d'une conique, vues d'un point de la courbe sous un angle droit, est une conique passant par le centre de la conique donnée.*

Ceci posé, remarquons que l'inverse d'une conique est une cubique circulaire lorsque le centre d'inversion appartient à la courbe, et que ce centre est le point double de la cubique. En appliquant le théorème C, on aura donc la propriété suivante :

Les cordes d'une cubique circulaire vues du point double sous un angle droit enveloppent une conique ([1]).

On déduit aussi de ce qui précède, au moyen du théorème D, que l'orthoptique de l'antipodaire d'une conique, par rapport à un point de cette conique, est une seconde conique.

On sait que, dans le cas de la parabole, cette antipodaire est une parabole semi-cubique de Neil.

Ainsi, *l'orthoptique de la parabole de Neil est une conique.*

En d'autres termes :

Le lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires est une conique.

([1]) Voir, *Intermédiaire des Mathématiciens,* solution de la question 2753, 1904.

5. Le théorème D donne lieu à de nombreuses conséquences intéressantes. On sait que les quartiques bicirculaires unicursales sont les podaires des coniques. On a donc ce théorème :

Le lieu des milieux des cordes d'une quartique bicirculaire unicursale vues du point double sous un angle droit est une circonférence.

En particulier, la podaire centrale d'une conique est une lemniscate de Booth, et, dans ce cas, la circonférence trouvée est concentrique à la conique. On en déduit aisément cette propriété (¹) :

Les cordes d'une lemniscate de Booth, vues du centre sous un angle droit, sont toutes égales entre elles.

De même, les podaires de la parabole sont les cubiques circulaires. Comme l'orthoptique d'une parabole est sa directrice, on peut donc dire que *le lieu des milieux des cordes d'une cubique circulaire, vues du point double sous un angle droit, est une parallèle à l'asymptote* (²).

L'application du théorème D donne aussi la démonstration de cette propriété du trifolium droit signalée par M. Barisien (³) :

Le lieu des milieux des cordes du trifolium droit, vues du point triple sous un angle droit, est un cercle.

En effet, l'antipodaire du trifolium droit, par rapport

(¹) *Mathesis*, 1913, p. 64.

(²) *Intermédiaire des Mathématiciens*, question 2707 (Th. Lemoyne), 1904.

(³) *Mathesis*, 1913, p. 263.

à son point triple, est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont l'orthoptique est un cercle (cercle tritangent).

On voit, de plus, que la propriété est vraie pour une podaire quelconque de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

En particulier, *le lieu des milieux des cordes d'un trifolium oblique, vues du point triple sous un angle droit, est une circonférence.*

6. Le théorème B appliqué au cas des cubiques circulaires donne le théorème suivant :

Si une corde AB *d'une cubique circulaire est vue du point double* O *sous un angle constant, le centre du cercle* AOB *décrit une conique, quand la corde* AB *varie.*

Le théorème E établit, entre les cubiques circulaires et les quartiques bicirculaires unicursales, une relation remarquable.

Les cercles qui passent par le point double d'une cubique circulaire et qui déterminent avec la courbe des cordes vues de ce point sous un angle constant, enveloppent une quartique bicirculaire unicursale.

7. Au point de vue qui nous occupe, les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = a\cos\mu\theta + b\sin\mu\theta, \tag{1}$$

où μ *est un entier impair*, méritent une attention spéciale. Elles peuvent être considérées comme résultant de l'addition des rayons vecteurs de deux rosaces de même indice. Si ρ et θ désignent les coordonnées polaires de A, et ρ' le rayon vecteur OB qui correspond à l'angle $\theta - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho' = a \cos\left(\mu\theta - \mu\frac{\pi}{2}\right) + b \sin\left(\mu\theta - \mu\frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$(2) \qquad \rho' = \pm a \sin\mu\theta \mp b \cos\mu\theta.$$

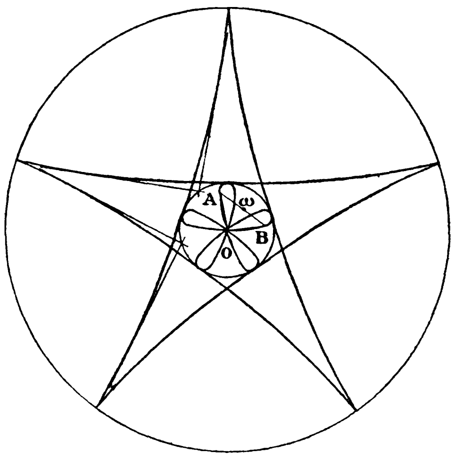
On déduit de (1) et (2)

$$\begin{aligned}\rho^2 + \rho'^2 = {} & a^2\cos^2\mu\theta + b^2\sin^2\mu\theta + 2ab\sin\mu\theta\cos\mu\theta \\ & + a^2\sin^2\mu\theta + b^2\cos^2\mu\theta - 2ab\sin\mu\theta\cos\mu\theta = a^2 + b^2.\end{aligned}$$

L'hypoténuse du triangle rectangle AOB est donc constante, ainsi que la médiane issue de O qui en vaut la moitié. On a donc ce théorème :

Pour les courbes (1), *le lieu* $L_{\frac{\pi}{2}}$ *est un cercle ayant*

Fig. 3.



son centre à l'origine. En particulier (*fig*. 3), si a est nul, les courbes (1) sont des *Rosaces* [1]. *Le lieu des*

[1] LORIA-SCHÜTTE, *Spez. ebene Kurven*, t. 1, p. 358.

milieux des cordes d'une rosace d'indice impair, vues du centre sous un angle droit, est un cercle concentrique.

Pour les courbes inverses des Rosaces (*Ähren-kurven*) [1], l'enveloppe $E_{\frac{\pi}{2}}$ sera un cercle, en vertu du théorème C. En particulier, si $\mu = 3$, la courbe correspondante a pour équation

$$\rho = \frac{b}{\sin 3\theta}$$

et est donc une trisectrice de G. de Longchamps [2].

Ainsi, *les cordes d'une trisectrice de Longchamps, vues du centre sous un angle droit, enveloppent un cercle concentrique.*

8. Le théorème D permet de déduire, de ces considérations relatives aux Rosaces, une propriété de certaines hypocycloïdes. On sait, en effet [3], qu'une épicycloïde ou une hypocycloïde de module n (rapport du rayon du cercle décrivant à celui du cercle fixe) ont pour podaires centrales des Rosaces d'indices

$$\frac{1}{1+2n} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1-2n}.$$

Comme

$$\frac{1}{1+2n} < 1,$$

les Rosaces considérées au paragraphe précédent ne peuvent pas être des podaires d'épicycloïdes. Mais, si

$$\frac{1}{1-2n} = k,$$

---

(1) Loria-Schütte, *Spez. ebene Kurven*, t. I, p. 367.

(2) *Ibid.*, t. I, p. 92.

(3) *Ibid.*, t. II, p. 108.

k étant impair, ou si

$$n = \frac{k-1}{2k},$$

l'hypocycloïde correspondante aura pour podaire une des Rosaces considérées et, pour orthoptique, un cercle concentrique au cercle de base, en vertu du théorème D. On a donc ce théorème :

Les hypocycloïdes de module

$$n = \frac{k-1}{2k},$$

où k est un entier impair, ont pour orthoptique un cercle.

En particulier, si $k = 3$, $n = \frac{1}{3}$, et l'on retrouve une propriété bien connue de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Si $k = 5$, $n = \frac{2}{3}$, et l'on obtient une hypocycloïde étoilée à cinq rebroussements (*fig.* 3), dont l'orthoptique est un cercle (cercle cinq fois tangent).

III. — Courbes a point de Frégier.

9. On peut se demander dans quel cas l'enveloppe $E_{\frac{\pi}{2}}$ se réduit à un point, comme dans le cas ou l'on considère une conique et que le point O appartient à cette conique. On peut alors dire que la courbe a un *point de Frégier*.

En vertu du théorème A, il faudra que la courbe (C″) ait pour orthoptique une droite, par exemple l'axe des x. Or, ceci revient à chercher les courbes qui se transforment en elles-mêmes par une transformation orthotangentielle définie, en coordonnées tangentielles, par les équations de transformation :

$$(3) \qquad x_1 : y_1 : z_1 = y : -x : \frac{yz}{x}.$$

En coordonnées ponctuelles, ces équations de transformation sont celles qui caractérisent une inversion de Hirst, dans laquelle on fait correspondre à un point M un point M′ tel que MM′ soit parallèle à l'axe des y et que la distance MM′ soit vue de l'origine sous un angle droit. Cette transformation est la polaire réciproque de la transformation orthotangentielle par rapport au cercle

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Si donc une courbe algébrique

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0$$

est telle que son équation soit identique à

$$(6) \qquad f\left(y, -x, \frac{yz}{x}\right) = 0,$$

elle aura un point de Frégier à l'infini. Pour en déduire une courbe à point de Frégier à distance finie, il suffit de prendre la polaire réciproque par rapport au cercle (4), puis la polaire réciproque de la courbe obtenue par rapport à un cercle quelconque.

10. Cherchons donc les fonctions de degré n telles que les équations (5) et (6) soient identiques. Remarquons d'abord que si l'on considère un terme

$$x^{n-2\alpha-l} y^{\alpha} z^{\alpha+l},$$

où l'exposant de z est supérieur à celui de y, la substitution (3) donnera lieu à un terme

$$(-1)^{n-2\alpha-l}\frac{y^{n-\alpha}z^{\alpha+l}}{x^l},$$

dans lequel x est en dénominateur. Désignons par k l'exposant de la plus haute puissance de x qui pourra ainsi se produire en dénominateur. Quand on voudra ramener l'équation (6) à la forme primitive (5), on devra multiplier tous les termes par x^k; donc, pour retrouver une équation de degré n, on devra pouvoir diviser tous les termes de l'équation (6) par un terme de degré k. Or, tous les termes de cette équation ne peuvent renfermer z, car les z de l'équation (6) proviennent des mêmes puissances de z dans l'équation (5). Tous les termes de l'équation (6) ne sont pas divisibles par x, puisque, par hypothèse, la substitution (3) donne lieu à des fractions où x est en dénominateur. Il résulte de là que tous les termes de l'équation (6) doivent être divisibles par y^k. Ainsi, pour que les équations (5) et (6) soient identiques, il faut que

$$(7)\qquad f(x, y, z) = \frac{x^k}{y^k} f\left(y, -x, \frac{yz}{x}\right).$$

Pour que tous les termes de l'équation (6) soient divisibles par y^k, il faut que, dans l'équation primitive (5), la somme des exposants de z et x soit au moins égale à k.

Ceci posé, considérons un terme de l'équation (5)

$$(8)\qquad z^p x^{n-p-h} y^h \qquad (p < k).$$

La transformation (3) et la multiplication par $\frac{x^k}{y^k}$ donnent lieu au terme

$$(9)\quad y^{n-p-h}(-1)^h x^h \frac{y^p z^p}{x^p}\frac{x^k}{y^k} = (-1)^h y^{n-k-h} x^{k-p+h} z^p.$$

En vertu de (7), ce terme doit exister dans l'équation (5). Mais il faut que, si l'on transforme (9), on retrouve (8); or, si l'on transforme le terme (9), on trouve

$$(-1)^{n-k} x^{n-p-h} z^p.$$

Il faut donc que $n-k$ soit pair. Le même raisonnement s'applique au cas où $p > k$, mais alors h devra être au moins égal à $p-k$, conformément à ce qui a été dit plus haut relativement aux exposants de z et x. On voit, en outre, aisément que p peut varier de o à $\frac{1}{2}(n+k)$ et h de o à $\frac{1}{2}(n-k)$ ou de $p-k$ à $\frac{1}{2}(n-k)$, suivant les cas.

De plus, on aurait pu faire correspondre à (8) le terme (9) changé de signe; on aurait alors dû changer tous les signes dans l'équation (6).

On arrive ainsi à la proposition suivante :

Les équations

$$(10) \quad \Sigma z^p \left\{ \Sigma l_{p,h} [x^{n-p-h} y^h + (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \right\} = 0$$

et

$$(11) \quad \Sigma z^p \left\{ \Sigma l_{p.h} [x^{n-p-h} y^h - (-1)^h x^{k-p+h} y^{n-k-h}] \right\} = 0$$

représentent les courbes algébriques qui ont un point de Frégier à l'infini.

On donnera à k une valeur inférieure à n et de même parité que n, on fera varier p de o à $\frac{n+k}{2}$ et, à chaque valeur de p inférieure à k, on fera correspondre les valeurs de h de o à $\frac{1}{2}(n-k)$; à partir de $p=k$, on fera varier h de $p-k$ à $\frac{n-k}{2}$.

En vertu du paragraphe 9, pour avoir une courbe à point de Frégier à distance finie, il suffit de considérer, dans (10) et (11), x, y, z comme coordonnées tangentielles et de prendre les polaires réciproques par rapport à un cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \tag{12}$$

Si l'on transporte l'origine au point (α, β), on trouve les équations

$$\Sigma(\alpha x+\beta y-r^2)^p \left\{ \Sigma l_{p,h}[x^{n-p-h}y^h + (-1)^h x^{k-p+h}y^{n-k-h}] \right\} = 0$$

et

$$\Sigma(\alpha x+\beta y-r^2)^p \left\{ \Sigma l_{p,h}[x^{n-p-h}y^h - (-1)^h x^{k-p+h}y^{n-k-h}] \right\} = 0,$$

qui caractérisent les courbes qui ont un point de Frégier correspondant à l'origine.

11. Cherchons quand les courbes représentées par (10) et (11) en coordonnées tangentielles sont tangentes à l'axe des x. Les coordonnées de cet axe étant 0, 1, 0, il suffira de chercher quand tous les termes des équations considérées renferment x ou z. Or, les termes qui ne renferment pas z sont

$$\Sigma l_{0,h}[x^{n-h}y^h + (-1)^h x^{k+h}y^{n-k-h}]$$

et

$$\Sigma l_{0,h}[x^{n-h}y^h - (-1)^h x^{k+h}y^{n-k-h}].$$

Tous les termes $x^{n-h}y^h$ renferment x, car h est inférieur à n. Pour que le terme

$$x^{k+h}y^{n-k-h}$$

ne renferme pas x, il faut $k=h=0$.

Ainsi, les courbes représentées par (10) et (11) en coordonnées tangentielles touchent l'axe des x, excepté quand $k=0$. Donc leurs polaires réciproques passent par le pôle de cet axe. Si l'on observe que $n-k$ est toujours pair, on déduit, de là, le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre impair a un point de Frégier, ce point appartient à la courbe.

Si une courbe d'ordre pair a un point de Frégier, ce point appartient à la courbe si $k \neq 0$, et se trouve en dehors de la courbe si k est nul.

12. *Cubiques.* — Dans le cas où $n=3$, on a $k=1$. Les équations (10) et (11) deviennent

$$\begin{gathered} l_{0,0}(x^3 \pm xy^2) + l_{0,1}(x^2y \mp x^2y) \\ + z[l_{1,0}(x^2 \pm y^2) + l_{1,1}(xy \mp xy)] + z^2[l_{2.1}(y \mp y) = 0. \end{gathered}$$

On voit que la seule équation à considérer est l'équation (11) et qu'on peut l'écrire

$$(13) \quad x(x^2-y^2) + ax^2y + b(x^2-y^2) + cxy + dy = 0.$$

Cette équation représente les cubiques qui ont un point de Frégier à l'infini dans la direction de l'axe des y. Si $d=0$, l'origine est un point double; les tangentes à la courbe en ce point ont pour coefficients angulaires les racines de l'équation

$$bm^2 + cm - b = 0,$$

et sont, par suite, rectangulaires. Il en sera de même pour la polaire réciproque, par rapport au cercle (12), de la courbe représentée en cordonnées tangentielles par l'équation (13) où $d=0$. On en déduit ce théorème :

Les cubiques nodales dont les tangentes au point double sont rectangulaires ont un point de Frégier situé sur la courbe.

On retrouve ainsi une propriété signalée par M. Th. Lemoyne dans l'*Intermédiaire des Mathéma-*

ticiens (1). Mais l'analyse précédente montre qu'il y a d'autres cubiques ($d \neq 0$) qui possèdent un point de Frégier.

13. *Quartiques.* — Dans le cas de $n = 4$, on trouve

$$x(ax+b)(x^2-y^2)+y(cx^2+dx^2+ex+f)=0 \quad (k=2).$$
$$x^4+y^4+axy(x^2-y^2)+bx^2y^2+c(x^2-y^2)y+dxy^2+fy^2=0$$
$$(k=0).$$

A cette dernière classe de quartiques appartient le trifolium droit, que l'on obtient pour

$$b=2, \qquad a=d=f=0.$$

Ainsi, *les cordes d'un trifolium droit vues du point triple sous un angle droit sont parallèles entre elles.*

Cette propriété résulte aussi de la transformation indiquée par G. de Longchamps pour déduire le trifolium du cercle (2); cette transformation montre aussi que la propriété est vraie pour le trifolium oblique. En particulier, elle a lieu pour le folium double (3).

Si $a=b=d=f=0$, on trouve une courbe d'équation

$$x^4+y^4+c(x^2-y^2)y=0.$$

C'est le trifolium de Cramer (4). On a donc ce théorème :

Les cordes d'un trifolium de Cramer, vues du

(1) Question 2706, 1904, p. 4.

(2) LORIA-SCHÜTTE, t. I, p. 168.

(3) Question 2876 de M. Lemoyne dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1905, p. 27.

(4) CRAMER, *Introduction à l'Analyse des courbes algébriques*, 1750, p. 421. — LORIA-SCHÜTTE, t. I, p. 171.

point triple sous un angle droit, sont parallèles à l'axe de symétrie de la courbe.

[O'2q]

SUR LES COURBES ISOPTIQUES ET LES PODAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. On désigne sous le nom de *courbe isoptique d'une autre courbe* (C_1) *et d'un point* O le lien (C) décrit par le sommet d'un angle constant dont un des côtés est tangent à (C_1) et l'autre passe par le point donné O. Si l'angle est droit, la courbe (C) est dite *orthoptique* et elle est identique à la *podaire* de (C_1) par rapport à O.

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point O et représentons la courbe (C_1) par les équations paramétriques

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

l'angle donné par α, et les coordonnées de son sommet par (X, Y). On a

$$(Y - y)x' = (X - x)y',$$
$$Y = \frac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha} X.$$

Donc la courbe (C) peut être représentée par les équations paramétriques

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} \, \frac{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sin\alpha}, \\ Y &= \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} \, \frac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et si X_1, Y_1 désignent les valeurs qu'alors prennent X, Y, on a les équations de la courbe orthoptique de (C_1) et O, savoir :

$$X_1 = -\frac{(yx' - xy')y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad Y_1 = \frac{(yx' - xy')x'}{x'^2 + y'^2}.$$

Donc on a

$$X \sin\alpha = Y_1 \cos\alpha + X_1 \sin\alpha,$$
$$Y \sin\alpha = Y_1 \sin\alpha - X_1 \cos\alpha,$$

ou

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = Y_2 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha, \\ Y = Y_2 \sin\alpha - X_2 \cos\alpha, \end{array} \right.$$

où

$$(3) \qquad X_1 = X_2 \sin\alpha, \qquad Y_1 = Y_2 \sin\alpha.$$

Quand le point (X_1, Y_1) décrit la podaire de (C_1) par rapport à O, le point (X_2, Y_2) décrit une courbe semblable à celle-là. Le point (X, Y), déterminé par les équations (2), décrit la courbe isoptique de (C_1) et O. Mais, en désignant par (θ, ρ) et (θ_2, ρ_2) les coordonnées polaires des points (X, Y) et (X_2, Y_2), on a

$$\tang\theta = \frac{Y}{X}, \qquad \tang\theta_2 = \frac{Y_2}{X_2},$$

et, par conséquent, en tenant compte des formules (2),

$$\tang(\theta - \theta_2) = \tang\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où il résulte

$$\theta - \theta_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Comme on a aussi $\rho = \rho_2$, nous avons le théorème suivant :

La courbe isoptique de C_1 *et* O *est semblable à la* *podaire de* (C_1) *par rapport à* O. *On détermine la nature de cette courbe, quand la podaire est connue, au moyen des équations* (3), *et l'on en obtient la position dans le plan de* (C_1) *en faisant tourner le lieu de* (X_2, Y_2) *autour du point* O *d'un angle égal à* $\frac{\pi}{2} - \alpha$ *dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.*

2. Nous allons nous occuper maintenant de la question inverse de celle qui précède, c'est-à-dire du problème suivant :

Déterminer une courbe (C_1) *sur laquelle doit rouler un côté d'un angle donné* α, *dont l'autre côté passe par un point fixe* O, *pour que le sommet* M *décrive une ligne donnée* (C).

Prenons encore pour origine des coordonnées orthogonales le point O. L'équation d'une tangente à la courbe (C_1) est

$$x \cos\omega + y \sin\omega = p = f(\omega),$$

ω désignant l'angle que la normale correspondante fait avec l'axe des abscisses et $p = f(\omega)$ la distance de l'origine à la tangente considérée. La courbe (C_1) est l'enveloppe des positions que cette tangente prend quand ω varie, et elle peut donc être représentée par les équations paramétriques

$$x = f(\omega) \cos\omega - f'(\omega) \sin\omega,$$
$$y = f'(\omega) \cos\omega + f(\omega) \sin\omega.$$

Mais, en représentant par p_1 la distance de l'origine au sommet M de l'angle α et par θ l'angle de OM et de l'axe des abscisses, nous avons

$$p_1 = \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{f(\omega)}{\sin\alpha}, \qquad \theta = \omega + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Donc la courbe (C) peut être représentée par l'équation polaire

$$\rho = p_1 = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right)}{\sin\alpha}.$$

Si $\rho = F(\theta)$ est l'équation donnée de la courbe C, on a

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right)}{\sin\alpha} = F(\theta)$$

et, par suite,

$$f(\omega) = \sin\alpha\, F\left(\omega + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = F(\theta)\sin\alpha.$$

Donc la courbe (C_1) peut être représentée par les équations paramétriques

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \sin\alpha\,[F(\theta)\sin(\alpha-\theta) - F'(\theta)\cos(\alpha-\theta)], \\ y = \sin\alpha\,[F(\theta)\cos(\alpha-\theta) + F'(\theta)\sin(\alpha-\theta)], \end{cases}$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} [F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta]\sin\alpha \\ \quad - [F(\theta)\sin\theta + F'(\theta)\cos\theta]\cos\alpha \end{array} \right\}, \\ y = \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} [F'(\theta)\cos\theta + F(\theta)\sin\theta]\sin\alpha \\ \quad + [F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta]\cos\alpha \end{array} \right\}. \end{cases}$$

En désignant maintenant par X et Y les coordonnées de la podaire négative de (C) par rapport à O, nous avons, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$(6)\qquad \begin{cases} X = F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta, \\ Y = F'(\theta)\cos\theta + F(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

Donc,

$$x = \sin\alpha\,[X\sin\alpha - Y\cos\alpha],$$
$$y = \sin\alpha\,[Y\sin\alpha + X\cos\alpha],$$

ou

$$(7)\qquad \begin{cases} x = X_1\sin\alpha - Y_1\cos\alpha, \\ y = Y_1\sin\alpha + X_1\cos\alpha, \end{cases}$$

où

$$(8)\qquad X_1 = X\sin\alpha, \qquad Y_1 = Y\sin\alpha.$$

Quand le point (X, Y) décrit la podaire négative de (C), le point (X_1, Y_1), déterminé par les équations (8), décrit une courbe semblable, et le point (x, y), déterminé par les équations (7), décrit la ligne dont (C) est la courbe isoptique.

Ces équations donnent, comme dans la question précédente, le théorème suivant :

Si (C) *est la podaire de* (C_1) *par rapport à* O *et* (C_2) *est une courbe isoptique de* (C) *et* O, *les courbes* (C_1) *et* (C_2) *sont semblables. Si l'on connaît* (C_1), *on détermine la nature de* (C_2) *au moyen des formules* (8) *et l'on en obtient la position dans le plan de* (C) *en faisant tourner le lieu de* (X_1, Y_1) *autour du point* O *d'un angle égal à* $\alpha - \frac{\pi}{2}$ *dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.*

Appliquons cette doctrine au cas où la ligne (C) est une droite.

Nous pouvons prendre pour axe des abscisses la parallèle à la droite donnée passant par O, et alors l'équation de cette droite est

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Les équations de sa podaire négative sont

$$x = a\frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}, \qquad y = a\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Il en résulte, en faisant

$$x = \rho_1 \cos\theta_1, \qquad y = \rho_1 \sin\theta_1,$$

l'équation polaire de la même courbe

$$\rho_1 = \frac{2a}{\cos\theta_1 + 1}$$

et ensuite son équation cartésienne

$$y^2 = 4a(a - x).$$

La podaire négative de la droite donnée est donc une parabole à laquelle cette droite est tangente au sommet, et le point O coïncide avec le foyer de cette parabole. Ce théorème est bien connu.

Il résulte maintenant, du théorème général énoncé ci-dessus, que l'équation de la courbe qui satisfait à la condition d'avoir pour ligne isoptique d'elle-même et du point O la droite donnée est

$$\rho_1 \sin\alpha = \frac{2a}{\sin(\alpha - \theta_1) + 1}.$$

Cette courbe est encore une parabole dont le foyer coïncide avec le point O.

[$O^1 2q$]

SUR LES GLISSETTES;

Par M. L. BRAUDE,
à Bierstadt-Wiesbaden.

---

1. Dans une lettre adressée à M. Haton de la Goupillière et publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1913, p. 165-170, M. F.-G.

Teixeira a traité un exemple concernant les *glissettes d'une courbe par rapport à une droite fixe*. On aura cette courbe associée en faisant glisser une courbe sur une droite, de sorte qu'elle soit toujours tangente au même point.

Ces courbes ont été mentionnées et illustrées de quelques exemples par W.-H. Besant (*Notes on Roulettes and Glissettes*, Cambridge, 1890).

En rapportant la courbe glissante (C) à un système rectangulaire ayant pour axe des x la tangente fixe, et pour axe des y la normale de (C) dans le point de contact, les coordonnées du point $P(x, y)$ de la glissette sont

$$(1) \qquad x = \rho \cos v, \qquad y = \rho \sin v,$$

v désignant l'angle entre la tangente de (C) et le rayon vecteur de P. On a donc

$$\operatorname{tang} v = \frac{d\rho}{\rho\, d\theta} = \frac{\rho'}{\rho},$$

et les coordonnées cartésiennes sont

$$(2) \qquad x = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$

Les coordonnées polaires de (C) sont donc

$$(3) \qquad r = \rho, \qquad v = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho'}{\rho}.$$

M. F.-G. Teixeira a traité la glissette d'une *épi- ou hypocycloïde*. En la représentant par

$$(4) \qquad \begin{cases} x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\dfrac{R + r}{r}\varphi, \\ y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{R + r}{r}\varphi, \end{cases}$$

R et r désignant les rayons des cercles mobile et fixe, la glissette du centre du cercle fixe est, suivant le calcul de M. Teixeira, une ellipse représentée par l'équation

$$(5)\qquad x^2 + \left(\frac{R}{R+2r}\right)^2 y^2 = R^2.$$

Du reste, l'équation polaire différentielle

$$(6)\qquad d\theta = \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{R^2-\rho^2}{m^2\rho^2-R^2}},$$

se trouve dans l'œuvre de M. G. Loria (*Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 102, Leipzig, 1911); d'après les équations (2) elle suffit pour représenter les coordonnées de la glissette en fonctions de ρ.

2. De ce théorème on en déduit sans aucun calcul encore un autre, donné par M. Teixeira dans la *Revista da Universidade de Coimbra*, t. XI, 1913. En faisant $\frac{R}{R+2r}$ imaginaire, on aura comme cycloïdale une *para- ou une hypercycloïde;* l'ellipse est remplacée par une hyperbole.

Donc, en faisant glisser une para- ou une hypercycloïde sur une droite, la glissette du centre du cercle fixe est une hyperbole dont les sommets réels se trouvent sur l'axe des y ou sur celui des x.

Pour la *développante du cercle de rayon a*, représentée par

$$(7)\qquad x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),\qquad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

ou par l'équation différentielle polaire

$$(8)\qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a\rho}{\sqrt{\rho^2-a^2}},$$

on aura comme glissette du centre de la développée la droite $x = a$.

3. Pour les *spirales sinusoïdes*

$$(9)\qquad \rho^n = a^n \sin n\varphi,$$

la glissette est la *multiplicatrice de Clairaut*

$$(10) \qquad r^n = a^n \sin\varphi,$$

suivant la propriété caractéristique des *spirales sinusoïdes, représentée par l'équation* $\operatorname{arc\,tang} \frac{\rho'}{\rho} = n\varphi$.

La glissette de la *cardioïde* $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ est un *biovale* (*Doppeleilinie*), celle de la *cayley-sextic* $\left(n = \frac{1}{3}\right)$ est un *folium* simple (*Einblatt*), etc. Nous avons publié cette génération dans l'œuvre de M. C. de Jans (*Les courbes multiplicatrices de Clairaut*, Gand, 1912, p. 12).

Du reste, nous avions engendré les courbes (10) *comme roulettes à base rectiligne de la développée d'une spirale sinusoïde* [*Ueber Roll- und Fusspunktkurven* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, 34, 1912)].

4. Cette double génération des courbes multiplicatrices nous a fait reconnaître le théorème général :

La glissette d'une courbe (C) *par rapport à l'axe des x d'un système rectangulaire est identique à la roulette de la développée de* (C) *par rapport à l'axe des y.*

Soit (C) le profil générateur qu'on fait rouler sur l'axe des x, alors les coordonnées rectangulaires de la roulette d'un point fixe P sont

$$(11) \qquad \xi = s - \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \qquad \eta = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

s désignant l'arc de (C) mesuré du point initial P_0 correspondant à l'origine du système. L'angle entre l'axe des x et le rayon vecteur AP est $\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho}{\rho'}$.

Pour avoir la roulette de la développée de (C), il faut regarder (11) comme courbe de Mannheim d'une certaine courbe (Γ), alors la roulette de la développée de (C_1) est la courbe de Mannheim de la développée de (Γ). Si l'équation intrinsèque de (Γ) est

$$(12) \qquad f(s, R) = 0,$$

s désignant l'arc, R le rayon de courbure, les coordonnées intrinsèques de la développée sont

$$(13) \qquad s_1 = R, \qquad R_1 = R\frac{dR}{ds}.$$

L'équation cartésienne de la courbe de Mannheim de Γ est

$$(14) \qquad f(x, y) = 0,$$

on aura donc l'équation de la courbe de Mannheim de la développée par la représentation paramétrique

$$(15) \qquad x_1 = y, \qquad y_1 = \frac{y\,dy}{dx}.$$

En outre, cette courbe est le lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux normales de (14) par rapport à l'axe des x.

5. Nous allons donc appliquer la transformation (15) sur la courbe (11). On aura

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= y = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}, \\ y_1 &= \frac{y\,dy}{dx} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} \; \frac{2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\rho\rho' - \rho^2\dfrac{\rho'(\rho+\rho'')}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}}{\rho^2+\rho'^2} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2} - \dfrac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}(\rho\rho''+\rho'^2) - \rho\rho'^2\dfrac{\rho+\rho''}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}}{\rho^2+\rho'^2}} \\ &= \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}. \end{aligned} \right.$$

En conséquence, la glissette de (C) *est identique à la roulette de la développée de* (C).

Pour les courbes de Ribaucour, le rayon de courbure est proportionnel à la normale; la radiale, lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux rayons de courbure, est une multiplicatrice de Clairaut semblable à la roulette de la développée de la spirale sinusoïde.

6. Il y a encore une autre déduction géométrique de notre théorème :

Quand on fait rouler la développée de (C) sur l'axe des y, de sorte que le point $s = 0$ corresponde à l'origine, la développante passe toujours par l'origine ayant pour tangente l'axe des x. *Donc le glissement de* (C) *est identique au roulement de la développée.*

7. *De même, nous faisons glisser la courbe* (C) *représentée par l'équation cartésienne* $y = f(x)$ *sur l'axe des* x, pour déterminer l'enveloppe de l'axe des x. En faisant $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi$, l'équation tangentielle de l'enveloppe E est

$$(17) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi - y = 0$$

ou

$$(18) \qquad E \equiv x \sin\varphi + y \cos\varphi - \int R \sin\varphi \, d\varphi = 0,$$

R désignant le rayon de courbure. La développée de E est représentée par

$$(19) \qquad E_1 \equiv x \cos\varphi - y \sin\varphi - R \sin\varphi = 0$$

ou

$$(19') \qquad E_1 \equiv x \cot\varphi - y - R = 0.$$

On aura donc cette développée E_1 en faisant, sur l'axe des y, $OA = R$ et en menant par le point A une parallèle à la tangente de (C).

Suivant la dénomination de M. E. Koestlin (*voir* la Thèse bien intéressante : *Ueber eine Deutung der Gleichung, die Zwischen dem Bogen und dem Neigungswinkel der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht*, Tubingue, 1907), la développée de l'enveloppe E est l'*arcuïde* de la développée de (C). En faisant glisser la courbe $y = f(x) + c$, on aura comme enveloppe une courbe parallèle à (C); mais par le glissement d'une *courbe parallèle*, la courbe E est déplacée le long de l'axe des y. Quand on cherche l'enveloppe d'une droite g_1 qui coupe l'axe des x au point P en formant l'angle α, l'enveloppe des droites g_1 est une *transformée générale de Koestlin*. On l'aura comme enveloppe des droites, menées par une intersection de g_1 et la glissette du point P, formant l'angle α avec g_1. [*Voir* notre article : *Sur quelques généralisations de la transformation de M. E. Koestlin* (*Annales de l'Académie de Porto*, t. IX, 1914, p. 21).]

8. *Exemples*. — *a*. Quand on fait glisser la développante du cercle sur l'axe des x (*voir* n° 2) l'enveloppe d'une droite quelconque menée par le centre du cercle fixe est une cycloïde. Toutes ces cycloïdes ont comme tangentes aux sommets la glissette du centre, c'est-à-dire la parallèle à l'axe des y; enfin, comme la développante du cercle est transformée dans une courbe parallèle par une rotation autour du centre du cercle, *les transformées koestliniennes d'une cycloïde par rapport à la tangente aux sommets sont congruentes entre elles*. {*Voir* E. Koestlin, *Ueber*

eine Transformation ebener Kurven [*Mitt. Math. Nat. Verein Württenberg*, (2), 8, 1906, p. 71]; H. Wieleitner, *Spez. eb. Kurven*, Leipzig, 1908, p. 387.}

b. L'arcuïde d'une cycloïde étant une astroïde, il résulte que :

Quand on fait glisser une cycloïde sur une droite ($y = 0$), *l'enveloppe de la base rectiligne est une astroïde droite dont les rebroussements se trouvent sur les droites* $y \pm x = 0$; *l'enveloppe d'une tangente aux sommets est une astroïde à un point autotangentiel nommée* « *croix de Malte* ».

c. L'arcuïde d'une astroïde oblique est une hypocycloïde tricuspidale; de là on déduit :

Quand on fait glisser une astroïde oblique ou droite sur une droite, l'enveloppe d'une droite parallèle à une tangente double de la glissante est une hypocycloïde de Steiner.

d. La spirale logarithmique est congruente à la développée, d'où il résulte que :

Quand on fait glisser une spirale logarithmique ou une développante de la spirale sur l'axe des x, l'enveloppe d'une droite menée par le pôle (ou par le centre du cercle asymptotique) est une logarithmoïde, représentée par l'équation intrinsèque

$$\mathrm{R} = ae^{m\varphi} \cos\varphi.$$

La glissette du pôle est la droite sur laquelle il faudrait faire *rouler* la spirale, pour avoir la logarithmoïde comme enveloppe de la droite menée par le pôle. Quant à la logarithmoïde, *voir* H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 386; E. Koestlin, *Ueber eine transzendente*

Kurve, von der die Zykloide ein Grenzfall ist [*Mitt. Math. Nat. Verein Württenberg*, (2), 9, 1907, p. 21] ou enfin notre article mentionné à la fin du n° 7.

[D6cδ]

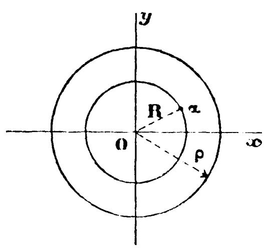
SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION POUR LES NOMBRES DE BERNOULLI, TRÈS GRANDS;

PAR M. J. MALAISE.

Soit

$$f(z) = \frac{A_0(h-1)!}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1(h-2)!}{(\alpha - z)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z) \quad (^1),$$

où $\varphi(z)$ demeure finie pour $z = \alpha$ et est développable dans un cercle de rayon $\rho > R$, en appelant R le rayon



du cercle de convergence de $f(z)$ (*voir* la figure). Soit

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots.$$

Posons

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n.$$

Remarquons que dans $\frac{A_i}{(\alpha - z)^{h-i}}$ qui se développe

---

(1) *Voir* M. G. Darboux, *Journal de Liouville*, 1878.

comme suit :

$$A_i \left[\alpha^{i-h} - \frac{i-h}{1} \alpha^{i-h-1} z + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{(i-h)(i-h-1)\ldots(i-h-n+1)}{n!} \alpha^{i-h-n} z^n + \ldots \right]$$

on a, pour coefficient de z^n, ceci :

$$\frac{A_i}{\alpha^{h+n-i}} \frac{(h-i)(h+1-i)\ldots(h+n-1-i)}{n!}.$$

Donc, en identifiant les expressions $f(z)$, on a

$$a_n \alpha^n = \sum_{i=0}^{i=h-1} (h-1)! \frac{A_i}{\alpha^{h-i}}$$
$$\times \frac{(h-i)(h-i+1)\ldots(h-i+n-1)}{n!} + b_n \alpha^n,$$

ou, si l'on veut,

$$(1) \quad a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)$$
$$+ \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n.$$

La série $\varphi(z)$ est convergente dans un cercle de rayon $\rho > R$, donc dans la couronne circulaire. Prenons K, tel que : $0 < K < \rho - R$. Alors, à cause du théorème de Cauchy-Hadamard [1], on a

$$\lim(\rho - K)^n b_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - K)^n}$$

$\left(\varepsilon_n \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n}\right)$.

---

(1) Ce théorème dit que, pour $\Sigma a_n z^n$, le rayon du cercle de convergence R est donné par R = la plus grande limite de $\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

On a donc

$$(2)\qquad a_n\alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)\dots(n+h-1) + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\dots(n+h-2) + \dots\dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + \varepsilon_n\left(\frac{\alpha}{\rho - K}\right)^n.$$

On en déduit la partie principale

$$(3)\qquad a_n = \frac{A_0 n^{h+1}}{\alpha^{n+h}}(1+\varepsilon)$$

(ε tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$).

Soit la fonction

$$\text{tang}(x+t) = f(t).$$

Nous supposerons d'abord x *réel* et *positif*. Cette fonction admet le pôle $t = \frac{\pi}{2} - x$ sur son cercle de convergence. Comme c'est un pôle du premier ordre, on trouve le résidu de la fonction en cherchant $\lim\limits_{h=0} h \,\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$, ce qui donne 1; et alors

$$f(t) = \frac{1}{t - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant développable en série de puissances entières de t' :

$$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n + \dots,$$

convergente dans un cercle de rayon plus grand que le cercle de convergence de $f(t)$.

La $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\operatorname{tang} x$ vaut le coefficient de t^n, multiplié par $n!$

Cherchons le coefficient a_n de t^n dans le développement

$$f(t) = \sum_0^n a_n t^n.$$

La formule (3) donne

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = \frac{n!}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n+1}}(1+\varepsilon),$$

où x est réel et positif.

Cette formule est valable, en général, si

$$\left|\frac{\pi}{2} - x\right| < \left|\frac{\pi}{2} - x\right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est imaginaire à partie réelle positive.

Lorsque x est imaginaire à partie réelle négative, ou en particulier lorsque x est réel et négatif, on a

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^{n+1}}(1+\varepsilon),$$

car, dans ce cas, le cercle de convergence passe par le pôle $\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Enfin, si

$$\left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \left|\frac{\pi}{2} + x\right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est une imaginaire pure, ou lorsque $x = 0$, on a deux pôles sur le cercle de convergence. Alors :

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = n! \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^{n+1}} \right] (1+\varepsilon) \quad (^1).$$

On sait que

$$\operatorname{tang} x = 2^2(2^2-1)\frac{B_2}{2!}x - 2^4(2^4-1)\frac{B_4}{4!}x^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots,$$

où B_2, B_4, ..., B_{2n}, ... représentent les nombres de Bernoulli.

En comparant notre formule avec ce résultat, nous trouvons

$$B_{2n} = 2\frac{(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}(1+\varepsilon).$$

Mais on a, d'après la formule de Stirling,

$$(2n)! = (2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n} \qquad \text{(approximativement)}.$$

---

(1) On sait que

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2p-1)^2}\right)x^2$$
$$+ \frac{2^5}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{(2p-1)^4}\right)x^3 + \ldots.$$

Les coefficients de ce développement *ne sont pas* égaux à

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n}\right)_0,$$

mais il est curieux qu'ils tendent à le devenir quand n grandit, car, pour n impair très grand

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{dn \operatorname{tang} x}{dx^n}\right)_0 = \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}(1+\varepsilon)$$

Il vient

$$B_{2n} = \frac{4(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{n}}{(2^{2n}-1)\pi^{2n-\frac{1}{2}}}(1+\varepsilon),$$

où ε tend vers zéro, avec $\frac{1}{n}$.

Telle est la formule d'approximation que nous voulions établir pour les grands nombres de Bernoulli.

[C2h]

QUELQUES FORMES SPÉCIALES DU THÉORÈME DE LA MOYENNE;

Par M. Michel PETROVITCH.

---

1. Les valeurs de la fonction

$$\frac{(1+t^m)^p}{1+t^{mp}}, \tag{1}$$

où m et p sont deux nombres réels quelconques, ne sortent jamais en dehors de l'intervalle Δ compris entre 1 et 2^{p-1}, quelle que soit la valeur réelle positive ou nulle de t. On le voit soit directement sur l'expression (1), soit en posant

$$t^m = \operatorname{tang}^2 z, \tag{2}$$

ce qui transforme cette expression en

$$\frac{1}{\sin^{2p} z + \cos^{2p} z}. \tag{3}$$

Il s'ensuit que, u et v étant deux quantités réelles positives quelconques, la valeur de l'expression

$$\frac{(u^m+v^m)^p}{u^{mp}+v^{mp}} \tag{4}$$

est toujours comprise dans l'intervalle Δ. Les limites 1 et 2^{p-1} de cet intervalle seront atteintes lorsque l'une des quantités u et v est nulle, ou lorsque $u = v$.

Il s'ensuit de même que, u et v étant positifs, on a toujours

$$(5)\quad \log(u^m + v^m) = \frac{1}{p}\log(u^{mp} + v^{mp}) + \frac{p-1}{p}\theta\log 2,$$

$$(6)\quad \log(u^{mp} + v^{mp}) = p\log(u^m + v^m) - (p-1)\theta\log 2,$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

2. Soient u, v, w trois fonctions d'une variable x, réelles et positives dans un intervalle considéré de $x = a$ à $x = b$. D'après ce qui précède on aura

$$(7)\qquad (u^m + v^m)^p = (u^{mp} + v^{mp})\varpi,$$

ϖ étant une fonction de x, dont les valeurs, quel que soit x positif, sont comprises dans l'intervalle Δ. On en tire, par application du théorème de la moyenne commun, la proposition suivante :

Les trois fonctions u, v, w de la variable x étant réelles et positives dans l'intervalle (a, b), m et n étant deux constantes réelles quelconques, on a

$$(8)\qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^p dx = \lambda\left[\int_a^b w u^{mp}\,dx + \int_a^b w v^{mp}\,dx\right],$$

λ étant un coefficient compris entre 1 et 2^{p-1}.

Lorsque m est un entier pair, en désignant par $|a|$ la valeur absolue de la quantité réelle a, on aura, quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b),

$$(9)\qquad \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}} = \frac{\{|u|^m + |v|^m\}^p}{|u|^{mp} + |v|^{mp}} = \varpi$$

et l'égalité (8) devient

$$(10)\qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^p\,dx = \lambda\left[\int_a^b w\,|u|^{mp}\,dx + \int_a^b w\,|v|^{mp}\,dx\right];$$

elle est alors valable quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b).

En faisant $p = \frac{1}{m}$ l'égalité (8) devient

$$(11)\qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}}\,dx = \lambda\left[\int_a^b w\,u\,dx + \int_a^b w\,v\,dx\right]$$

où, dans le cas de $m =$ entier pair, il faut remplacer dans le second membre u et v par $|u|$ et $|v|$.

De même en faisant $p = -\frac{1}{m}$ on aura

$$(12)\qquad \int_a^b \frac{w\,dx}{(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}}} = \lambda\left[\int_a^b \frac{w\,dx}{u} + \int_a^b \frac{w\,dx}{v}\right]$$

avec la remarque précédente. Dans le cas particulier de $m = 2$ les égalités (11) et (12) deviennent

$$(13)\qquad \int_a^b w\sqrt{u^2 + v^2}\,dx = \lambda_1\left[\int_a^b w\,u\,dx + \int_a^b w\,v\,dx\right],$$

$$(14)\qquad \int_a^b \frac{w\,dx}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lambda_2\left[\int_a^b \frac{w}{u}\,dx + \int_a^b \frac{w}{v}\,dx\right],$$

où λ_1 est un coefficient compris entre

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots \quad \text{et} \quad 1.$$

et λ_2 un coefficient compris entre

$$(16)\qquad \frac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}3535\ldots \quad \text{et} \quad 1.$$

3. Ces formules permettent, par exemple, de comparer les intégrales du genre elliptique, hyperelliptiques, etc. à des intégrales de fonctions rationnelles.

Pour

$$w = 1, \qquad u = 1, \qquad v = y',$$

y étant une fonction de x croissante dans l'intervalle (a, b), la formule (13) fournit

$$(17) \qquad \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx = \lambda_1[(b-a)+y(b)-y(a)],$$

et pour les fonctions y décroissantes

$$(18) \qquad \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx = \lambda_1[(b-a)+y(a)-y(b)]$$

exprimant alors un théorème de la moyenne rattaché aux intégrales des arcs de courbes planes dont je m'occuperai ailleurs.

4. Les trois fonctions u, v, w étant réelles et positives dans l'intervalle (a, b), m et p étant des constantes réelles quelconques, l'égalité (5) conduit à

$$(19) \qquad \int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx = \frac{1}{p}\int_a^b w \log(u^{mp} + v^{mp})\, dx + \theta \frac{p-1}{p} \log 2 \int_a^b w\, dx$$

ou bien à

$$(20) \qquad \int_a^b w \log(u^{mp} + v^{mp})\, dx = p\int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx - \theta(p-1) \log 2 \int_a^b w\, dx,$$

θ étant une valeur comprise entre 0 et 1. Pour $m =$ entier pair ces formules sont valables quel que soit le signe de u et de v dans l'intervalle (a, b) pourvu qu'on remplace dans les intégrales u et v par $|u|$ et $|v|$. *Ces formules expriment un théorème de la moyenne rattaché aux intégrales de la forme*

$$\int_a^b w \log(u^k + v^k)\, dx. \tag{21}$$

En prenant $p = \frac{1}{m}$ la formule (19) donne pour m réel quelconque

$$\int_a^b w \log(u^m + v^m)\, dx$$
$$= m \int_a^b w \log(u + v)\, dx + \theta (1 - m) \log 2 \int_a^b w\, dx,$$

où pour $m =$ entier pair on remplacera dans l'intégrale du second membre u et v par $|u|$ et $|v|$.

On en conclut, par exemple, que la différence entre l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)|\, d\theta$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log (P + Q)\, d\theta,$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de la partie réelle et du coefficient de i dans $f(\rho e^{\theta i})$, *est comprise entre* $-\frac{1}{2}\log 2$ *et* o *quelle que soit la fonction analytique* $f(z)$ *considérée* [1]. Je remarquerai en terminant que ce qui précède n'est qu'un cas particulier du

[1] *Voir* une autre forme du théorème de la moyenne dans ma Note *Théorème de la moyenne sans restriction* (*Nouvelles Annales*, 4^e série, t. XIII, septembre 1913).

fait plus général suivant, dont je développerai ailleurs les conséquences :

Les quantités x_i étant toutes réelles et positives et p étant une valeur réelle quelconque, on a

$$(x_1 + \ldots + x_n)^p = \theta(x_1^p + \ldots + x_n^p)$$

où θ est une quantité dont la valeur ne sort jamais en dehors des limites 1 et n^{p-1}.

[D1]

NOTE SUR LA FONCTION $\sin[(n+1)\arc\cos x]$;

PAR M. J. F. RITT.

En cherchant une valeur approchée du terme $n^{\text{ième}}$ du développement, suivant les puissances de t, de la fonction

$$[1-(x+t)^2]^{n+\frac{1}{2}} = (1-x-t)^{n+\frac{1}{2}}(1+x+t)^{n+\frac{1}{2}}$$

(*Nouvelles Annales*, novembre 1913), M. J. Malaise s'est servi d'un théorème de M. Darboux qui n'est point applicable à cette fonction.

Ayant fait la substitution

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-\alpha)^k \Phi(z) + \psi(z) \\ &= \left[\Phi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\Phi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!}\Phi^p(\alpha)\right](z-\alpha)^k, \end{aligned}$$

où l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$, M. Malaise donne, pour la valeur a'_n, approchée du coefficient de z^n

de $f(z)$,

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
\alpha^{k-n} a'_n = {} & \Phi(\alpha)(-1)^n \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} \\
& + \alpha\,\Phi'(\alpha)(-1)^{n+1}\frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{n!} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha^{p-1}(-1)^{n+p-1} \\
& \quad \times \frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{n!}\,\frac{\Phi^{p-1}(\alpha)}{(p-1)!},
\end{aligned}
\right.
$$

formule différente de celle de M. Darboux, mais encore incorrecte. Cependant, elle nous donnera la valeur de $\alpha^{n-k} a'_n$, a'_n étant le coefficient de z^n de

$$\left[\Phi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\Phi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!}\Phi^p(\alpha)\right](\alpha - z)^k.$$

Ainsi en développant la fonction $\left[1-(x+t)^2\right]^{n+\frac{1}{2}}$, on trouve, avec M. Malaise,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \Big[& 2^{\frac{1}{2}}(2n+1)\ldots 3(1-x)^{\frac{1}{2}} \\
& - 2^{-\frac{1}{2}}(2n+3)(2n+1)\ldots 5\,\frac{2n+1}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \ldots \Big].
\end{aligned}
$$

Le rapport d'un terme quelconque de (1) au précédent est de la forme

$$-\frac{\Phi^p(\alpha)}{p\,\Phi^{p-1}(\alpha)}\,\frac{k+p}{k+p-n}.$$

Si $\Phi^{p-1}(\alpha)$ et $\Phi^p(\alpha)$ sont du même ordre, et si k est fini, ce rapport sera de l'ordre de $\frac{1}{n}$ pour n très grand, et la partie principale de a'_n proviendra du premier terme de (1). Mais ici nous avons affaire à un cas fort différent. Ce qu'il ne faut pas oublier, c'est d'abord que k devient infini avec n, tandis que $k-n$ demeure fini, et de plus que, pour les valeurs finies de p, l'on introduit continuellement des facteurs de l'ordre de n dans les dérivées successives de $(1 + x + t)^{n+\frac{1}{2}}$, de sorte que le rapport d'un terme au précédent sera de l'ordre de n^2. Il est donc évident qu'on ne peut pas poser

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n 2^{\frac{1}{2}}(2n+1)(2n-1)\ldots 3\,(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

En effet, en comparant directement cette dernière équation avec celle d'Olinde Rodrigues,

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}\sin[(n+1)\arccos x],$$

on trouve, pour n très grand,

$$\sin[(n+1)\arccos x] = 2^{\frac{1}{2}}(n+2)(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

résultat auquel doit équivaloir l'expression compliquée de M. Malaise, et dont l'impossibilité est manifeste.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Grenoble.

Épreuve pratique. — *Une plaque rectangulaire homogène, pesante, infiniment mince, a pour masse* M, *les longueurs de ses côtés sont* $2a$ *et* $4a$.

1° *Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie, relatif au centre* O *de la plaque, rapportée à des axes rectangulaires* $Oxyz$, Ox *étant parallèle aux plus grands côtés et* Oy *aux plus petits.*

2° *A un instant où la plaque est immobile et horizontale,* *on lui applique, au sommet de coordonnées* $x = 2a$, $y = a$, *une percussion verticale, dirigée vers le haut, d'intensité* MV. *Trouver la distribution des vitesses immédiatement après la percussion. On prendra pour inconnues les projections (sur* Ox, Oy, Oz) ξ_1, η_1, ζ_1 *de la vitesse de* O *et celles* p_1, q_1, r_1 *de la vitesse de rotation de la plaque.*

3° *Après la percussion, la plaque se meut comme un solide pesant libre; son mouvement par rapport à des axes* $Ox_1y_1z_1$ *de directions fixes menés par* O *est donc un mouvement à la Poinsot. Déterminer les éléments suivants de ce dernier mouvement :*

Force vive.

Grandeur du moment résultant des quantités de mouvement (moment par rapport à O).

Équation du cône roulette mobile (rapportée à $Oxyz$).

Expression (sous forme d'intégrale définie) de la période du mouvement. Vérifier que cette période est inversement proportionnelle à $\frac{V}{a}$.

(Juillet 1912.)

Clermont.

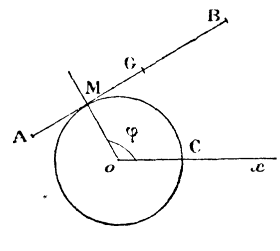
ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une tige* AOA', *de masse négligeable et de longueur* $2a$ *peut pivoter autour de son milieu* O. *Deux disques circulaires identiques, d'épaisseur négligeable, de rayon* $\frac{a}{2}$ *et de masse commune* M, *admettent cette tige pour axe. Le centre* C *de l'un d'eux est au milieu de* OA. *Le centre* C' *de l'autre est à la distance* x *de* O *entre* O *et* A'. *Un point* B *situé sur la verticale du point* O, *à une distance* a *au-dessus de celui-ci, attire* A *suivant une force égale à* k.AB, k *désignant un coefficient donné. Le point* B' *symétrique de* B *par rapport à* O *attire* A' *suivant la même force. Le corps solide formé par les disques et la tige est lancé, à partir d'une position quelconque, avec une vitesse angulaire* ω *autour de* AA'. *Étudier le mouvement ultérieur. Discuter suivant la valeur de* x.

On montrera en particulier qu'en aucun cas le mouvement de précession et le mouvement de rotation propre ne *changent de sens dans la durée du mouvement. On étudiera les variations de vitesses angulaires de ces deux mouvements. Enfin, on prouvera que, pour une certaine valeur de x, le système est en équilibre indifférent.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène, d'épaisseur négligeable, de dimensions a et $2a$, de masse m, peut tourner autour d'un axe vertical suivant le petit côté AB. Le frottement développe un couple résistant égal à $f\omega$, en appelant ω la vitesse angulaire et f un coefficient numérique. En outre, l'air, supposé au repos, oppose à chaque élément d'aire dS de la plaque une résistance normale égale à $k.d\text{S}.v^2$, en appelant v la vitesse de cet élément.*

La plaque étant supposée lancée avec une vitesse angulaire initiale ω_0, déterminer son mouvement ultérieur. Calculer en particulier l'angle total θ dont tourne la plaque. Étudier les variations de θ en fonction de ω_0. Montrer comment on pourrait déduire le coefficient f de la courbe représentative de ces variations et comment on pourrait ensuite calculer k en se bornant à considérer des petites valeurs de ω_0. (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne un cercle* C, *de centre* O *et de rayon* R, *et une barre homogène* AB, *de longueur* $2l$,



assujettie à rester tangente au cercle, sur lequel elle peut glisser sans frottement.

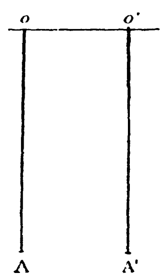
Chaque élément de la barre est attiré par le point O *proportionnellement à sa masse et à sa distance à ce point.*

1° *Les conditions initiales étant quelconques, calculer,*

à des quadratures près, la position de la barre à l'époque t.
$\Big[$*On prendra comme paramètre l'angle polaire* φ *du point* M *et la mesure algébrique* λ *du vecteur* MG (G *étant le milieu de* AB) *sur la demi-droite d'angle polaire* $\varphi + \frac{\pi}{2}\Big]$.

2° *Étudier le mouvement dans le cas particulier où la barre est primitivement au repos. Trouver dans ce cas la relation entre* λ *et* φ. *Calculer la position du centre instantané de rotation de la barre, en fonction de* λ *ou de* φ. *Construire la courbe roulette et la courbe base. Calculer l'aire balayée par le rayon vecteur* OG *en fonction de l'aire balayée par* OM. *Quelle est la valeur de cette aire pour une oscillation simple de la barre, en supposant* $l = 3R$ *et* $\lambda_0 = 2R$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux tiges homogènes identiques* oA, $o'A'$, *de longueur* l, *peuvent osciller librement (et sans frottement) dans le même plan vertical* V, *autour de*



leurs extrémités respectives o *et* o', *situées sur une même horizontale, à la distance* $a < l$. *On écarte* $o'A'$ *vers la droite d'un angle* θ *et on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur. Si l'angle* θ *a été choisi assez grand,* $o'A'$ *vient choquer* oA. *Immédiatement après le choc, on amène le centre d'oscillation* o' *un peu en avant du plan* V, *afin que les deux tiges ne puissent plus se rencontrer.*

Cela posé, on suppose les deux tiges parfaitement polies et parfaitement élastiques et l'on demande de calculer les *amplitudes des oscillations que prennent les deux tiges. Peut-on toujours choisir* θ *de manière que ces amplitudes soient égales? Calculer une telle valeur de* θ *dans l'hypothèse suivante :*

$$l = 1^{m}, \qquad a = 0^{m},45;$$

ainsi que la valeur commune des amplitudes.

(Juin 1913.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Choc des solides. On étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Paramètre de percussion d'une droite;*

2° *Variation de la force vive totale d'un solide libre sous l'action d'une percussion;*

3° *Perte de force vive dans le choc de deux solides libres.*

II. Problème. — *Appliquer la méthode de Jacobi à l'étude du mouvement d'un point matériel rapporté à des coordonnées polaires de l'espace* (ρ, θ, φ) *et soumis à l'action d'une force dérivant de la fonction d'énergie potentielle*

$$U = A(\rho) + \frac{B(\theta)}{\rho^2} + \frac{C(\varphi)}{\rho^2 \sin^2\theta},$$

A, B, C *étant chacune une fonction donnée de l'argument indiqué.*

Après avoir ramené le problème à des quadratures, on précisera la nature de ces quadratures dans le cas particulier où l'on a

$$A(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad B(\theta) = \beta \cot^2\theta, \qquad C(\varphi) = \gamma \sin^2\varphi,$$

α, β, γ *étant des constantes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un cerf-volant est en équilibre sous l'action du vent, de son poids et de la tension de la ficelle de retenue. La ficelle débitée, du point d'attache à la main, est de* 200^{m}. *La tension à la main, estimée à* *l'aide d'un peson, est inclinée à* 30° *sur l'horizon et équivaut à un poids de* 50m *de ficelle. On néglige l'action du vent sur la ficelle. Calculer la hauteur du cerf-volant au-dessus de la main.*

II. *Détermination expérimentale du moment d'inertie* I *d'un solide* S *par rapport à une droite* Δ *et de la distance* a *du centre de gravité* G *de ce solide à cette même droite.*

1° *On mesure la durée* t *des petites oscillations du solide* S *autour de l'axe* Δ *placé horizontalement.*

2° *Après avoir invariablement fixé à* S *un deuxième solide* S', *de façon que le centre de gravité* G' *de ce dernier soit dans le plan* (Δ, G), *on mesure la durée* t' *des petites oscillations du système invariable* (S, S') *autour du même axe* Δ *placé encore horizontalement.*

Cela fait, on demande de calculer I *et* a, *connaissant, outre* t *et* t', *les poids* P *et* P' *de* S *et* S', *la distance* a' *de* G' *à* Δ *pendant la deuxième expérience et le moment d'inertie* I' *de* S' *par rapport à l'axe* Δ' *mené par* G' *parallèlement à* Δ.

Donnés numériques :

$$P = 20^{\text{kg}}, \qquad P' = 10^{\text{kg}}, \qquad a' = 1^{\text{m}},5, \qquad I' = 0,1,$$
$$t = 0^{\text{s}},9, \qquad t' = 1^{\text{s}},1.$$

(Juin 1912).

QUESTION.

2221. Démontrer les égalités :

$$1^\circ \quad 1 + C_n^1 \frac{1}{2n-1} + C_n^2 \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} + C_n^3 \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

et

$$2^\circ \quad \frac{1}{2n-1} + C_{n-1}^1 \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} + C_{n-1}^2 \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots = \frac{4.6.8\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n-1)};$$

$$3^\circ \quad \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} + C_{n-2}^1 \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + C_{n-2}^2 \frac{1.3.5.7}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)} + \ldots = \frac{6.8.10\ldots(2n)}{5.7.9\ldots(2n-1)};$$

$$4^\circ \quad \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + C_{n-3}^1 \frac{1.3.5.7}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)} + \ldots = \frac{8.10\ldots(2n)}{7.9\ldots(2n-1)};$$

. . . .

où $C_n^r = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$.

T. Ono.

ERRATA.

Page 78, ligne 19, *lire :* Le nombre de ces plans est

$$C_{16}^3 : 4 = \frac{16.15.14}{1.2.3.4} = 140.$$

Quatre de ces plans sont les plans des faces du tétraèdre conjugué commun aux quadriques qui passent par la biquadratique. (Léauté, *Nouvelles Annales*, 1901, p. 47; 1902, p. 75; 1904, p. 336). Restent des plans au nombre de 136 ou 17×8.

Page 96, Question 2218, 2e ligne, remplacer : *avec* RS, par : *avec la corde* R'S' *symétrique de* RS *par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

[L^2 11 a]

SUR LES AXES DE L'INDICATRICE ET LES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

Par M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

Notations. — On désigne par :

M un point d'une quadrique Σ;
μ le plan tangent en ce point;
n la normale, n_1 sa conjuguée;
t_1, t_2 les axes de l'indicatrice au point M;
C_1, C_2 les centres de courbure principaux relatifs aux sections principales nt_1, nt_2;
α, β, γ les plans de symétrie, σ le plan de l'infini;
(α), (β), (γ) les coniques focales, (σ) le cercle imaginaire à l'infini;
A, B, C, S, les traces de la normale sur les plans α, β, γ, σ;
a, b, c les perpendiculaires élevées aux points A, B, C, sur les plans α, β, γ;
d le diamètre passant par M;
m_1, m_2, m_3 les perpendiculaires abaissées de M sur les plans α, β, γ.

1. Soient Σ_1, Σ_2 les deux quadriques homofocales à la quadrique Σ et passant par le point M; leurs normales en ce point seront respectivement t_1, t_2. Les conjuguées de la normale n, relativement aux surfaces Σ, Σ_1, Σ_2, (α), (β), (σ) du système homofocal sont n_1, t_2, t_1, $(\mu\alpha)$, $(\mu\beta)$, $(\mu\sigma)$. Ces droites tangentes à une parabole (P) du plan μ forment un faisceau du second ordre, projectif à la ponctuelle des pôles M, C_1, C_2, A, B, S du plan μ relativement à ces surfaces. La para-

bole (P) est projetée d'un point quelconque O de la droite $\alpha\beta$, sur le plan σ suivant une conique dont on prend la polaire réciproque (P_1) relativement au cercle imaginaire à l'infini (σ). Les pôles M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i, S des plans On_1, Ot_2, Ot_1, $[O,(\mu\alpha)] \equiv \alpha$, $[O,(\mu\beta)] \equiv \beta$, $[O,(\mu\sigma)]$ relativement à ce cercle (σ) forment sur la courbe (P_1) une ponctuelle du second ordre projective au faisceau $[n_1, t_2, t_1, (\mu\alpha), (\mu\beta), (\mu\sigma)]$. Par suite

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \overline{\wedge} (M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i, S).$$

Cette projectivité montre que les droites MM_i, $C_1C'_1$, $C_2C'_2$, $AA_i \equiv a$, $BB_i \equiv b$ font partie d'un même système réglé (R). Le rayon MM''_i est perpendiculaire au plan On_1 : les rayons $C_1C'_1$, $C_2C'_2$ normaux respectivement aux plans Ot_2, Ot_1 sont les rayons du système réglé (R) perpendiculaires à la droite OM. Ces considérations établissent le théorème :

Si O *est un point arbitrairement choisi sur l'axe de symétrie* $\alpha\beta$ *de la quadrique* Σ, *m la perpendiculaire abaissée du point* M *sur le plan* On_1, *les rayons du système réglé* (a, b, m) *normaux à la droite* OM *rencontrent la normale n aux centres de courbure principaux de la quadrique au point* M. *Les plans menés par* O *normalement à ces deux rayons déterminent dans le plan tangent en* M *les axes de l'indicatrice.*

2. Si la quadrique Σ a un centre à distance finie, on peut choisir ce centre pour le point O et faire intervenir dans les raisonnements qui précèdent le troisième plan de symétrie γ au même titre que les plans α, β. On a alors la propriété :

Les rayons du système réglé (a, b, c), *normaux* *au diamètre passant par* M, *rencontrent la normale* n *aux centres de courbure principaux de la quadrique au point* M. *Les plans diamétraux perpendiculaires à ces rayons déterminent dans le plan tangent en* M *les axes de l'indicatrice* ([1]).

Corollaire. — Le rayon du système réglé (a, b, c) issu du point M est normal au plan diamétral conjugué de la normale n.

3. Si le point O(1) est à l'infini sur l'axe $\alpha\beta$, les traces des plans On_1, Ot_2, Ot_1, α, β sur le plan de l'infini, forment un faisceau projectif au faisceau du second ordre $[n_1, t_2, t_1, (\mu\alpha), (\mu\beta)]$ et projectif à la ponctuelle des pôles $(M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i)$ de ces plans relativement au cercle (σ); on a donc encore

$$(M_i, C'_1, C'_2, A_i, B_i) \overline{\wedge} (M, C_1, C_2, A, B),$$

et le théorème (1) est encore vrai si le point O est à l'infini. On peut remarquer que *dans le cas d'un paraboloïde, le rayon* m *est normal au plan diamétral conjugué de la normale* n, *si le point* O *est à l'infini sur* $\alpha\beta$.

Dans le cas d'une quadrique ayant un troisième plan de symétrie γ, *le rayon* m *est normal au plan polaire du point* $C \equiv n\gamma$, *si* O *est à l'infini sur* $\alpha\beta$.

4. Soient t, t' deux tangentes conjuguées quelconques au point M; une surface Σ' homofocale à Σ est tangente à la droite t, le point de contact est désigné par M'. La normale n' au point M' de Σ' est tangente à la parabole (P) (1); car cette courbe est aussi l'enveloppe des

([1]) Laguerre, *Œuvres*, t, II, p. 526; *Journal de Mathématiques pures et appliques*, 1878.

normales correspondant aux plans tangents menés de la droite n aux quadriques homofocales à Σ. Une seconde tangente à la parabole (P) passe par le point M′, c'est la conjuguée n'' de la droite n par rapport à la surface Σ'. Les rayons du système réglé (m, a, b) (1) ou (a, b, c) (2) normaux aux plans On', On'' sont perpendiculaires à la droite OM′. Le premier normal à la droite n' est nécessairement dans le plan nt; le second coupe la normale n au pôle Q du plan μ relativement à Σ' (1). Si l'on imagine une courbe (Δ) tracée sur la quadrique Σ et tangente au point M à la droite t', ce point Q est le point central de la génératrice n sur la normalie dont la courbe (Δ) est la directrice [1]. Par suite :

Soient t, t' deux tangentes conjuguées au point M *d'une quadrique Σ, (Δ) une courbe de Σ tangente en* M *à la droite t'; la droite t est tangente en un point* M′ *à une quadrique Σ' homofocale à Σ. Deux rayons du système réglé (m, a, b) (1) ou (a, b, c) (2) sont perpendiculaires à la droite* OM′; *l'un est situé dans le plan nt, l'autre coupe la normale n au point central de la génératrice n sur la normalie dont la courbe (Δ) est la directrice. Le plan mené par le point* O *perpendiculairement à ce second rayon détermine dans le plan tangent en* M *la conjuguée de la normale n, par rapport à la quadrique Σ'.*

Cette propriété généralise les précédentes.

Corollaire. — Une tangente t au point M de la quadrique Σ est tangente à une quadrique Σ' homofocale, au point M′. Tout plan normal au diamètre

[1] C. SERVAIS, *Mathesis*, 3e série, t. VII, p. 115.

passant par M' coupe le système réglé (a, b, c) suivant une hyperbole.

5. On peut substituer au point O, dans les raisonnements (1), la trace A de la normale n sur le plan de symétrie α; on obtient la propriété :

Par les centres de courbure C_1, C_2 *on mène des parallèles* c_1, c_2 *aux tangentes principales correspondantes* t_1, t_2; *par le point* B *passe un rayon* b' *du système réglé* (c_1, c_2, a). *Le plan tangent en* M, *le plan de symétrie* β *et le plan mené par* A *normalement au rayon* b' *font partie d'un même faisceau. Le plan mené par* A *perpendiculairement au rayon du système* (c_1, c_2, a), *issu de* M, *coupe le plan tangent* μ *suivant la conjuguée* n_1 *de la normale* n *relativement à la quadrique* Σ.

Si l'on adopte également dans les raisonnements du n° 4 la substitution de la trace A au point O, on voit que :

Deux rayons du système réglé (c_1, c_2, a) *sont perpendiculaires à la droite* AM'; *l'un est situé dans le plan* nt, *l'autre coupe la normale* n *au point central de la génératrice* n *sur la normalie dont la courbe* (Δ) *est la directrice. Le plan mené par le point* A *perpendiculaire à ce second rayon détermine, dans le plan tangent en* M, *la conjuguée de la normale* n *relativement à la quadrique* Σ'.

6. La figure réciproque de la parabole (P) relativement à la quadrique Σ est un cône de sommet M; il a pour génératrices les conjuguées des droites n_1, t_2, t_1, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\sigma$. Ces droites sont la normale n; les tangentes t_1, t_2; les perpendiculaires m_1, m_2 abaissées du

point M sur les plans de symétrie α, β; le diamètre d de la quadrique Σ issu du point M. On a

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, d) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, S),$$

ou en désignant par T_1, T_2, M_1, M_2, D les points à l'infini des droites t_1, t_2, m_1, m_2, d :

$$(S, T_1, T_2, M_1, M_2, D) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, S).$$

On considère l'involution déterminée par les deux couples de points MS, AB et l'on désigne par C''_1, C''_2 les homologues de C_1, C_2 dans cette involution. On a

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \barwedge (S, C''_1, C''_2, B, A, M),$$

par suite

$$(S, T_1, T_2, M_1, M_2, D) \barwedge (S, C''_1, C''_2, B, A, M).$$

Cette dernière projectivité établit que les rayons C''_1T_1, C''_2T_2, BM_1, AM_2, MD appartiennent à un même système réglé. Donc :

Si d est le diamètre de la quadrique Σ, issu du point M, *a_1, b_1 les perpendiculaires abaissées de* A *et de* B *respectivement sur les plans de symétrie β, α, le système réglé (a_1, b_1, d) a deux rayons parallèles aux tangentes principales t_1, t_2. Le rayon parallèle à t coupe la normale n en un point C''_1 tel que*

$$MC_1 . MC''_1 = MA . MB,$$

C_1 étant le centre de courbure principal correspondant à la tangente t_1.

7. Si la surface Σ a un troisième plan de symétrie γ, on désigne par C_k l'homologue de $C \equiv n\gamma$ dans l'involution (MS, AB), par M_3 le point à l'infini de la per-

pendiculaire m_3 abaissée de M sur le plan γ. Dans les diverses projectivités utilisées au n° 6, on a successivement les couples d'éléments homologues : m_3 et C, M_3 et C, C et C_k, M_3 et C_k; donc la droite $C_k M_3$ est un rayon du système réglé (a_1, b_1, d). Par suite :

Si la quadrique Σ *a un troisième plan de symétrie* γ, *le système réglé* (a_1, b_1, d) *a un rayon normal à ce plan : il coupe la normale n en un point* C_k *tel que*

$$MC.MC_k = MA.MB,$$

C *étant la trace de la normale n sur le plan* γ.

8. Les conjuguées n'_1, n''_1 des droites n', n'' (4) par rapport à la quadrique Σ sont des génératrices du cône (M) (6). Le plan nt tangent à la quadrique Σ' au point M' doit contenir les conjuguées de la droite n' relativement aux quadriques homofocales à Σ' et en particulier la droite n'_1. Les droites n'_1 et n''_1 sont dans le plan polaire du point M' par rapport à la quadrique Σ, ce plan passe par la droite t' conjuguée de t. Soient Q le conjugué du point Q (4) dans l'involution (MS, AB), N''_1 le point à l'infini de n''_1 ; dans les diverses projectivités utilisées au n° 6, on a successivement les couples d'éléments homologues n''_1 et Q; N''_1 et Q; Q et Q'; N''_1 et Q'; donc la droite $Q'N''_1$ est un rayon du système réglé (a_1, b_1, d). Par suite :

Soient t, t' deux tangentes conjuguées au point M *de la quadrique* Σ, *le plan nt coupe le cône* (M) *du complexe des droites normales à leurs conjuguées suivant les génératrices n et* n'_1. *Le plan* $n'_1 t'$ *rencontre le même cône suivant les génératrices* n'_1 *et* n''_1. *Il existe un rayon du système réglé* (a_1, b_1, d) *parallèle à la droite* n''_1; *il rencontre la normale n en* *un point* Q' *tel que*

$$MQ' . MQ = MA . MB,$$

Q *étant le point central de la génératrice* n *sur la normalie dont la directrice* (Δ) *est tangente à la droite* t' *au point* M.

9. On a (6)

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \overline{\wedge} (M, C_1, C_2, A, B, C, S);$$

par suite

$$n(t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \overline{\wedge} (C_1, C_2, A, B, C, S).$$

Le faisceau formé par les plans principaux nt_1, nt_2 *et les plans* nm_1, nm_2, nm_3, *projetant la normale* n *sur les plans de symétrie* α, β, γ, *est projectif à la ponctuelle formée par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *et les traces* A, B, C *de la normale* n *sur les plans* α, β, γ. *Dans cette projectivité le plan normal diamétral* nd *correspond au point à l'infini* S *de la ponctuelle* [1].

10. Soient A', B' les projections orthogonales des points A, B sur l'axe de symétrie $\alpha\beta$; X_1, X_2 les traces de cet axe sur les plans nt_1, nt_2; O le centre de la quadrique Σ. La section du faisceau

$$n(t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d),$$

par la droite $\alpha\beta$, est

$$(X_1, X_2, B', A', \infty, O).$$

Les plans normaux à l'axe $\alpha\beta$ menés par les points X_1,

---

[1] SERVAIS, *Sur les points focaux dans les surfaces du second degré* (*Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, t. II, 1907).

X_2, B', A', ∞, O de cette ponctuelle déterminent sur la normale les points Y_1, Y_2, B, A, S, C; on a donc

$$(Y_1, Y_2, B, A, S, C) \barwedge (C_1, C_2, A, B, C, S),$$

et les couples C_1Y_1, C_2Y_2, AB, CS sont conjugués dans une même involution :

Par les traces d'un axe de symétrie $\alpha\beta$ de la quadrique Σ, sur les plans des sections principales nt_1, nt_2 au point M *de cette surface, on mène des plans normaux à cet axe. La normale n au point* M *de Σ coupe ces deux plans aux points Y_1, Y_2 qui sont les conjugués respectifs des centres de courbure principaux C_1, C_2 au point* M *dans l'involution* (AB, CS).

11. Si la surface Σ est un paraboloïde, le diamètre d est parallèle à l'axe de symétrie $\alpha\beta$; on conclut de la projectivité

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, d) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, S),$$

que :

Dans le cas d'un paraboloïde Σ, les couples C_1Y_1, C_2Y_2, AB *sont conjugués dans une involution ayant un point double à l'infini.*

12. En utilisant successivement les axes de symétrie $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ dans les développements du n° 10, on trouve sur la normale n deux points Z_1, U_1, analogues à Y_1, et deux points Z_2, U_2, analogues à Y_2, et l'on a les trois involutions :

$$\begin{array}{llll} C_1Y_1, & C_2Y_2, & AB, & CS, \\ C_1Z_1, & C_2Z_2, & BC, & AS, \\ C_1U_1, & C_2U_2, & CA, & BS. \end{array}$$

On en conclut que les couples Z_1U_1, Z_2U_2 appartiennent à la première involution; les couples U_1Y_1,

U_2Y_2 à la seconde; les couples Y_1Z_1, Y_2Z_2 à la troisième. Donc :

La section principale nt_1, au point M *d'une quadrique* Σ, *coupe les axes de symétrie* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ *de cette surface en trois points, qui sont les projections orthogonales sur ces axes des points* Y_1, Z_1, U_1 *de la normale n au point* M. *La section principale nt_2 au même point donne les points analogues* Y_2, Z_2, U_2; *si* C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux de* Σ *au point* M, *on a les trois involutions :*

$$\begin{array}{cccccc} C_1Y_1, & C_2Y_2, & Z_1U_1, & Z_2U_2, & AB, & CS, \\ C_1Z_1, & C_2Z_2, & U_1Y_1, & U_2Y_2, & BC, & AS, \\ C_1U_1, & C_2U_2, & Y_1Z_1, & Y_2Z_2, & CA, & BS. \end{array}$$

S *est le point à l'infini de la normale n.*

13. On a

$$m_2(n, t_1, t_2, m_1, m_3, d) \,\bar{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, C, S).$$

On coupe le faisceau $m_2(n, t_1, t_2, m_1, m_3, d)$ par l'axe de symétrie $\alpha\beta$, on obtient la ponctuelle

$$(A', K_1, K_2, M'', \infty, O);$$

A' et M'' sont les projections orthogonales des points A et M sur l'axe $\alpha\beta$. La projectivité

$$(A', K_1, K_2, M'', \infty, O) \,\bar{\wedge}\, (M, C_1, C_2, A, C, S)$$

donne

$$OK_1.CC_1 = OK_2.CC_2 = OA'.CM = OM''.CA.$$

Les plans projetant orthogonalement les tangentes t_1, t_2 *au point* M *de la quadrique* Σ *sur le plan de symétrie* β *coupe l'axe* $\alpha\beta$ *aux points* K_1, K_2; *si* M'' *et* A' *sont les projections orthogonales sur* *l'axe* $\alpha\beta$, *des points* M *et* A, *on a*

$$OK_1 . CC_1 = OK_2 . CC_2 = OA' . CM = OM'' . CA,$$

C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux au point* M, O *le centre de* Σ.

14. Dans le cas d'un paraboloïde Σ les ponctuelles

$$(A', K_1, K_2, M''), \quad (M, C_1, C_2, A)$$

sont semblables et l'on a

$$MC_1 : MC_2 = A'K_1 : A'K_2.$$

Dans le cas d'un paraboloïde Σ *le rapport des rayons de courbure* MC_1, MC_2 *est égal au quotient* $A'K_1 : A'K_2$.

15. On a (1)

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S) \,\bar{\wedge}\, (n_1, t_2, t_1, \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma);$$

donc si l'on désigne par $(T''_2, T''_1, C'', B'', S'')$ la section par la droite $\mu\alpha$ du faisceau du second ordre $(t_2, t_1, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma)$, on a la projectivité

$$(C_1, C_2, B, C, S) \,\bar{\wedge}\, (T''_2, T''_1, C'', B'', S''),$$

d'où l'on déduit le système réglé

$$(C_1T''_2, C_2T''_1, BC'', B''C, SS'').$$

Le plan tangent au point M *d'une quadrique* Σ *coupe les axes de symétrie* $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ *aux points* C'', B''. *Le paraboloïde circonscrit au quadrilatère gauche* $BC''B''C$ *est tangent aux sections principales* nt_1, nt_2 *de* Σ, *aux centres de courbure principaux non correspondants* C_2, C_1.

16. On projette du centre O de la surface Σ la parabole $(n_1, t_2, t_1, \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma)$ et l'on prend, par rapport au cône asymptote de Σ, le cône polaire réciproque du cône obtenu par projection. Le cône polaire réciproqne a pour génératrices les parallèles p, t'_1, t'_2 menées par O aux droites n, t_1, t_2, les axes de symétrie $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ et le diamètre d. Par suite, on a

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S) \barwedge (p, t'_1, t'_2, \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta, d).$$

Le faisceau $\alpha\beta(p, t'_1, t'_2, \beta\gamma, \gamma\alpha, d)$ est coupé par la droite n suivant la ponctuelle (S, T'_1, T'_2, B, A, M) et l'on a

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \barwedge (S, T'_1, T'_2, B, A, M);$$

par suite, les couples MS, AB, $C_1T'_1$, $C_2T'_2$ sont conjugués dans une même involution.

Les plans menés par l'axe de symétrie $\alpha\beta$, parallèlement aux tangentes principales t_1, t_2 au point M *de la quadrique Σ coupent la normale en ce point, aux points* T'_1, T'_2. *Si* C_1, C_2 *sont les centres de courbure principaux au point* M *de Σ, les couples* $C_1T'_1$, $C_2T'_2$, AB *sont conjugués dans une involution ayant pour point central le point* M.

Remarque. — Les points T'_1, T'_2 sont identiques aux points C''_1, C''_2 rencontrés au n° 6. De là une détermination géométrique des points C''_1, C''_2.

17. Le cône $(p, t'_1, t'_2, \beta\gamma, \gamma\alpha, d)$ est coupé par le plan μ suivant l'hyperbole équilatère $(P, T_1, T_2, A'', B'', M)$ et l'on a

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \barwedge (P, T_1, T_2, A'', B'', M).$$

Mais (16)

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \barwedge (S, T'_1, T'_2, B, A, M);$$

par suite,

$$(P, T_1, T_2, A'', B'', M) \barwedge (S, T'_1, T'_2, B, A, M)$$

et les droites PS, $T_1 T'_1$, $T_2 T'_2$, $A''B$, $B''A$ sont des rayons d'un même système réglé.

Soient p la perpendiculaire abaissée du centre O *de la quadrique Σ sur le plan μ tangent en* M; A'', B'' *les traces des axes de symétrie $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ sur le plan μ. Les trois droites p,* AB'', $A''B$ *déterminent un système réglé* (p, AB'', $A''B$, ...) *dont deux rayons sont parallèles aux tangentes principales t_1, t_2. Le rayon parallèle à t_1 coupe la normale n en un point* T'_1 *homologue du centre de courbure* C_1 *dans l'involution* ($M\infty$, AB).

18. On a (6)

$$(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B, C, S).$$

Le cône (n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d) est coupé par le plan de symétrie α suivant l'hyperbole équilatère (A, T''_1, T''_2, M_1, M_2, M_3, O) et le faisceau

$$O(A, T''_1, T''_2, M_1, M_2, M_3)$$

détermine sur la droite AM_1 la ponctuelle

$$(A, O''_1, O''_2, M_1, C', B').$$

Les parallèles à l'axe de symétrie $\beta\gamma$ menées respectivement par les points A, O''_1, O''_2, M_1, C', B' sont coupées par la normale suivant la ponctuelle

$$(A, O_1, O_2, M, C, B)$$

projective à

$$(M, C_1, C_2, A, B, C);$$

par suite les couples AM, BC, O_1C_1, O_2C_2 sont en involution.

Les plans projetant de l'axe de symétrie $\beta\gamma$, *les traces* T''_1, T''_2 *des tangentes principales* t_1, t_2 *sur le plan de symétrie* α, *coupent la normale* n *en deux points* O_1, O_2 *conjugués respectifs des centres de courbure* C_1, C_2 *dans l'involution* (MA, BC).

19. On mène par le point A une parallèle à l'axe $\alpha\gamma$, elle coupe l'axe $\alpha\beta$ au point U ; on mène par le point M_1 une parallèle à l'axe $\alpha\beta$, elle coupe l'axe $\alpha\gamma$ au point V. La propriété involutive du quadrangle complet, ayant pour sommets les points U, V et les points à l'infini sur les axes $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, montre que le point $S'_1 \equiv (AM_1, UV)$ est le point central de l'involution $(AM_1, B'C')$; par suite la parallèle menée par le point S'_1 à l'axe $\beta\gamma$ coupe la normale n au point central S_1 de l'involution (AM, BC). Ainsi :

Le plan mené par le point A *parallèlement au plan de symétrie* γ *coupe le plan de symétrie* β *suivant une droite* u ; *le plan mené par le point* M *parallèlement au plan de symétrie* β *coupe le plan de symétrie* γ *suivant une droite* v. *Le plan* uv *détermine sur la normale* n *le point central* S_1 *de l'involution* (MA, BC, O_1C_1, O_2C_2).

20. Si, dans les raisonnements du n° 18, on substitue le point T''_1 au point O comme sommet du faisceau de rayons, on obtient la propriété suivante :

Par la trace du plan tangent en M *sur le plan de symétrie* α, *on mène un plan parallèle à l'axe de symétrie* $\beta\gamma$; *ce plan coupe la normale en un point* R *conjugué du centre de courbure* C_2 *dans l'involution* $(AM, O_1\infty)$. *Par la trace* T''_1 *de la tangente principale* t_1 *sur le plan de symétrie* α, *on mène un plan* *parallèle au plan de symétrie* β, *coupant suivant une droite* u' *le plan mené par* A *parallèlement au plan de symétrie* γ. *Le plan mené par* T''_1 *parallèlement à* γ *coupe suivant une droite* v' *le plan mené par* M *parallèlement à* β. *Le plan* $u'v'$ *coupe la normale* n *au conjugué du centre de courbure* C_1 *dans l'involution* $(AM, O_1\infty, C_2R)$.

21. On a (6)

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \overline{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d).$$

Les plans menés par les points C_1, C_2, A, B perpendiculairement à la normale n coupent le diamètre d aux points D_1, D_2, D_a, D_b. Si D désigne le point à l'infini du diamètre d, on a

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b, D) \overline{\wedge} (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d);$$

par suite, la normale n, les parallèles t'_1, t'_2, a', b' aux droites t_1, t_2, m_1, m_2, menées respectivement par les points D_1, D_2, D_a, D_b, appartiennent à un même système réglé. Le plan nt_1 contient la directrice t''_1 de ce système, parallèle au rayon t'_1 ; le point (nt'_1) situé dans le plan $t'_2 t''_1$ normal à n est nécessairement sur la perpendiculaire menée du point D_2 à cette droite n; par suite le point (nt''_1) est identique à C_2. De même par le point C_1 passe une directrice t''_2 du système réglé $(a', b', n, \ldots)$ parallèle à t'_2.

Par les points A, B, *on mène des plans perpendiculaires à la normale* n, *rencontrant le diamètre* d *issu de* M *en deux points* D_a, D_b. *Par ces points on mène les droites* a', b' *respectivement normales aux plans* α, β. *Les directrices du système réglé* $(a'b'n)$ *menées par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *sont respectivement parallèles aux tangentes* *principales non correspondantes* t_2, t_1. (Mannheim, *Journal de Liouville*, 5^e série, t. II, p. 51.)

22. Les directrices a'', b'' du système réglé $(a'b'n)$ respectivement parallèles à a' et b' coupent la normale n aux points A_n, B_n situés respectivement dans les plans menés par les points D_b, D_a normalement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$. Si n' désigne la directrice parallèle à n, on a

$$(n, t'_1, t'_2, a', b') \barwedge (n', t''_1, t''_2, a'', b'')$$

ou

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b) \barwedge (\infty, C_2, C_1, A_n, B_n).$$

Mais

$$(M, D_1, D_2, D_a, D_b) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B),$$

donc

$$(\infty, C_2, C_1, A_n, B_n) \barwedge (M, C_1, C_2, A, B),$$

et les couples $M\infty$, AA_n, BB_n, C_1C_2 sont en involution ; par suite,

$$MC_1 . MC_2 = MA . MA_n = MB . MB_n.$$

On désigne par D_b *la trace du diamètre* d *issu de* M *sur le plan mené par* B *perpendiculairement à la normale* n; *par* A_n *celle de la droite* n *sur le plan mené par* D_b *normalement à l'axe* $\alpha\beta$. *Le produit des rayons de courbure principaux au point* M *est égal au produit* $MA . MA_n$.

23. Dans le cas d'une quadrique Σ à centre, soient p la distance de ce point au plan tangent en M ; P_a, P_b, P_c les carrés des demi-axes, on a (22)

$$MC_1 . MC_2 = \frac{MA_n}{p} MA . p = P_a \frac{MA_n}{p},$$

$$\frac{MA_n}{MC} = \frac{MD_b}{MO}, \qquad MA_n = \frac{MC . p . MD_b}{p . MO} = P_c \frac{MD_b}{p . MO},$$

$$\frac{MD_b}{MO} = \frac{MB}{p} = \frac{P_b}{p^2};$$

par suite,

$$MC_1 . MC_2 = \frac{P_a P_b P_c}{p^4},$$

formule de Dupin.

24. Dans le cas du paraboloïde, on a

$$MC_1 . MC_2 = MA . MA_n,$$
$$MD_b = MA_n \cos\theta, \qquad MB = MD_b \cos\theta,$$

θ désignant l'angle de la normale n avec l'axe de symétrie; par suite,

$$MC_1 . MC_2 = \frac{MA . MB}{\cos^2\theta}.$$

Mais si $2a$, $2b$ désignent les paramètres principaux du paraboloïde, on a

$$MA \cos\theta = b, \qquad MB \cos\theta = a;$$

donc

$$MC_1 . MC_2 = \frac{ab}{\cos^4\theta},$$

formule connue.

25. Les plans polaires du point M par rapport à Σ, Σ_1, Σ_2, (α), (β), (γ), (σ) forment un faisceau du troisième ordre :

$$[\mu \equiv (t_1, t_2), \mu_1 \equiv (nt_2), \mu_2 = (nt_1), \alpha, \beta, \gamma, \sigma],$$

projectif à la ponctuelle

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S).$$

L'axe de symétrie $\alpha\beta$ de la quadrique Σ est un axe de ce faisceau, il est coupé par les plans μ, μ_1, μ_2, γ, σ suivant la ponctuelle $(C'', X_2, X_1, O, \infty)$ projective à la ponctuelle (M, C_1, C_2, C, S); donc les rayons MC'',

CO, $S\infty$, C_1X_2, C_2X_1 appartiennent à un même système réglé.

Le plan tangent μ *et la normale* n *en un point* M *d'une quadrique* Σ *de centre* O *rencontrent respectivement l'axe de symétrie* $\alpha\beta$, *et le plan de symétrie* γ *aux points* C'' *et* C. *Le paraboloïde circonscrit au quadrique gauche* $MC''OC$ *est tangent aux sections principales* nt_1, nt_2 *aux centres de courbure principaux non correspondants* C_2, C_1.

26. En se reportant aux notations du n° **4**, au point Q de la ponctuelle $(M, C_1, C_2, \ldots)$ correspond dans le faisceau $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots)$ le plan polaire μ'' du point M par rapport à la quadrique Σ'. Ce plan μ'' coupe $\alpha\beta$ en un point M'' et la droite QM'' est un rayon du système réglé $(MC'', CO, S\infty, \ldots)$.

Soient t, t' *deux tangentes conjuguées au point* M *de la quadrique* Σ; Q *le point central sur la génératrice* n *de la normalie tangente à* t' *au point* M; Σ' *la quadrique homofocale à* Σ *et tangente à* t. *Le plan tangent au point* Q *au paraboloïde* $(MC''OC)$ (25) *et le plan polaire du plan* M *relativement à* Σ' *coupent l'axe de symétrie* $\alpha\beta$ *au même point.*

27. La droite à l'infini du plan de symétrie α est un axe du faisceau du troisième ordre; il est coupé par les plans μ, μ_1, μ_2, β, γ suivant la ponctuelle

$$(H, H_1, H_2, B''', C''')$$

projective à la ponctuelle (M, C_1, C_2, B, C); donc les rayons MH, BB''', CC''', C_1H_1, C_2H_2 appartiennent à un même système réglé. Ainsi :

Le trièdre $\mu\mu_1\mu_2$ *est coupé par un plan mené par* *le point* M *parallèlement au plan de symétrie* α *suivant trois droites* s, s_1, s_2. *Les droites menées par les points* M, B, C, *respectivement parallèles à la droite* s, *à l'axe de symétrie* $\alpha\beta$ *et à l'axe de symétrie* $\alpha\gamma$, *déterminent un système réglé dont deux rayons sont parallèles aux droites* s_1, s_2. *Ces rayons coupent la normale* n *aux centres de courbure principaux* C_1, C_2 *de* Σ.

28. On a (6)

$$(M, C_1, C_2, A, B, S) \,\overline{\wedge}\, (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d).$$

Les plans menés par les points C_1, C_2, A, B perpendiculairement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$ coupent le diamètre d aux points D'_1, D'_2, D'_a, D'_b et l'on a

$$(M, D'_1, D'_2, D'_a, D'_b, D) \,\overline{\wedge}\, (n, t_1, t_2, m_1, m_2, d);$$

par suite, la normale n, les parallèles t'_1, t'_2, m'_1, m'_2 aux droites t_1, t_2, m_1, m_2 menées respectivement par les points D'_1, D'_2, D'_a, D'_b appartiennent à un même système réglé. Le plan Am'_1 renferme une directrice b_1 de ce système; elle passe par A et est parallèle à m'_2. De même une directrice a_1 parallèle à m'_1 passe par B. Donc :

Les directrices du système réglé (a, b, d) (6) *perpendiculaires à la normale* n *sont parallèles aux tangentes principales* t_1, t_2; *elles rencontrent le diamètre* d *en deux points* D'_1, D'_2 *situés dans les plans menés par les centres de courbure principaux perpendiculairement à l'axe de symétrie* $\alpha\beta$.

29. On suppose que la quadrique Σ ait trois plans de symétrie α, β, γ (2). Par les points C_1, C_2, A, B, C, S on mène des plans parallèles au plan de symétrie α; ils coupent m_1 aux points C'_1, C'_2, A', B', C', S'. Le cône $(n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d)$ est coupé par le plan α suivant la ponctuelle du second ordre $(A, T_1, T_2, A', M_2, M_3, O)$ en désignant par O le centre de la surface Σ.

De la projectivité

$$(M, C'_1, C'_2, A', B', C', S') \barwedge (A, T_1, T_2, A', M_2, M_3, O),$$

on déduit que les droites MA, C'_1T_2, C'_2T_2, $B'M_2$, $C'M_3$, OS' font partie d'un même système réglé. Le plan $BB'M_2$ renferme une directrice c_1 de ce système; elle passe par B et est parallèle à $C'M_3$. De même une directrice b_1 parallèle à $B'M_2$ passe par le point C.

Par les points B *et* C *on mène des perpendiculaires* c_1 *et* b_1 *respectivement sur les plans de symétrie* γ *et* β. *La trace* $\mu\alpha$ *du plan tangent en* M *sur le plan* α *rencontre le système réglé* (b_1, c_1, m_1) *en deux points* T_1, T_2 *situés respectivement sur les tangentes principales* t_1, t_2. *Les directrices de ce système réglé passant par* T_1, T_2 *rencontrent* m_1 *en deux points* C'_1, C'_2 *situés dans les plans projetant les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *parallèlement au plan* α.

30. On a (1)

$$(M, C_1. C_2, A, B, C, S) \barwedge (n_1, t_2, t_1, \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\sigma);$$

par suite, les parallèles menées par les points C_1, C_2, A, B, C respectivement aux droites t_2, t_1, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ sont des rayons d'un système réglé. Ainsi :

Les plans parallèles au plan tangent en M *menés par les points* A, B, C *rencontrent les plans de symétrie correspondants* α, β, γ *suivant les droites* a_2, b_2, c_2. *Les rayons du système réglé* (a_2, b_2, c_2) *passant par les centres de courbure principaux* C_1,

C_2 *sont respectivement parallèles aux tangentes principales* t_2, t_1.

Le rayon s du système réglé (a_2, b_2, c_2) passant par M est une corde conjuguée du plan diamétral normal en M. Ce rayon peut remplacer c_2 dans la propriété précédente qui est alors applicable au paraboloïde.

31. Les rayons du système réglé (a_2, b_2, c_2) sont les conjuguées relativement aux quadriques homofocales à Σ, de la tangente s' en M à Σ, située dans le plan diamétral normal. Si des points de la tangente s conjuguée de s' on abaisse des perpendiculaires sur leurs plans polaires relatifs à Σ, ces perpendiculaires seront les directrices du système réglé. Les plans projetant d'une de ces directrices les points C_1, C_2 sont parallèles respectivement aux droites t_1, t_2 (30). Par suite :

Si s est la tangente en M *conjuguée au plan diamétral passant par la normale n,* X *sa trace sur le plan de symétrie α, x la perpendiculaire abaissée de* X *sur son plan polaire; les plans menés par x parallèlement aux tangentes principales t_1, t_2 passent respectivement par les centres de courbure* C_2, C_1.

32. Les rayons et les directrices du système réglé (a_2, b_2, c_2) sont projetés du centre O sur le plan μ suivant les tangentes à une conique. Cette conique est déterminée par les cinq tangentes s, s', $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$. Des génératrices du système réglé passant par C_1 et C_2 (31), on déduit :

La tangente s (31) *et sa conjuguée s', les traces des plans de symétrie sur le plan μ, déterminent une conique. Les diamètres* OC_1, OC_2 *de Σ ren-*

contrent la droite s' en deux points tels que les secondes tangentes menées de ces points à la conique sont parallèles respectivement aux tangentes principales t_2, t_1.

33. De la projectivité

$$(M, C_1, C_2, A, B, C, S) \barwedge (n, t_1, t_2, m_1, m_2, m_3, d),$$

on déduit :

Une surface réglée du troisième ordre Σ_3, ayant pour cône directeur le cône (M) du complexe des droites normales à leurs conjuguées, est déterminée par la directrice double n et les génératrices a, b, c. Les génératrices de Σ_3 passant par les centres de courbure principaux sont parallèles aux tangentes principales t_1, t_2.

Remarque. — La génératrice à l'infini de la surface Σ_3 est dans le plan diamétral nd.

34. Les plans projetant les génératrices de Σ_3 normalement au plan α enveloppent un cylindre parabolique tangent au plan (an) le long de la génératrice m_1; la génératrice à l'infini de ce cylindre est dans le plan $m_1 d$. En coupant ce cylindre par le plan α, on a :

Soient t'_1, t'_2, M_1, d', b', C'_1, C'_2 les projections orthogonales sur le plan de symétrie α des éléments t_1, t_2, M, d, b, C_1, C_2; la droite d' est le diamètre d'une parabole tangente aux droites AM_1 et b' et passant par M_1. Les tangentes à cette parabole parallèles aux droites t'_1, t'_2 passent respectivement par les points C'_1, C'_2.

35. La section de la surface Σ_3 par un plan α_1 mené

par A normalement à l'axe de symétrie $\alpha\beta$ se compose de la droite a et d'une conique (α_1) tangente en A au cône (M); ses directions asymptotiques sont b et l'intersection des plans α_1 et nd; la conique passe par le point (α_1, c). On a la construction suivante du plan tangent en A au cône (M) du complexe. Le rayon MA rencontre les faces du tétraèdre principal aux points A, B, C, S; on détermine le conjugué K du point M dans l'involution (AB, CS), la droite menée par K s'appuyant sur le couple d'arêtes opposées $\alpha\beta$, $\gamma\sigma$ du tétraèdre est dans le plan tangent cherché ([1]). On en conclut :

Du conjugué de M *dans l'involution* (AB, C∞) *on abaisse une perpendiculaire k sur l'axe* $\alpha\beta$. *Dans le plan* α_1 *mené par* A *normalement à l'axe* $\alpha\beta$, *une conique* (α_1) *est déterminée par le point* A, *la tangente* k_1 *en ce point parallèle à* k, *le point* (α_1, c), *les directions asymptotiques* $\alpha\gamma$ *et* OC, O *étant le centre de la quadrique. Les plans des sections principales* nt_1, nt_2 *coupent cette conique en deux points dont les projections sur la normale* n *sont les centres de courbure principaux* C_1, C_2.

36. Si l'on coupe Σ_3 par un plan parallèle au plan nd on a la propriété suivante :

Un plan π *parallèle au plan diamétral normal* nd *est coupé par le plan* nk *et les droites* a, b, c *suivant une asymptote* n'' *et trois points* A'', B'', C'' *d'une hyperbole. Cette courbe est rencontrée par les plans principaux* nt_1, nt_2 *en deux points dont les projections sur la normale* n *sont les centres de courbure principaux* C_1, C_2.

---

(1) C. Servais, *Mathesis*, 1909, p. 5.

37. On coupe par le plan α les plans projetant les génératrices de Σ_3 parallèlement au diamètre d. Ces plans enveloppent un cylindre parabolique tangent au plan nd le long de la génératrice d. Par suite :

Les plans menés par les droites b, c parallèlement au diamètre d rencontrent le plan de symétrie α suivant les droites b'', c''. La parabole tangente aux droites OA, b'', c'' *et passant par le centre* O *de* Σ *a deux tangentes parallèles respectivement aux plans* Ot_1, Ot_2; *ces tangentes rencontrent* OA *en deux points situés sur les parallèles menées par les centres de courbure principaux* C_1, C_2 *au diamètre* d.

Remarque. — Cette propriété est applicable au paraboloïde, si, au lieu du plan α, on choisit un plan normal à l'axe $\beta\gamma$ du paraboloïde ; il suffit de remplacer O et A par les traces de d et n sur le plan sécant.

38. On coupe par le plan nt_1 les plans projetant les génératrices de Σ_3 parallèlement à t_2 ; on a la propriété :

La normale n et les projections orthogonales des droites a, b, c sur le plan principal nt_1 déterminent une parabole dont la directrice passe par le centre de courbure C_1.

Remarque. — Cette parabole est tangente à la normale n au point M, ce qui permet de supprimer la projection de c dans la détermination de la parabole; la propriété est alors applicable au paraboloïde.

39. *Construction des centres de courbure principaux* C_1, C_2 *d'une quadrique* Σ, *le centre* O *étant à distance finie ou infinie.* — Soient A′, B′, C′ les traces

des axes de symétrie $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sur le plan tangent en M ([1]); B'', C'' celle des droites MB', MC' respectivement sur les plans β et γ; B_a, C_a celles de l'axe $\beta\gamma$ sur deux plans, l'un mené par B'' normalement à la droite $A'C'$, l'autre mené par C'' normalement à la droite $A'B'$; a' la droite commune aux plans BOB', COC'; B''', C''' les points $(BC_a, B''B_a)$, $(CB_a, C''C_a)$. Le cône déterminé par les droites a', OB''', OC''', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ rencontre la normale n aux centres de courbure principaux C_1, C_2.

En effet, les perpendiculaires abaissées des points de la droite MB' sur leurs plans polaires appartiennent à un système réglé; la normale n, l'axe $\alpha\gamma$, la droite $B''B_a$ font partie de ce système. Les directrices du système réglé sont les conjuguées de la tangente en M parallèle à $A'C'$, relativement aux quadriques homofocales à la quadrique Σ. Les droites BO, CB_a sont les conjuguées de cette tangente par rapport aux coniques focales des plans β et γ. En considérant la tangente en M parallèle à $A'B'$, on aura un second système réglé $(n, \alpha\beta, C''C_a, \ldots)$ ayant pour directrices CO, BC_a. Ces deux surfaces ont une génératrice commune n et sont tangentes aux centres de courbure principaux C_1, C_2; elles se coupent donc suivant une cubique gauche passant par C_1, C_2. Les génératrices et les directrices qui précèdent donnent les points de la cubique

$$O, \quad B''', \quad C''' \quad (\alpha\gamma, C''C_a), \quad (\alpha\beta, B''B_a).$$

La tangente à la cubique au point O est l'intersection a' des plans BOB', COC' tangents en O aux deux paraboloïdes; par suite, le cône ayant pour génératrices a',

---

([1]) Dans le cas d'un paraboloïde, le plan de symétrie α est à l'infini.

OB''', OC''', $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ est le cône de sommet O perspectif à la cubique; il passe par C_1 et C_2.

Remarque. — La droite à l'infini du plan mené par le diamètre BO parallèlement à la droite CB_a appartient au système réglé $(n, \alpha\gamma, B''B_a)$; celle du plan mené par le diamètre CO parallèlement à la droite BC_a appartient au système réglé $(n, \alpha\beta, C''C_a)$; par suite, la droite commune à ces deux plans est une génératrice du cône (O).

[$K^1 2e$]

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. T. LEMOYNE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

M. T. Lemoyne a donné dans ce Journal, 1904, p. 400, le théorème suivant, sans démonstration :

Les axes radicaux des cercles podaires de chacun des points d'une transversale Δ, *par rapport à un triangle* ABC, *passent par un point fixe* ω; ce qui revient à dire que ω *a même puissance par rapport à tous ces cercles. Lorsque* Δ *coupe le cercle* ABC, *en deux points* P, Q, *les droites de Simson de* P *et* Q *se rencontrent au point* ω.

Cette proposition a été l'objet d'une étude géométrique de M. Neuberg, professeur à l'Université de Liége (*Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, juillet et août 1910).

La deuxième partie a été aussi établie analytiquement dans *Mathesis: Sur le cercle podaire*, novembre 1912, p. 238.

Je me propose ici, tout en présentant cette dernière partie d'une manière un peu plus générale, d'en donner une démonstration géométrique élémentaire assez élégante.

1. Je donnerai tout d'abord le théorème suivant généralisant celui que j'ai signalé en juin 1910, p. 272 [1] :

On coupe les côtés d'un triangle ABC *par une transversale* Δ, *et des sommets, on mène trois parallèles quelconques* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, *faisant avec* Δ *un angle aigu* φ. *Puis de* α, β, γ, *on trace les droites* αM, βN, γP *faisant des angles égaux à* φ, *avec* BC, CA, AB, *dans le même sens de rotation. Les droites* αM, βN, γP *concourent en un point* ω.

Considérons le cas particulier d'une transversale Δ_1, parallèle à Δ, qui contient le sommet B (*fig.* 1). Le cas général s'en déduira par une translation suivant $A\alpha$ qui amène le sommet B sur Δ. Traçons les droites $\alpha_1\omega_1$ et $\gamma_1\omega_1$ faisant respectivement avec BC et AB, dans le même sens, l'angle φ. Ces droites se coupant en ω_1, je dis que $B\omega_1 B'$ fait avec CA le même angle φ.

Les quadrilatères inscriptibles $\alpha_1 A'C\gamma$ et $\alpha_1 C'A\gamma_1$, donnent

$$B\alpha_1.B\gamma_1 = BC'.BA = BA'.BC;$$

le quadrilatère $A'C'AC$ est inscriptible, et

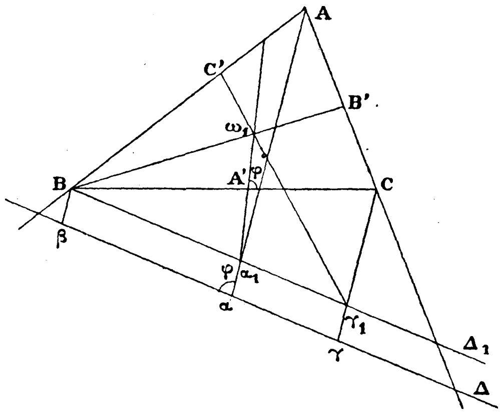
$$\widehat{B\omega_1 A'} = \widehat{BC'A'} = \widehat{C}.$$

---

[1] Ce théorème énoncé, page 272 (1910), est dû à M. Neuberg. *Projections et contre-projections d'un triangle fixe*, 1890, p. 75

Les triangles $B\omega_1 A'$ et $BB'C$ sont alors semblables, et

Fig. 1.



$\alpha_1 A'$ et $B\omega_1 B'$ sont antiparallèles par rapport à BC et CA.

2. La théorie des droites isogonales par rapport aux côtés d'un triangle ABC permet de généraliser les propriétés de la droite de Simson.

Si d'un point M *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *on mène les droites* MP, MQ, MR, *faisant des angles égaux avec* BC, CA, AB, *dans le même sens de rotation, les points* P, Q, R *sont en ligne droite. Réciproquement, d'ailleurs, si les droites* MP, MQ, MR, *également inclinées sur* BC, CA, AB, *ont leurs pieds en ligne droite, le point* M *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC.

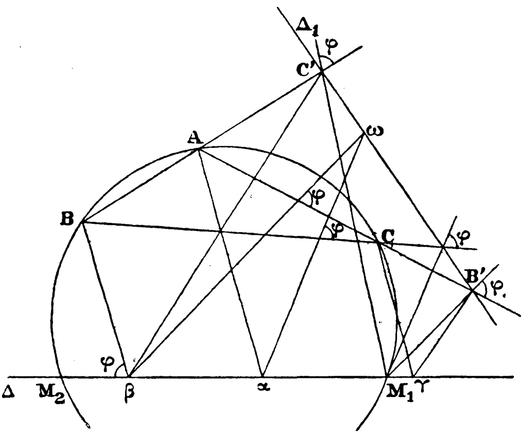
On obtient même ce résultat qui mérite peut-être d'être signalé :

Les droites Δ_1 *et* Δ_2, *contenant les trois points en* *ligne droite obtenus comme précédemment en menant de deux points* M *et* M′ *du cercle circonscrit à un triangle des droites* MP, MQ, MR, M′P′, M′Q′, M′R′ *faisant avec les côtés des angles égaux, font entre elles un angle égal à l'angle inscrit sous-tendu par la corde* MM′ *ou à son supplément, et réciproquement.*

En particulier, *si* MM′ *est un diamètre du cercle circonscrit, les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *sont rectangulaires.*

3. *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *deux droites précédentes obtenues en traçant des points* M_1 *et* M_2, *où la transversale* Δ *du paragraphe* 1 *rencontre le cercle circonscrit au triangle* ABC, *des droites* M_1P_1, M_1Q_1, M_1R_1, M_2P_2, M_2Q_2, M_2R_2 *faisant avec* BC, CA, AB, *dans*

Fig. 2.



le même sens, des angles égaux à l'angle φ *de* Δ *avec les parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. *Les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *se rencontrent au point* ω *de concours de* αM, βN *et* γP (*fig.* 2).

C'est le théorème de M. Lemoyne sous une forme plus générale. Il sera démontré si nous prouvons que le point ω appartient à Δ_1, car nous aurons ainsi montré que l'une quelconque des droites, $\alpha\omega$ par exemple, est rencontrée par l'une quelconque des deux autres droites analogues sur l'une quelconque des droites Δ_1 et Δ_2 relatives à M_1 et M_2. Or, les quadrilatères inscriptibles $M_1\gamma CB'$ et $M_1\beta BC'$, donnent

$$\text{angle } M_1\gamma B' = 180^\circ - M_1CB'$$

et

$$\text{angle } M_1\beta C' = \text{angle } M_1BC',$$

c'est-à-dire que

$$\text{angle } M_1CB' = \text{angle } M_1BC'.$$

On en conclut que les angles $(180^\circ - M_1\gamma B')$ et $M_1\beta C'$ sont égaux, et que les droites $\beta C'$ et $\gamma B'$ sont parallèles.

Considérons alors l'hexagone $\beta\omega\gamma B'M_1C'$; $\beta C'$ et $\gamma B'$ sont parallèles; $\beta\omega$ et M_1B' sont parallèles par construction, de même que $\gamma\omega$ et M_1C'.

Cet hexagone est donc un hexagone de Pascal, où la droite de Pascal est à l'infini. Trois sommets, β, γ, M_1 étant en ligne droite, il en est de même des trois autres, ω, B' C' et le point ω est sur Δ_1.

Remarques. — *a.* M. Neuberg a donné dans le *Wiskundig Tydschrift*, 10ᵉ année, p. 80, le théorème suivant :

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène trois parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *qui rencontrent une transversale quelconque* Δ *en* α, β, γ. *Les parallèles aux côtés* BC, CA, AB *menés par* α, β, γ *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *égal à* ABC ;

qu'il a d'ailleurs étendu au tétraèdre (*Mathesis*, 1913, question 1939).

En appliquant la réciproque de l'une des propriétés du paragraphe 2, on obtient ce résultat :

Le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ *contient le point* ω *correspondant à l'angle* φ *des parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *avec la transversale* Δ.

b. Enfin, dans le cas particulier où $\varphi = 90°$ et où la corde M_1M_2 devient tangente au cercle O circonscrit à ABC, Δ_1 et Δ_2 sont confondues et ω devient le point où ces droites touchent leur enveloppe, une hypocycloïde à trois rebroussements.

Si la transversale Δ se déplace parallèlement à une direction donnée, ω décrit une tangente à l'hypocycloïde perpendiculaire à Δ.

Ces résultats se trouvent dans l'Ouvrage de M. Neuberg, précédemment cité : *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe*, p. 76.

Dans le cas plus général envisagé dans cette Note, quand M_1M_2 est tangente au cercle circonscrit O, ω est encore le contact de Δ_1 avec son enveloppe.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir les formules qui donnent la vitesse et l'accélération d'un point dans un système de coordonnées curvilignes quelconque : les appliquer au cas du mouvement d'un point sur une surface de révolution, en prenant comme lignes de coordonnées sur cette surface les méridiens et les parallèles.*

II. *Un corps solide présentant un point fixe* O *est animé d'un mouvement à la Poinsot. Sur les trois axes principaux d'inertie relatifs au point* O, *on porte des segments*

$$Oa = \sqrt{A}, \qquad Ob = \sqrt{B}, \qquad Oc = \sqrt{C},$$

A, B, C *étant les moments d'inertie correspondants. Soient* ω, α, β, γ *les projections orthogonales des points* O, a, b, c *sur un point perpendiculaire au moment cinétique résultant. Démontrer que la somme des aires balayées par* $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, *dans le mouvement du solide, reste proportionnelle au temps.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Une sphère homogène* S, *de masse* m, *animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, de vitesse* v_0, *heurte à un certain instant, en un point* M, *un solide* S' *immobile et de très grande masse. Déterminer l'état dynamique de la sphère après le choc, et la perte de force vive, en supposant que la masse* m *de* S *soit assez petite relativement à celle de* S', *pour que ce dernier solide puisse encore être considéré comme immobile après le choc.*

II. *Forme d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, non pesant, traversé par un courant uniforme et soumis à l'influence d'un pôle d'aimant. On donne les positions des extrémités du fil ainsi que sa longueur.*

Nota. — *Le pôle étant pris pour origine d'axes rectangulaires, l'élément* (dx, dy, dz) *du fil, issu du point* (x, y, z), *à la distance* r *du pôle, est soumis à une force* totale, *dont les composantes suivant les axes sont, en vertu de la loi de Laplace et d'Ampère,*

$$X = \mu \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \qquad \ldots,$$

μ *étant une constante donnée.*

(Novembre 1912.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un corps solide, homogène, pesant, de forme quelconque est tel que, aux deux points où une* *droite* D, *qui lui est invariablement liée, rencontrerait sa surface, ce corps se prolonge en deux tourillons dont les surfaces font partie d'un même cylindre de révolution de rayon r, ayant pour axe cette droite* D. *Le corps repose, au moyen de ces deux tourillons*, A *et* B, *sur deux coussinets fixes, faisant eux-mêmes partie d'un deuxième cylindre de révolution horizontal et de rayon* $R = 5r$. *On suppose le corps solide parfaitement rigide, et les coussinets assez solidement établis pour que, malgré la distance qui sépare l'un de l'autre les pieds des deux tourillons, distance qui est aussi sensiblement celle des deux coussinets, les deux cylindres se touchent toujours également le long d'une même génératrice de contact, c'est-à-dire que cela doit avoir lieu dans chaque coussinet, ces deux portions de génératrice faisant partie de la même génératrice prolongée idéalement à travers le corps. Au début du mouvement, cette génératrice de contact est une génératrice* quelconque *du cylindre fixe des coussinets, et la position du solide par rapport à cette génératrice est aussi quelconque; mais les vitesses initiales dont peuvent être animés les divers points du corps sont toutes dirigées dans un plan perpendiculaire à la direction commune des génératrices des cylindres. Enfin ces vitesses initiales et la nature des cylindres en contact sont telles que le cylindre des tourillons ne peut jamais que* rouler sans glisser *à l'intérieur du cylindre des coussinets. On demande d'établir la ou les équations différentielles du mouvement dans le cas le plus général et d'en déduire ensuite celles qui conviennent au cas des petits mouvements, qu'on étudiera spécialement.*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On considère une ellipse matérielle qui tourne d'un mouvement uniforme donné autour de son centre dans son plan supposé fixe, la position initiale du grand axe étant horizontale. Un point matériel pesant* M *est astreint à se mouvoir sans frottement sur l'ellipse, sa position et sa vitesse initiales étant d'ailleurs quelconques. Établir l'équation différentielle du mouvement.*

2° *Particulariser cette équation pour le cas où l'ellipse* *se réduit à une circonférence de cercle toujours mobile uniformément dans son plan autour de son centre. Dire si l'on ne pourrait pas, dans ce cas particulier, établir l'équation différentielle directement par une méthode plus simple (sans parler de mouvement relatif). Dire enfin ce à quoi se réduit la discussion du mouvement dans le même cas de la circonférence.*

3° *Toujours dans le cas de la circonférence mobile établir l'équation du mouvement du point en tenant compte du frottement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point mobile* M *parcourt une cardioïde fixe avec une vitesse dont la grandeur croît proportionnellement à une puissance d'exposant entier* n *du temps. A l'instant initial, le mobile se trouve au point de rebroussement* O, *avec une vitesse nulle.*

1° *Déterminer l'hodographe du mouvement;*

2° *Calculer la grandeur du vecteur-accélération à un instant quelconque.*

(Novembre 1912.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver le mouvement d'une sphère pesante et homogène sur un plan incliné dépoli dont le frottement est suffisant pour ne permettre qu'un roulement sans glissement.*

Déterminer, dans ce cas, la valeur minimum du frottement en fonction de l'inclinaison du plan sur l'horizon.

On négligera la résistance au roulement.

SOLUTION.

Soient, dans le plan incliné, un axe OX horizontal et un axe OY suivant la ligne de pente vers le haut.

On fait passer par le centre C de la sphère mobile trois axes de directions fixes, Cx et Cy parallèles à OX et à OY et le troisième Oz normal au plan incliné vers le haut.

Soient X, Y et N les composantes de la réaction du plan incliné; α et β l'abscisse et l'ordonnée du centre C; p, q, r les composantes de la rotation de la sphère; R le rayon.

Puisqu'il y a roulement, la vitesse du point de contact est nulle, ou encore ses composantes suivant Cx et Cy sont nulles. On a ainsi

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt}+q\mathrm{R}=0,\\ &\frac{d\beta}{dt}-p\mathrm{R}=0.\end{aligned}\right.$$

M étant la masse de la sphère, le mouvement du centre de gravité est fourni par les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\mathrm{X},\\ &\mathrm{M}\frac{d^2\beta}{dt^2}=\mathrm{Y}-\mathrm{M}g\sin\alpha,\end{aligned}\right.$$

et le mouvement autour du centre de gravité s'obtient en prenant les moments par rapport à Cx et Cy, ce qui donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{5}\mathrm{MR}^2\frac{dp}{dt}=-\mathrm{RY},\\ &\frac{2}{5}\mathrm{MR}^2\frac{dq}{dt}=\mathrm{RX}.\end{aligned}\right.$$

La combinaison des équations (2) et (3) donne

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{2}{5}\mathrm{R}\frac{dq}{dt}=0,\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{2}{5}\mathrm{R}\frac{dp}{dt}=-g\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en vertu de (1), on a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2\beta}{dt^2}=-\frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

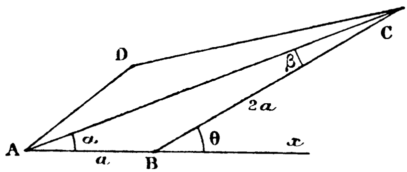
La trajectoire décrit une parabole, celle qui s'offrirait si l'on supprimait le frottement et si l'on réduisait la pesanteur aux $\frac{5}{7}$ de sa valeur.

Il n'y aura pas glissement si la réaction tangentielle du plan est inférieure à la réaction normale multipliée par f. Il faut donc qu'on ait

$$\frac{2}{7}\mathrm{M}g\sin\alpha<\mathrm{M}gf\cos\alpha,\qquad \text{ou}\qquad f>\frac{2}{7}\operatorname{tang}\alpha,$$

ou encore que le coefficient de frottement soit supérieur à $\frac{2}{7}\tang\alpha$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un quadrilatère articulé* ABCD. *Les côtés* AB *et* AD *sont égaux. Les*



côtés CB *et* CD *sont aussi égaux, mais doubles des précédents.*

On fixe les points A *et* B *et l'on déplace le système dans son plan en faisant tourner la barre* AD *uniformément autour du point* A.

Déterminer à chaque instant la vitesse angulaire de la barre BC *et la représenter graphiquement en portant sur* BC *une longueur proportionnelle à cette vitesse angulaire.*

Sur l'axe autour duquel tourne BC *on cale un volant formé d'un disque circulaire homogène. Trouver quelle est à chaque instant la tension de la barre* BC? *On néglige les masses des barres.*

On suppose la longueur AB *égale à* 1^{m}, *le rayon du volant égal à* 2^{m}, *et le poids du volant égal à* 1000^{kg}. *Enfin la barre* AD *fait un tour par seconde.*

SOLUTION.

La vitesse angulaire ω de AD est

$$\omega = 2\frac{d\alpha}{dt}.$$

La vitesse angulaire ω' de BC est

$$\omega' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}.$$

Mais on a

$$\sin\alpha = 2\sin\beta,$$

d'où

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 2\cos\beta\frac{d\beta}{dt}.$$

On voit aussi facilement que l'on a

$$\cos\alpha = \frac{1+2\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}} \qquad \text{et} \qquad \cos\beta = \frac{2+\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}}.$$

On en conclut

$$\omega' = \frac{\omega}{2}\left(2 - \frac{3}{4+2\cos\theta}\right).$$

Si, sur BC, on porte BM $= \omega'$, le lieu de M sera la courbe représentative de la vitesse angulaire de BC. Cette courbe est la conchoïde de l'ellipse $\rho = \frac{-3\omega}{8+4\cos\theta}$, quand on augmente les rayons ρ de ω.

Soit T la tension de la barre DC, soit M la masse et soit R le rayon du volant. Le théorème des moments appliqué au volant donne

$$\frac{1}{2}\mathrm{MR}^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{T}\,2a\sin 2\beta,$$

et, comme $\mathrm{R} = 2a$ et que $\omega' = \frac{d\theta}{dt}$, on en tire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{4}\,\frac{6\sin\theta}{(4+2\cos\theta)^2}\,\frac{5+4\cos\theta}{(4+2\cos\theta)},$$

et, comme conséquence,

$$\mathrm{T} = -\frac{3}{8}\frac{\mathrm{M}a\omega^2}{\cos^4\beta}.$$

Cette valeur de T convient quand θ varie de 0 à π; pour θ variant de π à 2π, il faut changer le signe parce que, dans ce cas, l'angle β ayant changé de sens, le moment de T est $-\mathrm{T}\,2a\sin 2\beta$.

La plus petite valeur absolue de T est $\frac{3}{8}\cdot\frac{1000^{\mathrm{kg}}}{g}\,\omega^2$. Mais $\omega = 2\pi$; on a donc

$$\mathrm{T} = \frac{3}{2}\,1000^{\mathrm{k}} = 1500^{\mathrm{k}}.$$

On a alors

$$\beta = 0, \qquad \theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = \pi.$$

La plus grande valeur absolue de T correspond à $\cos\beta$ maximum; ce qui arrive quand AD est sur le prolongement de AB. On a alors

$$\beta = 60^\circ, \qquad \cos\beta = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\cos^4\beta} = \frac{1}{16}.$$

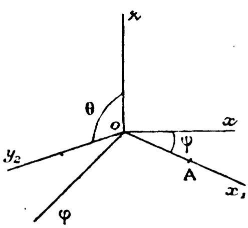
Le maximum est donc 16 fois plus grand que le minimum et atteint 24000^{kg}. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque carrée pesante et homogène repose par un de ses côtés sur un plan horizontal. L'une des extrémités de ce côté est fixe et le côté peut tourner autour de cette extrémité et glisser sans frottement sur le plan horizontal.*

Primitivement, la plaque est sans vitesse, et elle est presque verticale. On l'abandonne à elle-même et l'on demande de quel angle aura tourné le côté qui glisse sur le plan horizontal lorsque la plaque sera devenue horizontale.

SOLUTION.

Soient trois axes fixes $oxyz$ et oz vertical, ox_1 et oy_1



deux côtés de la plaque, a la longueur d'un côté, ψ et θ les angles xox_1 et zoy_1.

Les coordonnées d'un point de la plaque sont

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\theta \sin\psi,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \sin\theta \cos\psi,$$
$$z = y_1 \cos\theta.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à oz étant nulle, on a

$$0 = \Sigma m(xy' - yx') = \psi' \Sigma m(x_1^2 + y_1^2 \sin^2\theta) + \cos\theta\theta' \Sigma m x_1 y_1$$

ou

$$0 = \frac{1}{3}\psi'(1 + \sin^2\theta) + \frac{1}{4}\cos\theta\theta',$$

d'où

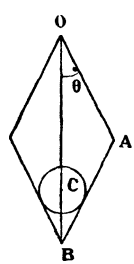
$$\psi = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\theta'}{1+\sin^2\theta} = -\frac{3}{4}(\text{arc tang} \sin\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{16}\pi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un losange articulé est formé de quatre barres identiques, pesantes et homogènes de longueur a. On le suspend par un de ses sommets à un point fixe, et l'on place, entre les deux barres inférieures, un disque circulaire homogène de rayon $\frac{a}{10}$ et de même poids que chacune des barres.*

Quelle est, dans la position d'équilibre, la distance du point fixe au centre du disque, et quelle est la réaction qu'exercent l'une sur l'autre les deux barres inférieures, si l'on suppose que le poids de l'une des barres est de 10^{kg}?

SOLUTION.

La distance z du centre de gravité *du système* au point O



est fournie par le théorème des moments

$$5z = \left(6\cos\theta - \frac{1}{10\sin\theta}\right)a.$$

Quand il y a équilibre, z est maximum et l'on a

$$60 \sin^3\theta - \cos\theta = 0.$$

En faisant $\tang\theta = x$, on a l'équation

$$60x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

d'où

$$x = 0,26,$$

on en tire

$$OC = a\left(2\cos\theta - \frac{1}{10\sin\theta}\right) = 1,54a.$$

Ensuite, la réaction en B étant évidemment horizontale, on a, par rapport au point A et pour la tige AB, l'équation d'équilibre

$$Xa\cos\theta = P\frac{a}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{P}{\sin\theta}\left(a - \frac{a}{10}\cot\theta\right),$$

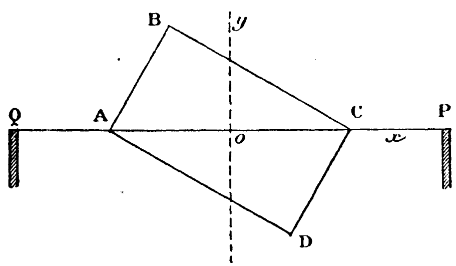
où X est la réaction en B et P le poids de la tige.

On tire de là

$$X = 1,51\,P = 15^k,1.$$

(Octobre 1912.)

Épreuve théorique. — *Une plaque rectangulaire* ABCD *homogène de masse* M *est mobile sans frottement autour d'un axe* PQ, *de poids négligeable, qui coïncide avec la diagonale* AC *et dont les extrémités* P *et* Q *reposent sur*



deux appuis dépolis, situés dans un même plan horizontal.

Le milieu de l'axe PQ *est au centre* O *de la plaque.*

Le coefficient du frottement des extrémités P, Q *sur les appuis est égal à* tang 30°.

La plaque est lancée avec une vitesse angulaire ω.

A quel nombre maximum de tours par seconde doit correspondre ω *pour que les points* P *et* Q *ne glissent pas sur leurs appuis?*

Lorsque ω *dépasse un peu sa valeur maximum, quel angle la plaque fait-elle avec le plan vertical lorsque le glissement se produit?*

Les côtés du rectangle sont $AB = 10^{cm}$ *et* $BC = 20^{cm}$. *La longueur de l'axe* PQ *est* 40^{cm}.

L'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *coupe le plan de la plaque suivant une ellipse dont l'équation est, en prenant* PQ *pour axe des* x *et en prenant le centimètre pour unité*

$$\frac{5}{3}M(8x^2 + 12xy + 17y^2) = 1.$$

SOLUTION.

La plaque tourne évidemment d'un mouvement uniforme. Considérons un plan qui tournerait autour de Ox d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire ω.

Par rapport à ce plan, la plaque serait en repos relatif.

Les conditions de cet équilibre relatif s'obtiendront en ajoutant, aux forces qui sollicitent la plaque, sur chaque point une force $m\omega^2 y$, dirigée parallèlement à Oy. Ces forces $m\omega^2 y$, qui sont parallèles, ont une somme $\Sigma m\omega^2 y$ qui est nulle. Elles se réduisent à un couple dont le moment est $\Sigma m\omega^2 xy = \omega^2 \Sigma mxy$.

La plaque est donc soumise à son poids et au couple $\Sigma m\omega^2 xy$. Mais Σmxy est égal à $-10M$. Si l'on donne à ce couple pour bras de levier PQ, il donnera en P et Q deux forces perpendiculaires à PQ situées dans le plan de la plaque et égales à $\omega^2 \frac{10M}{40} = \frac{5}{20} M\omega^2$.

Si la plaque fait un angle φ avec le plan vertical, ces forces auront une composante verticale égale à $\frac{5}{20} M\omega^2 \cos\varphi$ et une composante horizontale égale à $\frac{5}{20} M\omega^2 \sin\varphi$.

D'ailleurs le poids de la plaque donne en P et Q deux composantes verticales égales à $\frac{1}{2} Mg$.

On aura donc en P une force verticale égale à

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}g \pm \frac{5}{2}\,\mathrm{M}\,\omega^2 \cos\varphi$$

et une force horizontale égale à

$$\frac{5}{2}\,\mathrm{M}\,\omega^2 \sin\varphi.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut (en valeur absolue)

$$\frac{5}{20}\,\mathrm{M}\,\omega^2 \sin\varphi < \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{M}g \pm \frac{5}{20}\,\mathrm{M}\,\omega^2 \cos\varphi\right) \operatorname{tang} 30^\circ,$$

$$\frac{5}{10}\,\omega^2 \sin(\varphi \pm 30^\circ) < g \sin 30^\circ,$$

où φ peut varier de 0° à 360°; il faut donc que

$$\omega^2 < g.$$

Si n désigne le nombre de tours par seconde, on a $\omega = 2\pi n$; on a donc

$$40\pi^2 n^2 < 980 \qquad \text{ou} \qquad n\,25 \text{ environ} \qquad (n = \sqrt{24}).$$

Si n dépasse cette valeur très peu, l'inégalité cessera d'être vérifiée lorsque $\sin(\varphi \pm 30^\circ)$ sera maximum, c'est-à-dire pour $\varphi = 60^\circ$ ou 120°.

C'est-à-dire que le point Q glissera quand ABC fera avec la verticale supérieure un angle de 60°, et P glissera quand BDC fera, avec la verticale supérieure, un angle de 60°.

Épreuve pratique. — *On prend dans un plan six points fixes placés aux sommets d'un hexagone régulier. On les numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *en parcourant le périmètre de l'hexagone dans un sens déterminé.*

A ces six points, on attache six fils de caoutchouc, qu'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6; *les numéros des fils étant les numéros des sommets auxquels ils sont attachés.*

Ces fils sont de même nature, et leur longueur doublerait sous l'action d'une tension de 1000^{g}.

On réunit en un même point P *les extrémités qui n'ont pas encore été fixées.*

On demande de trouver approximativement la tension des fils et la position du nœud P, *sachant que les longueurs des fils non tirés sont :*

N° 1, 102^{cm}; N° 2, 101^{cm}; N° 3, 100^{cm};
N° 4, 97^{cm}; N° 5, 98^{cm}; N° 6, 99^{cm}.

Le côté de l'hexagone a 100^{cm} *de longueur.*

SOLUTION.

On trouvera que les fils 1, 3, 5 ne sont pas tendus et que les fils 2, 4, 6 ont une tension de 10^{g}.

Pour le nœud P, par rapport aux axes dont celui des x est la ligne 3, 6, on trouve

$$x = 0,$$
$$y = -2,3 \text{ centimètres.}$$

(Juin 1913.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1913.

I.

Composition d'Algèbre et Trigonométrie.

On considère la fonction θ *de* x *définie par la relation*

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1+\theta x^2},$$

où le premier membre représente un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Déterminer les valeurs limites de* θ *pour* $x = \pm\infty$ *et* $x = 0$.

2° *Suivre ces variations de la fonction* $\theta(x)$ *quand* x *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

3° *Dans cette fonction* $\theta(x)$, *on remplace* x *par* n^p, n *étant un entier variable et* p *un nombre positif donné; on considère la série dont le terme de rang* n *a pour valeur* $\theta(n^p)$. *Pour quelles valeurs de* p *la série est-elle convergente?*

4° *Calculer*

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\theta(x)\,dx.$$

Étudier la variation de cette intégrale quand a *augmente de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

5° *Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\theta(x)dx.$$

SOLUTION PAR M. THIÉ.

1° On a

$$\theta = \frac{x - \text{arc tang}\,x}{x^2\,\text{arc tang}\,x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{arc tang}\,x} - \frac{1}{x}\right).$$

La seconde forme de θ montre que cette fonction prend la valeur o pour $x = \pm\infty$. Pour x tendant vers o, on a, par le développement en série de la première forme,

$$\theta = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots}{x^3 - \frac{x^5}{3} + \ldots}.$$

Donc, pour $x = 0$, θ prend la valeur $\frac{1}{3}$.

2° Comme la fonction θ est visiblement paire, il suffit de l'étudier pour $x > 0$. Calculons la dérivée de θ :

$$\theta' = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tang} x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\left[\frac{-1}{(\operatorname{arc\,tang} x)^2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\right];$$

x étant positif, θ' a le signe de la quantité

$$u = x^3(\operatorname{arc\,tang} x)^2\theta' = 2(\operatorname{arc\,tang} x)^2 - x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Pour $x = 0$, u s'annule. Calculons la dérivée de cette fonction :

$$u' = 4 \operatorname{arc\,tang} x \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{arc\,tang} x - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \operatorname{arc\,tang} x \frac{3-x^2}{1+x^2} - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Pour $x \geqq \sqrt{3}$, u' est négatif. Pour $x < \sqrt{3}$, u' a le signe de la quantité

$$V = \operatorname{arc\,tang} x - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)(3-x^2)}.$$

V s'annule encore pour $x = 0$. Calculons la dérivée

$$V' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)(3-x^2)(3+3x^2) - x(3+x^2)(4x-4x^3)}{(1+x^2)^2(3-x^2)^2}.$$

Par un calcul sans difficulté, on trouve que cette expression se réduit à

$$V' = \frac{-8x^2}{(3-x^2)(1+x^2)^2},$$

V' est donc négatif pour $0 < x < \sqrt{3}$, et la fonction V est décroissante dans cet intervalle. Elle est donc négative. Par suite, la dérivée u' est négative pour toutes les valeurs positives de x. On conclut de même que la fonction u et par conséquent la dérivée θ' sont négatives. La fonction θ est décroissante.

En résumé, quand x varie de 0 à ∞, la fonction θ

décroît de $\frac{1}{3}$ à o ; c'est une fonction paire, et la courbe représentative se construirait sans difficulté.

3° On a

$$n^p\theta(n^p) = \frac{1}{\text{arc tang } n^p} - \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\text{arc tang } n^p}\left(1 - \frac{\text{arc tang } n^p}{n^p}\right).$$

Cette expression tend vers $\frac{2}{\pi}$, quand n augmente indéfiniment. On en déduit immédiatement, par application d'un théorème classique, que la série considérée est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p \leqq 1$.

4° On a

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx = \int_a^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{\text{arc tang } x} - \frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{\text{arc tang } x}\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= \left\{ \mathrm{L}\left|\frac{\text{arc tang } x\sqrt{1+x^2}}{x}\right| \right\}_a^\infty.$$

Pour $x = \infty$, la fonction obtenue prend la valeur $\mathrm{L}\frac{\pi}{2}$. On a donc, en appelant $f(a)$ l'intégrale donnée,

$$f(a) = \mathrm{L}\frac{\pi}{2} - \mathrm{L}\frac{\text{arc tang } a\sqrt{1+a^2}}{a} = \mathrm{L}\frac{\pi a}{2\,\text{arc tang } a\sqrt{1+a^2}}.$$

On a supprimé le signe de la valeur absolue après le symbole L, car la quantité

$$\frac{\pi a}{2\,\text{arc tang } a\sqrt{1+a^2}}$$

est toujours positive.

La fonction $f(a)$ est paire. Pour $a = 0$, elle prend la valeur $\mathrm{L}\frac{\pi}{2}$. Pour $a = \infty$, elle prend la valeur o. Dans tout l'intervalle elle est décroissante. On a en effet

$$f'(a) = -\frac{a}{1+a^2}\theta(a) < 0.$$

La courbe représentative de cette fonction est donc analogue à celle de la fonction θ.

5° Il s'agit de calculer

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{L}\frac{\pi\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{2\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}} = \mathrm{L}\left[\frac{1}{\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right]$$

$$= \mathrm{L}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\right] = \mathrm{L}\frac{3}{2}$$

$$= \frac{\log_{10}3 - \log_{10}2}{\log_{10}e} = \frac{0,477 - 0,301}{0,434} = \frac{0,176}{0,434} = 0,405.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1966.

(1903, p. 143.)

Soit a un nombre positif donné; on pose

$$u_0 = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}, \qquad u_1 = \frac{u_0}{(1-u_0)^2}, \qquad \ldots,$$

$$u_n = \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a}, \qquad \ldots.$$

Démontrer que pour n infini

$$\lim u_n = \frac{1}{a+1}.$$

MAILLARD.

SOLUTION

Par M. R. CARDELOPPI.

1° On a, quel que soit n,

$$(1) \qquad 0 < u_n < \frac{1}{a+1}.$$

En effet, cette double inégalité est vérifiée pour $n=0$; supposé qu'elle le soit jusqu'à une certaine valeur de n, établissons-la pour la valeur immédiatement supérieure. On a

$$u_{n+1} = \frac{u_0}{(1-u_n)^a}.$$

Comme u_n est <1 d'après (1) on voit d'abord que u_{n+1} est positif. Il faut ensuite démontrer que l'on a

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-u_n)^a} < \frac{1}{a+1}$$

ou

$$\frac{a}{a+1} < 1 - u_n,$$

ce qui résulte de la deuxième inégalité (1).

2° On voit encore, par récurrence, que

$$u_{n+1} > u_n;$$

en effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{u_0}{(1-u_n)^a} > \frac{u_0}{(1-u_{n-1})^a},$$

ou

$$u_n > u_{n-1}.$$

D'autre part, elle est vérifiée pour $n=0$; donc, etc.

3° La suite des u étant, d'après ce qui précède, bornée et croissante, u_n tend vers une limite λ que l'on déterminera en écrivant qu'elle satisfait à l'équation

$$\lambda = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}} \frac{1}{(1-\lambda)^a},$$

ou

$$\lambda(1-\lambda)^a = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}},$$

qui admet la racine (double) $\lambda = \frac{1}{a+1}$ dans l'intervalle de 0 à 1 et n'en admet pas d'autre. La proposition énoncée est donc bien établie.

[P¹2a]

SUR UNE CERTAINE CLASSE DE COURBES ET DE SURFACES;

Par M. Ch. FRANÇOIS.

1. Proposons-nous de déterminer les surfaces jouissant de la propriété suivante : *En un point quelconque* M (x, y, z) *de la surface, menons le plan tangent* μ, *qui intercepte sur les axes coordonnés* Ox, Oy, Oz, *des longueurs* $OA = \xi$, $OB = \eta$, $OC = \zeta$, *telles qu'on ait*

$$(1) \qquad \frac{\xi}{x} = a_1, \qquad \frac{\eta}{y} = b_1, \qquad \frac{\zeta}{z} = c_1,$$

a_1, b_1, c_1 *étant des constantes*. Celles-ci doivent vérifier la relation

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1} = 1,$$

car les coordonnées du point M satisfont à l'équation du plan μ, qui est

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 1.$$

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface cherchée. Celle du plan μ est

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0,$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes; on en déduit

$$\xi = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_x}, \qquad \eta = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_y}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_z};$$

d'où

$$F'_x = \frac{\Sigma x F'_x}{a_1 x}, \qquad F'_y = \frac{\Sigma x F'_x}{b_1 y}, \qquad F'_z = \frac{\Sigma x F'_x}{c_1 z}.$$

Substituons ces valeurs de F'_x, F'_y, F'_z dans l'équation

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{a_1 x} + \frac{dy}{b_1 y} + \frac{dz}{c_1 z} = 0;$$

en intégrant, il vient

$$\frac{1}{a_1}\,lx + \frac{1}{b_1}\,ly + \frac{1}{c_1}\,lz = lm,$$

m étant une constante.

L'équation de la surface cherchée est donc

$$x^{\frac{1}{a_1}}\,y^{\frac{1}{b_1}}\,z^{\frac{1}{c_1}} = m,$$

pour laquelle nous mettrons encore

$$x^a y^b z^c = m, \tag{2}$$

en représentant par a, b, c les quantités $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{c_1}$. Nous aurons maintenant la relation constante

$$a + b + c = 1.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (2), même lorsque $a + b + c \neq 1$, à condition que cette expression ne soit pas nulle, représente une surface telle que les rapports entre les coordonnées à l'origine d'un plan tangent quelconque aux coordonnées correspondantes du point de contact sont égaux à $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$. On est ramené au cas précédent en remarquant que si $a + b + c = K \neq 0$, on peut écrire, au lieu de $x^a y^b z^c = m$, l'équation $x^{\frac{a}{K}} y^{\frac{b}{K}} z^{\frac{c}{K}} = m^{\frac{1}{K}}$, de telle sorte que la somme des exposants est maintenant égale à l'unité.

2. Considérons l'ensemble des valeurs rationnelles de a, b, c satisfaisant à la relation $a + b + c = 1$. Celle-ci ne peut être vérifiée en nombres entiers qu'en attribuant à l'un au moins de ses termes des valeurs négatives. Généralement a, b, c seront donnés sous forme de fractions irréductibles et l'on pourra écrire

$$a = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad b = \frac{\beta}{\mu}, \qquad c = \frac{\gamma}{\nu},$$

les deux termes de ces fractions étant des entiers quelconques, mais satisfaisant à $\Sigma \frac{\alpha}{\lambda} = 1$. Pour tout dénominateur pair, la variable correspondante sera affectée d'un double signe.

Si λ, μ, ν sont impairs, les deux surfaces représentées par $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont distinctes et symétriques par rapport à l'origine.

Soit n le plus petit commun multiple de λ, μ, ν et posons

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{r_1}{n}, \qquad \frac{\beta}{\mu} = \frac{r_2}{n}, \qquad \frac{\gamma}{\nu} = \frac{r_3}{n}.$$

On a aussi $\Sigma r = n$. Si n est pair, le nombre des quantités r impaires sera égal à 0 ou à 2. Ce nombre ne sera toutefois pas égal à zéro, car on vérifie que, dans ce cas, n n'est pas le plus petit commun multiple des quantités λ, μ, ν, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc deux des quantités r et deux seulement seront impaires; la troisième sera nécessairement paire. Supposons que r_1 et r_2 soient les numérateurs impairs; il est clair que λ et μ seront pairs et contiendront 2 le même nombre de fois en facteur. Quant au dénominateur ν, il pourra être pair ou impair. Il s'ensuit qu'il ne pourra y avoir que 0, 2 ou 3 doubles signes.

Si λ et μ sont pairs et ν impair, nous écrirons la formule fondamentale $x^a y^b z^c = m$ sous la forme

$$(\pm \sqrt[k]{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}})\, z^c = m,$$

avec

$$(3) \quad \lambda = kh, \qquad \mu = kl, \qquad k = 2^u, \qquad \alpha_1 = \alpha : h, \qquad \beta_1 = \beta : l$$

u étant un entier positif et h, l des entiers impairs et positifs. On voit que x et y pourront prendre simultanément des valeurs positives ou négatives. Si m est positif, on devra combiner ensemble des valeurs de même signe du radical et de z^c; si m est négatif, on combinera ensemble des valeurs du radical et de z^c de signe contraire. En particulier, si γ est pair, le radical sera de même signe que m. Dans tous les cas, les surfaces définies par $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont identiques.

Si λ, μ, ν sont pairs, nous écrirons

$$(\pm \sqrt[k]{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}})(\pm \sqrt[t]{z^{\gamma_1}}) = m,$$

en posant les relations (3) et en outre

$$\nu = tb, \qquad t = 2^v, \qquad \gamma_1 = \gamma : b,$$

v étant un entier positif et b un entier impair et positif; γ est d'ailleurs, dans le cas considéré, toujours impair. Le premier membre de l'équation précédente sera réel, dans tous les cas suivants : 1° $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$; 2° $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$; 3° $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$; 4° $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$. On voit aussi que les deux expressions $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ définissent la même surface.

Nous arrivons finalement à cet énoncé : Si n est impair, les deux surfaces d'équations $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont distinctes; si n est pair, elles sont identiques.

3. Désignons les surfaces (2) par la lettre S. Lorsque m varie, les surfaces S qu'on obtient sont coupées par une droite menée par l'origine O, en des points tels que les plans tangents correspondants sont parallèles. Cette propriété résulte immédiatement de la définition de ces surfaces.

Les formules (1) admettent l'interprétation suivante :

Le point de contact M *d'un plan tangent est le centre de gravité des masses* $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{c_1}$, *attachées aux points où ce plan rencontre les axes.*

A un plan μ dont les coordonnées à l'origine sont ξ' η, ζ, faisons correspondre le point N de coordonnées ξ, η, ζ; nous dirons que le point N est le transformé crucial du plan μ, que le plan μ est le transformé souscrucial du point N ([1]).

Si le plan μ touche la surface S au point M (x, y, z), les points M et N sont liés par les formules (1) qu'on peut écrire

$$(4) \qquad x = a\xi, \qquad y = b\eta, \qquad z = c\zeta.$$

On voit que les points M, N se correspondent dans une *transformation affine.*

La surface $x^a y^b z^c = m$, où l'on suppose $a + b + c = 1$, se change, par cette transformation, en la surface

$$\xi^a \eta^b \zeta^c = \frac{m}{a^a b^b c^c}.$$

Ce résultat pourrait s'énoncer ainsi : Les surfaces comprises dans l'équation $x^a y^b z^c = m$, où a, b, c sont

---

([1]) *Voir*, pour la transformation cruciale, nos Mémoires : *Sur une certaine transformation et son inverse* (*Mathesis*, octobre 1909); *Étude sur la transformation cruciale* (*Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3e série, t. IX, 1910).

fixes et m variable, forment un *groupe* relativement à la transformation (4) appliquée plusieurs fois de suite. Car la $r^{\text{ième}}$ transformée a pour équation

$$\xi^a \eta^b \zeta^c = \frac{m}{(a^a b^b c^c)^r}. \tag{5}$$

Considérons deux cas particuliers remarquables :

1° La *surface asymptote* $xyz = m$

$$\left(\text{ou } x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{1}{3}}\right)$$

a pour $r^{\text{ième}}$ transformée affine $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{1}{3}} 3^r$. M est le centre des médianes du triangle ABC; le $r^{\text{ième}}$ transformé de M a pour coordonnées $3^r x$, $3^r y$, $3^r z$; M et ses transformés successifs sont donc situés sur une même droite passant par l'origine.

2° L'équation $xyz^{-1} = m$ représente un paraboloïde hyperbolique. La première transformée de cette quadrique a pour équation $xyz^{-1} = -m$; elle est symétrique de la surface primitive par rapport à l'origine. La seconde transformée coïncide avec la surface primitive et ainsi de suite.

4. L'équation du plan tangent μ au point $M(x, y, z)$ de la surface $x^a y^b z^c = m$, est, si $a + b + c = 1$,

$$\frac{aX}{x} + \frac{bY}{y} + \frac{cZ}{z} = 1. \tag{6}$$

Si ce plan doit passer par un point donné P (X, Y, Z), l'équation précédente, où x, y, z sont des coordonnées courantes, représente, une surface cubique, lieu des points de contact des plans tangents menés par P aux surfaces S contenues dans l'équation $x^a y^b z^c = m$, où m est un paramètre variable.

Le lieu des points de contact des plans tangents, menés par P à une même surface de ce système, est la courbe représentée par les deux équations

$$x^a y^b z^c = m, \qquad \frac{a\mathrm{X}}{x} + \frac{b\mathrm{Y}}{y} + \frac{c\mathrm{Z}}{z} = 1.$$

En appliquant ces considérations à la surface asymptote, on voit que la courbe de contact du cône circonscrit de sommet P(X, Y, Z) est représentée par les équations

$$xyz = m, \qquad \frac{\mathrm{X}}{x} + \frac{\mathrm{Y}}{y} + \frac{\mathrm{Z}}{z} = 3,$$

dont la dernière, simplifiée au moyen de la précédente, donne $\Sigma \mathrm{X}yz = 3m$. Cette courbe est donc située sur un hyperboloïde et les axes coordonnés sont des génératrices du cône asymptote.

5. Soit à déterminer la trajectoire orthogonale de l'ensemble des surfaces $x^a y^b z^c = m$, où m est variable. On a les équations

$$\frac{x\,dx}{a} = \frac{y\,dy}{b} = \frac{z\,dz}{c},$$

qui, intégrées, donnent

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a} = \frac{z^2}{b} + \mathrm{A}, \qquad \frac{y^2}{b} = \frac{z^2}{c} + \mathrm{B}.$$

A et B sont deux constantes arbitraires. Les équations (7) définissent deux cylindres du second degré; leur intersection est donc une quartique. Si $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, les équations intégrales sont

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \pm \frac{y}{\sqrt{b}} = \pm \frac{z}{\sqrt{c}};$$

elles représentent quatre droites réelles passant par l'origine, si a, b et c sont de même signe; l'origine correspond à $m = 0$ ou $m = \infty$ suivant les signes de a, b, c.

Si m est fixe et que, c étant donné, b est le paramètre variable et a une fonction donnée de b, $a = \varphi(b)$, la trajectoire sera définie par

$$(8) \qquad \frac{x\,dx}{\varphi(b)} = \frac{y\,dy}{b} = \frac{z\,dz}{c}.$$

6. Reprenons la relation $x^a y^b z^c = m$. Supposons d'abord que l'un des exposants soit nul. La surface correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à un axe coordonné. Si $a + b + c = 0$, l'équation $x^a y^b = m z^{a+b}$ représente un cône de sommet O. Dans l'un et l'autre cas, le point de contact d'un plan tangent est indéterminé. Dans ce qui suit, nous écarterons ces deux cas exceptionnels.

L'intersection de deux surfaces S, données par $x^a y^b z^c = m$ et $x^{a'} y^{b'} z^{c'} = m'$ est une courbe que nous désignerons en général par Γ. Cette intersection appartient également à chacune des surfaces S définies par

$$(9) \qquad x^{a+na'} y^{b+nb'} z^{c+nc'} = m m'^n,$$

où n est un paramètre variable. Disposons de n afin d'avoir

$$\Sigma(a + na') = 0 \qquad \text{ou} \qquad n = -\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}.$$

La surface correspondante, dont l'équation est de la forme

$$(10) \qquad x^{a''} y^{b''} = m'' z^{a''+b''},$$

est un cône Δ centré à l'origine. Un tel cône est déterminé par deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) non collinéaires avec O; car de (10) on déduit

$$a''(lx_i - lz_i) + b''(ly_i - lz_i) - lm'' = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

et de ces formules, les rapports $a'' : b'' : lm''$ qui suffisent pour déterminer Δ.

Cette conclusion subsiste dans le cas où le déterminant

$$\begin{vmatrix} lx_1 - lz_1 & ly_1 - lz_1 \\ lx_2 - lz_2 & ly_2 - lz_2 \end{vmatrix}$$

est nul. Dans ce cas, on a $lm'' = 0$, $m'' = 1$ et a'', b'' sont encore proportionnels à deux nombres donnés.

Considérons la relation

$$x^{a+na'} y^{b+nb'} z^{c+nc'} = \mathrm{M}, \tag{11}$$

où n et M sont donnés, et écrivons l'équation du plan tangent en un point de coordonnées (x, y, z) à la surface correspondante

$$\sum \frac{a}{x}(\mathrm{X} - x) + n \sum \frac{a'}{x}(\mathrm{X} - x) = 0. \tag{12}$$

D'où l'énoncé :

Par un point donné (x, y, z) de l'espace, on peut faire passer une infinité de surfaces de la famille (11), *où n et M sont des paramètres indéterminés; tous les plans tangents en ce point à ces surfaces passent par une même droite.*

Les deux surfaces $x^a y^b z^c = m$ et $x^b y^a z^c = m$, où nous supposons m positif, sont symétriques par rapport au plan bissecteur passant par Oz, dans le trièdre positif; l'intersection est une courbe plane située dans ce plan et ses projections sur les plans zOx, zOy sont données par $x^{a+b} z^c = m$, $y^{a+b} z^c = m$.

L'intersection dépend donc de $a + b$ et de m. Donc :

Toutes les surfaces S de paramètre m, donnant à $a + b$ la même valeur, passent par une même courbe plane.

Cette conclusion se généralise aisément.

7. Soient A_1, A_2, A_3 trois points de l'espace et (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point $A_i (i = 1, 2, 3)$. Proposons-nous de faire passer une surface S par ces trois points. Soit $x^a y^b z^c = m \, (a + b + c = 1)$ l'équation de cette surface, où a, b, m sont inconnus. On peut encore l'écrire

$$a(lx - lz) + b(ly - lz) + lz = lm,$$

et en remarquant qu'elle doit être vérifiée par les coordonnées des points A_1, A_2, A_3

$$(13) \quad a(lx_i - lz_i) + b(ly_i - lz_i) - lm = -lz_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

d'où

$$(14) \qquad a = \frac{A}{D}, \qquad b = \frac{B}{D}, \qquad c = \frac{C}{D},$$

avec

$$(15) \quad \begin{cases} A = | \; -lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -1 \; |, \\ B = | \; lx_i - lz_i \quad -lz_i \quad -1 \; |, \\ C = | \; lx_i - lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -lz_i \; |, \\ D = | \; lx_i - lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -1 \; |. \end{cases}$$

Si les quatre déterminants précédents sont différents de zéro, les valeurs de a, b, lm sont bien déterminées et ces quantités définissent entièrement la surface S passant par A_1, A_2, A_3. Si $A = 0$, la surface S correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x, et dont la section par le plan des yz a une équation de la forme $z = Cy^v$; un raisonnement analogue s'applique au cas où $B = 0$. Si $D = 0$, la surface S passant par A_1, A_2, A_3 est un cône Δ.

Les égalités $A = B = 0$ ont pour conséquence $C = D = 0$. Ce cas se présente quand les trois points donnés se trouvent sur une même courbe Γ. Les valeurs de a, b, lm sont alors indéterminées. D'où le théorème :

Une surface S *est complètement déterminée par trois points distincts lorsque ceux-ci ne se trouvent pas sur une même courbe* Γ.

8. De l'équation (9), si l'on pose successivement $b + nb' = 0$, $c + nc' = 0$, on déduit les équations de deux projections de Γ. Celles-ci sont de la forme

$$z = Cx^{v}, \qquad y = Dx^{w},$$

où C, D, v, w sont des constantes. Posons $x = C_1\lambda^{a_1}$, λ étant un paramètre variable. On pourra définir toute courbe Γ par trois équations paramétriques telles que

$$(16) \qquad x = C_1\lambda^{a_1}, \qquad y = C_2\lambda^{a_2}, \qquad z = C_3\lambda^{a_3},$$

les C_i et a_i étant des constantes.

Le plan osculateur en un point (x, y, z) d'une courbe Γ a pour équation

$$\Sigma(X - x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) = \Sigma(X - x)\lambda^{a_2+a_3-3}K_1 = 0,$$

les K_i étant des constantes appropriées. Cette relation peut s'écrire

$$\sum \frac{X}{x} K_1 C_1 = \Sigma_1 C_1.$$

L'examen de cette équation nous conduit à l'énoncé suivant :

Si A, B, C *sont les segments interceptés sur les axes par le plan osculateur en un point* M(a, b, c) *d'une courbe* Γ, *on a les relations*

$$\frac{A}{a} = C'_1, \qquad \frac{B}{b} = C'_2, \qquad \frac{C}{c} = C'_3,$$

C'_1, C'_2, C'_3 *étant indépendants de la position de* M *sur* Γ.

Inversement, considérons un plan

$$(17) \qquad Mx + Ny + Pz = 1,$$

dont les coefficients de l'équation sont des fonctions inconnues d'un paramètre variable t. Supposons qu'on ait en tout point (x, y, z) de l'arête de rebroussement d de la développable décrite par ce plan

$$(18) \qquad Mx = A_1, \qquad Ny = A_2, \qquad Pz = A_3.$$

M, N, P étant les coefficients de l'équation du plan passant par (x, y, z) et A_1, A_2, A_3 des constantes. Il s'ensuit que les plans osculateurs de d jouissent de la même propriété que ceux des courbes Γ.

On peut alors démontrer que d est nécessairement située sur une surface S. En effet, d est donnée par (17) et

$$(19) \qquad M'x + N'y + P'z = 0, \qquad M''x + N''y + P''z = 0,$$

en désignant par M', M'', ... les dérivées des coefficients par rapport à t. En faisant usage des relations (18), on peut écrire les équations (19)

$$\Sigma A_1 \frac{dx}{x} = 0, \qquad \Sigma A_1 \left(\frac{dx}{x}\right)^2 = 0,$$

dont la première, intégrée, donne

$$(20) \qquad \Sigma A_1 lx = lm \qquad \text{ou} \qquad x^{A_1} y^{A_2} z^{A_3} = m,$$

m étant une constante arbitraire; d est donc bien tracée sur la surface S définie par (20).

On a aussi cet énoncé qui se démontre directement :

« Si l'on applique la transformation cruciale à une courbe Γ donnée par (16), on change celle-ci en une autre courbe du même genre ne différant de la première que par la valeur des constantes C_1, C_2, C_3. »

9. L'équation des surfaces orthogonales aux courbes Γ définies par les équations (16), où C_1, C_2, C_3 sont variables et a_1, a_2, a_3 constants, satisfait aux relations

$$p = -\frac{a_1 x}{a_3 z}, \qquad q = -\frac{a_2 y}{a_3 z}.$$

Portons ces valeurs de p et q dans la formule

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

on obtient l'équation $\Sigma a_1 x\,dx = 0$, dont l'intégrale définit un système de quadriques centrées à l'origine.

De même, si a_1, a_2, a_3 sont variables et C_1, C_2, C_3 constants, on aura

$$p = -\frac{x\,l\left(\frac{x}{C_1}\right)}{z\,l\left(\frac{z}{C_3}\right)}, \qquad q = -\frac{y\,l\left(\frac{y}{C_2}\right)}{z\,l\left(\frac{z}{C_3}\right)}$$

et

$$x\,l\left(\frac{x}{C_1}\right)dx + y\,l\left(\frac{y}{C_2}\right)dy + z\,l\left(\frac{z}{C_3}\right)dz = 0;$$

cette dernière équation a pour intégrale

$$(21) \qquad \Sigma\, l\left(\frac{x}{C_1}\right)x^2 = \Sigma\, C_1 \frac{x^2}{2} + \text{const.}$$

10. La forme spéciale des équations paramétriques des courbes Γ permet d'énoncer certains théorèmes assez élégants relatifs à la courbure de ces lignes. Si ρ est le rayon de courbure en un point M de la courbe Γ définie par

$$(22) \qquad x = C_1 \lambda^{a_1}, \qquad y = C_2 \lambda^{a_2}, \qquad z = C_3 \lambda^{a_3},$$

on pourra écrire

$$(23) \qquad \rho = \frac{[\Sigma a_1^2 x^2]^{\frac{3}{2}}}{[\Sigma a_2^2 a_3^2 (a_3 - a_2)^2 y^2 z^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

L'examen de cette équation conduit aux énoncés suivants :

1° Dans toute courbe Γ, les points possédant le même rayon de courbure en valeur absolue sont situés aux intersections de cette courbe avec une surface du sixième ordre passant par l'origine.

2° Cette surface est la même pour toutes les courbes Γ ne différant entre elles que par les valeurs de C_1, C_2, C_3, à condition de définir *a priori* la valeur attribuée à ρ.

3° Si l'on considère toutes les courbes Γ passant par un point donné, il en existe une infinité possédant en ce point le même rayon de courbure en valeur absolue. Toute surface S passant par le point donné, contient au plus six de ces courbes.

On a aussi ce théorème qui se démontre facilement :

« Dans toute surface S, l'ensemble des points où la surface a la même courbure se trouve à l'intersection de S avec une surface du huitième ordre. Cette dernière est la même pour toutes les surfaces S ne différant l'une de l'autre que par la valeur de m. »

11. Toute courbe Γ est définie complètement par deux points réels et distincts. Si Γ a deux points communs avec une surface S, elle est entièrement contenue dans S; car, par ces deux points, on peut faire passer une surface S_1, qui coupera S suivant une courbe Γ'; Γ' passant par les deux points en question, on aura $\Gamma \equiv \Gamma'$.

Recherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe Γ donnée par (22) soit contenue dans la surface $x^a y^b z^c = m$. On a évidemment

$$C_1^a C_2^b C_3^c = m, \qquad a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = 0.$$

Considérons maintenant les expressions suivantes :

$$(24)\quad x = C_1\lambda^{a_1}\mu^{b_1}, \qquad y = C_2\lambda^{a_2}\mu^{b_2}, \qquad z = C_3\lambda^{a_3}\mu^{b_3},$$

où λ, μ sont des paramètres variables et les a_i, b_i, c_i des constantes. Ces relations définissent une surface S; c'est ce qu'on vérifie en partant de l'équation du plan tangent, mise sous la forme

$$\Sigma(X - x)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Cette surface coïncidera avec la surface $x^a y^b z^c = m$, si l'on a les relations

$$C_1^a C_2^b C_3^c = m, \qquad aa_1 + ba_2 + ca_3 = 0, \qquad ab_1 + bb_2 + cb_3 = 0.$$

Donc, en astreignant les a_i et b_i à satisfaire aux relations précédentes, on obtient les équations paramétriques de la surface S. Celle-ci est rapportée aux coordonées λ, μ.

12. On peut encore arriver à ce résultat en appliquant, après les avoir transformées, certaines considérations dues à Lie et à Klein. Considérons, en effet, les relations

$$x = x_0\lambda^{a_1}\mu^{b_1}, \qquad y = y_0\lambda^{a_2}\mu^{b_2}, \qquad z = z_0\lambda^{a_3}\mu^{b_3},$$

où λ, μ sont des paramètres variables et x_0, y_0, z_0 ainsi que les a_i et b_i, des constantes. Cherchons la surface décrite par le point x, y, z lorsque λ et μ varient. On a d'abord

$$x = x_0(1 + \lambda - 1)^{a_1}(1 + \mu - 1)^{b_1}, \qquad \ldots.$$

Si l'on suppose que λ et μ diffèrent peu de l'unité, c'est-à-dire que $x - x_0 = dx$ soit une petite quantité du premier ordre, il viendra, en négligeant les quantités d'ordre supérieur et en posant $d\lambda = \lambda - 1$, $d\mu = \mu - 1$,

$$x = x_0(1 + a_1\, d\lambda)(1 + b_1\, d\mu), \qquad \ldots,$$

d'où

$$dx = x_0(a_1\, d\lambda + b_1\, d\mu), \qquad \ldots,$$

et, en éliminant $d\lambda$ et $d\mu$,

$$(25) \qquad \left| \frac{dx}{x_0} \quad -a_1 \quad -b_1 \right| = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle d'une surface S.

13. En un point M (λ, μ) d'une telle surface, l'angle des lignes coordonnées est donné par

$$(26) \qquad \cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\Sigma a_1 b_1 x^2}{\sqrt{\Sigma a_1^2 x^2 \Sigma b_1^2 x^2}}.$$

On déduit de cette équation que le lieu des points pour lesquels $\cos\alpha$ est le même en module est donné par l'intersection de la surface $x^a y^b z^c = m$ avec une surface du quatrième ordre. Celle-ci est la même pour toutes les surfaces S ne différant l'une de l'autre que par la valeur attribuée à m. On voit aussi que si les trois produits $a_i b_i (i = 1, 2, 3)$ sont de même signe, il n'existera aucun point pour lequel les lignes coordonnées sont orthogonales. Dans le cas contraire, ces points seront situés sur une courbe gauche, intersection de la surface S et d'un cône du second ordre.

Nos lignes coordonnées seront conjuguées si la relation bien connue

$$\pm \left| \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\, \partial\mu} \quad \frac{\partial y}{\partial\mu} \quad \frac{\partial z}{\partial\lambda} \right| = 0$$

est vérifiée. Dans le cas qui nous occupe, il suffira de disposer des a_i et b_i pour satisfaire à l'égalité

$$| \, a_1 b_1 \quad a_1 \quad b_1 \, | = 0.$$

[L¹2c]

SUR LES COURBES AUTOPOLAIRES;

PAR M. RENÉ BÉRARD.

Dans le numéro de décembre 1913, M. Myller a établi par le calcul certaines propriétés des courbes autopolaires ; je vais reprendre la question au point de vue géométrique.

1. Soient (S) une conique donnée et (Σ) une conique autopolaire par rapport à (S) ; il est d'abord évident que les deux coniques doivent être bitangentes. Soient A et B les contacts, C le pôle de AB, M un point quelconque de (Σ) et P le pôle de la sécante CMN.

Considérons le faisceau des coniques bitangentes à (S) en A et B ; les polaires d'un point quelconque par rapport à ces coniques passent par un point fixe de AB. Pour le point M, ces polaires passeront par le point P ; si donc (Σ) est autopolaire par rapport à (S), la polaire de M relative à (S) devant être tangente à (Σ) et passer par P sera la droite PN.

Considérons maintenant dans le faisceau les quatre coniques suivantes : (S), (Σ) la conique formée des droites CA, CB et la conique formée par la droite double AB ; leur rapport anharmonique est égal à celui des polaires du point M, les droites PN, PM, PC, PA. Or, ces quatres droites forment un faisceau harmonique ; donc *le rapport anharmonique des quatre coniques considérées est égal à* — 1 *et réciproquement, si ce rapport anharmonique est égal à* — 1,

(Σ) *est une conique autopolaire*, car la polaire de M par rapport à (S) sera la droite PN.

Ceci nous montre que, *si la conique* (Σ) *est autopolaire par rapport à* (S), *réciproquement* (S) *est autopolaire par rapport à* (Σ).

Il en résulte aussi un moyen commode d'écrire l'équation de la conique (Σ).

Soient $f(x, y) = 0$ l'équation de (S) et x_0, y_0 les coordonnées du point C; l'équation générale des coniques bitangentes à (S) en A et B est

$$(1) \qquad f(x, y) + \lambda(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 = 0.$$

Les valeurs de λ correspondant aux coniques (S), (AB, AB), (CA, CB) sont

$$0, \quad \infty, \quad -\frac{1}{4f(x_0, y_0)};$$

en écrivant que le rapport anharmonique

$$\left[0, \quad \lambda, \quad \infty, \quad -\frac{1}{4f(x_0, y_0)}\right] = -1,$$

on obtient

$$\lambda = -\frac{1}{2f(x_0, y_0)},$$

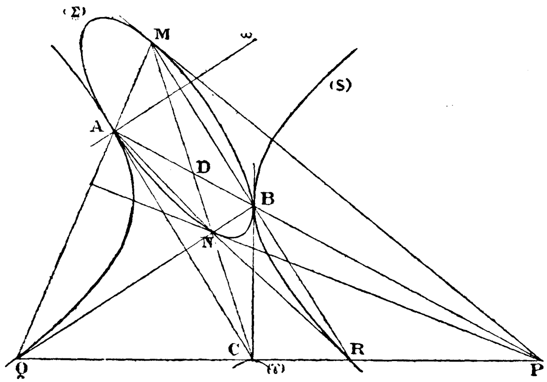
et l'équation de (Σ) est

$$(2) \qquad 2f(x, y)f(x_0, y_0) - (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 = 0.$$

2. Soit ω le centre de courbure au point A d'une conique du faisceau (1); on voit de suite qu'il existe, en ce point, une relation homographique entre λ et y'' et par suite entre λ et le rayon de courbure $\overline{A\omega}$. Le rapport anharmonique de quatre coniques du faisceau est donc égal à celui de leurs rayons de courbure au point A; or, pour la conique (CA, CB), ce rayon de courbure est infini et pour la droite double AB il est

nul. Donc les rayons de courbure au point A de la conique (S) et de la conique autopolaire (Σ) sont égaux et opposés.

3. Soit D le point de rencontre de AB et MN; C et D sont conjugués par rapport à (S), et il en est de



même pour les points M et N; en outre C et D divisent harmoniquement MN.

Par suite, étant donnés deux points M et N conjugués par rapport à (S), on pourra construire les points C et D qui sont points homologues dans deux involutions connues; en les joignant au pôle P de MN, on aura les deux sécantes PAB et PQR. Il existe une conique et une seule bitangente à (S) en A et B et autopolaire par rapport à (S); elle coupe CD en deux points conjugués par rapport à (S) et conjugués harmoniques par rapport à C, D; ce sont donc les points M et N. De même, il existe une seconde conique passant par M et N, bitangente à (S) en Q et R et autopolaire.

Ainsi, *par deux points conjugués par rapport à* (S), *on peut faire passer deux coniques autopolaires par rapport à* (S) *et bitangentes en ces deux points.*

4. Soient M' le point de rencontre de QA et RB, N' le point de rencontre de QB et RA ; ces deux points sont situés sur la polaire de P par rapport à (S). Ils sont conjugués par rapport à cette conique et divisent harmoniquement CD ; par suite, M' et N' coïncident avec M et N. La conique autopolaire (Σ) peut donc être engendrée de la façon suivante :

Une sécante pivote autour d'un point C *pôle de* AB *et coupe* (S) *aux points* Q *et* R ; *le lieu du point de rencontre de* QA *et* RB *est une conique autopolaire par rapport à* (S).

Nous avons vu que, par deux points M et N conjugués par rapport à (S), on peut faire passer deux coniques autopolaires (Σ) et (Σ') bitangentes entre elles en M et N et bitangentes à (S), l'une en A et B, l'autre en Q et R. Si l'on voulait construire la conique autopolaire à (Σ') et tangente à celle-ci en M et N, le mode de génération que l'on vient d'indiquer, montre qu'elle passerait par les points A et B ; c'est donc la conique (Σ).

Ainsi, *chacune des coniques* (S), (Σ), (Σ') *est autopolaire par rapport à chacune des deux autres.*

5. Faisons décrire au point C une courbe quelconque (γ) ; on sait que l'enveloppe de la conique (Σ) est une courbe (C) autopolaire par rapport à (S) [outre la conique (S) elle-même]. Soient M et N les points de contact de (Σ) avec l'enveloppe (C) ; la polaire de M par rapport à (S) est tangente à (Σ) au point N, de sorte que la droite MN passe par le point C.

Soit P le pôle de MN ; je vais montrer que PC est la tangente en C à la courbe (γ).

En effet, soient C_1 un autre point de (γ), (Σ_1) la conique autopolaire correspondante tangente à (S) en A_1

et B_1. Deux des sécantes communes à (Σ) et (Σ_1) passent par le point de rencontre D_1 de AB et A_1B_1 et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces deux droites; lorsque C_1 tend vers C, l'une de ces sécantes a pour limite la droite AB et l'autre la droite MN.

Le point de rencontre D de MN et AB est donc la position limite du point D_1 ; or, D_1 est le pôle de CC_1 par rapport à (S). Donc D est le pôle de la tangente en (C) à la courbe (γ) ; cette tangente est donc la droite PC.

De là résulte la construction des points M et N qui a été indiquée par M. Myller.

On peut aussi construire ces points comme il suit :

On mène la tangente en C à (γ) qui rencontre AB au point P ; on construit la polaire CD de P par rapport à (S). Les points de contact de (Σ) avec son enveloppe (C) sont les points M et N qui divisent harmoniquement CD et sont conjugués par rapport à (S).

Ainsi prenons pour la courbe (γ) une conique autopolaire, soit (Σ). A un point M de cette conique correspond une conique autopolaire (K) et ce qui précède montre que cette conique doit passer par les points C et D. L'enveloppe de (K) se compose de (S), du point C et de la droite AB; toutes les coniques (K) passent donc par un point fixe C lorsque M décrit (Σ). Ceci est d'ailleurs évident si l'on remarque que l'équation (2) ne change pas si l'on permute x et x_0, y et y_0.

Si donc on veut construire une conique autopolaire (Σ) passant par deux points donnés M et M_1, on construira les coniques autopolaires (K) et (K_1). Le point C sera un point d'intersection de ces coniques; il y a donc en général quatre solutions.

Appelons α le point de rencontre de AB avec MM_1 ; ce point a même polaire par rapport à (S) et (Σ). Donc, en appelant β le point de rencontre de cette polaire avec MM_1, on voit que les points α et β sont déterminés puisqu'ils sont conjugués par rapport à (S) et divisent harmoniquement MM_1.

Le point C est assujetti à se trouver sur l'une des droites Δ, Δ' polaires de α, β par rapport à (S); on cherchera donc les points d'intersection de ces droites avec l'une des coniques (K), (K_1).

Comme la conique (K) est engendrée par le point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour sommets les contacts des tangentes à (S) issues du point M, on pourra construire le point C à l'aide de constructions connues faites avec la règle et le compas.

Lorsque M et M_1 sont conjugués par rapport à (S), les deux coniques (K) et (K_1) sont bitangentes, la droite joignant les contacts étant la droite MM_1.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux points pesants, ayant chacun une masse égale à l'unité, sont reliés par un fil élastique de masse négligeable.*

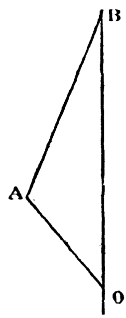
Lorsque le fil n'est pas tendu, sa longueur naturelle est a; s'il est tendu, de manière à prendre la longueur l ($l > a$) sa tension est égale à $\frac{1}{2}(l - a)$.

On place le fil verticalement, et on le tend de manière à lui donner la longueur $2a$; puis, le point placé le plus haut étant maintenu fixe, on imprime à l'autre point une vitesse horizontale ω, et l'on abandonne le système aux forces qui le sollicitent.

Étudier le mouvement que prend le système.

Nota. — *S'il arrive que le fil reprenne la longueur a, il sera inutile de poursuivre l'étude du mouvement.*

Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA, *de longueur* r, *tourne autour du point* O *avec la vitesse angulaire* ω. *Elle est articulée en* A *avec une bielle* AB *de lon-*



gueur l $(l > r)$, *dont l'extrémité* B *glisse sans frottement sur une droite fixe* Ox.

1° *Calculer la vitesse du point* B, *lorsque la manivelle fait l'angle* α *avec* Ox.

2° *On suppose que la manivelle ait une longueur de* 1^{dm}, *et fasse* 1000 *tours à la minute, et l'on demande de calculer la longueur de la bielle ainsi que la valeur de la vitesse maximum du point* B *sur* Ox, *sachant que cette vitesse maximum est atteinte pour un angle* α *dont la tangente a pour valeur* 2. (Juin 1912.)

Nancy.

Épreuve théorique. — *Une barre rigide homogène* AB *de longueur* $2l$ *et de masse* M *est mobile dans un plan horizontal* π; *l'une de ses extrémités* A *ne peut quitter une droite donnée* (d) *de ce plan* π.

A l'instant initial, la barre A_0B_0 *est inclinée de* 30° *sur* (d) *et elle est au repos. On lui imprime une percussion* B_0P_0 *appliquée en* B_0, *située dans le plan* π *et normale à la barre* A_0B_0 *dans le sens qui tend à augmenter l'angle aigu de* A_0B_0 *avec* (d).

On demande l'état initial des vitesses et la percussion de réaction en A_0.

L'extrémité B *de la barre* AB *est, à chaque instant t, attirée par la droite (d); la force d'attraction* BF *est, à chaque instant, perpendiculaire à (d); on désignera par* MK^2 *l'intensité de cette force à l'unité de distance de (d); l'intensité de* BF *est, à chaque instant, inversement proportionnelle au carré de la distance de* B *à (d) à cet instant.*

On suppose que l'intensité P_0 *de la percussion* B_0P_0 *est donnée par*

$$P_0 = \frac{2MK}{7}\sqrt{\frac{13}{l}}.$$

On demande quel sera le mouvement de la barre et quelle sera la réaction de (d) sur la barre en A?

Les frottements sont supposés nuls.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une sphère homogène pesante de* 5^{cm} *de rayon et de masse égale à* 1^{kg} *repose sur un plan horizontal rugueux; elle est mise en mouvement par un choc appliqué en un de ses points* B *dans une direction* DB *dont le prolongement rencontre le plan horizontal sous un angle de* 30°. *Le plan vertical* π, *mené par la droite* DB, *est à une distance* OO_1 *du centre de la sphère égale à* $2^{cm},5$; *la distance du point* O_1 *à la droite* DB *est aussi égale à* $2^{cm},5$.

On prendra pour plan des xz un plan vertical parallèle à DB, *pour axe des x une horizontale de ce plan, pour axe des z, une verticale de ce plan; l'axe des y est perpendiculaire au plan des xz.*

On suppose que les intensités F_x, F_y *des composantes de la percussion du frottement suivant les axes des x et des y sont liées à l'intensité* ϖ *de la percussion résultant du choc par les relations*

$$F_x = \frac{5+2\sqrt{3}}{14}\varpi, \qquad F_y = \frac{5}{28}\varpi.$$

On demande :

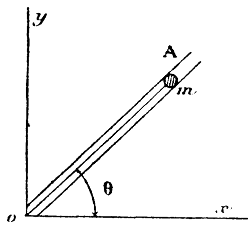
1° *D'exprimer les composantes* u_0, v_0, w_0 *de la vitesse* *initiale de* O *et les composantes* p_0, q_0, r_0 *de la vitesse angulaire initiale de la sphère autour de* O *au moyen de* ϖ *et de l'intensité de la percussion de réaction;*

2° *D'évaluer la vitesse initiale du point de contact de la sphère et du plan;*

3° *D'étudier le mouvement de la sphère sur le plan rugueux.* (Octobre 1911.)

Paris.

Épreuve théorique. — *Sur un plan horizontal fixe* xOy *peut glisser sans frottement un tube rigide rectiligne* OA, *de section infiniment petite, en tournant autour de son extrémité* O *qui est fixe; dans l'intérieur du tube, peut glisser sans frottement, un point matériel* m, *de même masse* m *que le tube attaché au point* O *par un fil élastique* Om, *dont on néglige la masse; la tension de ce fil*



est proportionnelle à son allongement, de telle sorte qu'en appelant a *la longueur naturelle du fil et* r, *sa longueur* Om *quand il est allongé, la valeur absolue de sa tension soit*

$$m\lambda(r-a) \quad \text{où} \quad r \geqq a,$$

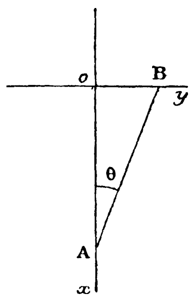
λ *désignant une constante positive.*

Trouver le mouvement de ce système, placé dans des conditions initiales quelconques, telles que la valeur initiale r_0 *de* r *soit supérieure à* a.

Notations. — *On appellera* mK^2 *le moment d'inertie du tube par rapport au point* O, θ *l'angle polaire* xOm, r'_0 *et* θ'_0 *les valeurs initiales des dérivées* $\frac{dr}{dt}$ *et* $\frac{d\theta}{dt}$.

Cas particulier. — *Dans l'hypothèse $r'_0 = 0$, on cherchera si, à partir de l'instant initial, r augmente ou diminue; on déterminera, dans cette même hypothèse, la valeur qu'il faut donner à θ'_0 pour que r reste constamment égal à r_0.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires fixes Ox et Oy, Ox étant vertical descendant, on considère deux points matériels pesants A et B, de*



masses a et b, glissant sans frottement, l'un sur Ox, l'autre sur Oy, et reliés l'un à l'autre par une ligne rectiligne AB sans masse, *de longueur l.*

1° *En appelant θ l'angle OAB de BA avec Ox, déterminer la valeur de θ pour laquelle le système est en équilibre stable.*

2° *Le système étant écarté de cette position et abandonné à lui-même sans vitesses, écrire l'intégrale des forces vives.*

3° *Calculer la durée T des oscillations infiniment petites (aller et retour) du système, autour de la position d'équilibre.*

4° *Calculer* T *en secondes avec les données numériques suivantes :*

$$l = 1^{\text{m}},$$

$$a = 8^{\text{g}},$$

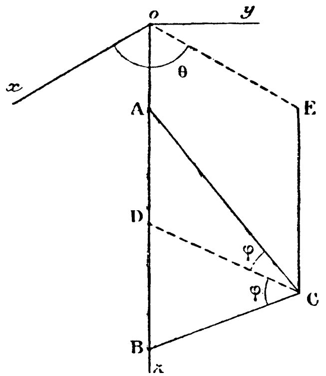
$$b = 2^{\text{g}}.$$

On prendra dans le système C.G.S., *pour valeur de* *l'accélération due à la pesanteur,*

$$g = 980.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux barres rectilignes, infiniment minces, homogènes et pesantes,* AC *et* BC, *de même longueur* $2l$ *et de même masse* m, *sont articulées sans*



frottement à leur extrémité commune C, *tandis que leurs autres extrémités* A *et* B *peuvent glisser sans frottement sur un axe vertical* Oz.

Trouver le mouvement du système des deux barres, supposé placé dans des conditions initiales quelconques compatibles avec les liaisons.

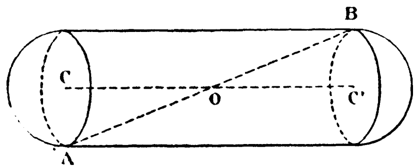
Notations. — *Le triangle* ABC *reste isoscèle :* AC = BC. *En menant la hauteur* CD, *on appellera* u, *le segment variable* $\overline{\mathrm{OD}}$; φ, *les deux angles égaux* DCA, DCB; θ, *l'angle* xOE *que fait le plan du triangle* ABC *avec le plan* xOz. (*Dans la figure,* E *est la projection du point* C *sur le plan horizontal* xOy.) *On pourra supposer qu'à l'instant initial* $t = 0$, *on a*

$$u_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0, \qquad \varphi = \varphi_0$$

et

$$\frac{du}{dt} = u'_0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta'_0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'_0.$$

Épreuve pratique. — *Un solide homogène de masse* M *a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur* $CC' = h$ *et de rayon de base* R, *surmonté à ses deux bases de deux hémisphères ayant ces bases pour grands cercles.*



1° *Déterminer l'ellipsoïde d'inertie de ce solide relatif à son centre* O.

2° *Calculer le moment d'inertie* I *de ce solide par rapport à un axe* AB *passant par* O *et rencontrant les deux circonférences de base du cylindre.*

3° Calcul numérique en unités C.G.S. — *En supposant* $M = 700^g$, $h = 10^{cm}$, $R = 5^{cm}$, *on fait tourner le solide autour de l'axe* AB *supposé fixe avec une vitesse angulaire de* 3 *tours à la minute. Calculer, en unités* C.G.S., *la force vive* $\sum mv^2$ *du solide.* (Octobre 1912.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Un certain nombre de barres homogènes minces identiques sont articulées sans frottement en leur extrémité commune* A *qui glisse sans frottement sur une verticale fixe* V.

1° *Chercher si l'ensemble de ces barres peut être en équilibre quand les barres font entre elles des angles successifs égaux et reposent tangentiellement sur une sphère polie fixe* S *dont le centre est sur* V.

2° *Calculer la période des petites oscillations du système près d'une position d'équilibre stable, chaque barre restant dans un plan diamétral vertical fixe, les plans diamétraux qui correspondent aux diverses barres faisant encore des angles égaux entre eux.*

On appellera l *la longueur commune des barres,* θ *le demi-angle au sommet du cône de révolution sur lequel* *se trouvent les barres,* α *la valeur de* θ *dans la position d'équilibre,* R *le rayon de la sphère* S.

II. *Trois billes* P, Q, R, *très petites, de poids* p, q, r, *sont reliées par un fil léger flexible et inextensible qui glisse ainsi que les billes dans un tube poli de très petite section.*

Ce tube, fixé dans un plan vertical, a la forme d'un triangle ABC. *A l'instant initial,* P *est dans* BC, Q *dans* CA, R *dans* AB. *Étudier le mouvement du fil depuis l'instant initial jusqu'au moment où, pour la première fois, l'une des billes passe en l'un des sommets du triangle.*

On appellera α, β, γ *les angles que font avec la verticale ascendante les côtés du triangle orientés dans les sens respectifs* BC, CA, AB.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide* S *homogène a la forme d'un secteur sphérique dont la méridienne est formée par un arc de cercle* ABC *et par deux rayons* OA, OB *faisant entre eux un angle droit. Ce solide est mobile sans frottement autour de son axe* OC *placé verticalement, le sommet* O *en haut. A l'instant initial, il tourne avec une vitesse de* 400 *tours par minute.*

Un anneau circulaire mince homogène de poids égal au huitième de celui du solide S, *de rayon* r *égal aux deux tiers de* $R = OA$ *et dont l'axe coïncide avec* OC *est abandonné sans vitesse à une hauteur assez petite au-dessus de* S.

Au bout de peu de temps l'anneau participera au mouvement de rotation de S *autour de* OC. *Calculer à ce moment la nouvelle vitesse de* S.

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Une barre homogène mince polie* AB *repose sur un plan horizontal. On applique une percussion horizontale* P *perpendiculaire à* AB *en un point* M *de la barre. Celle-ci se met en mouvement.*

On demande de déterminer la position initiale de son centre instantané de rotation C. *Peut-on choisir* M *de sorte que* C *soit en* A ?

(*On appellera* $2l$ *la longueur de la barre,* $a + l$ *la distance* AM.)

2° *Un bloc homogène rugueux ayant la forme d'un cylindre droit est placé dans une cavité ayant la forme d'un cylindre droit dont le rayon* R *est plus grand que le diamètre* $2r$ *du bloc et dont l'axe est horizontal. A l'instant initial, les deux cylindres se touchent le long d'une génératrice commune plus basse que l'axe de la cavité et sont abandonnés sans vitesse initiale.*

On formera les équations du mouvement dans l'hypothèse où il se produit un roulement sans glissement et l'on montrera que l'axe du bloc est animé d'un mouvement pendulaire.

On calculera l'angle de réaction totale et de la réaction normale et on le comparera avec l'angle de frottement. On en conclura que le mouvement ne peut avoir lieu sans glissement dans des conditions initiales données que si le coefficient de frottement est suffisamment grand.

Épreuve pratique. — *Déterminer la position du centre de pression d'une lame mince immergée dans l'eau et ayant la forme d'un secteur circulaire. On suppose que les deux rayons limites de ce secteur font un angle de* 59° *et que le sommet,* O, *de cet angle affleure au niveau de l'eau. Les rayons ont pour longueur* 1^{dm}, *et leur bissectrice fait un angle de* 46° *avec l'horizontale* Ox *du plan du secteur.*

La position du centre de pression sera déterminée par ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy *du plan de la lame.*

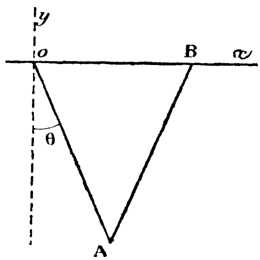
(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — *Deux barres minces homogènes de même masse* m *sont articulées sans frottement en* A. *L'extrémité* O *de l'une est fixe ; l'extrémité* B *de l'autre peut glisser sur une horizontale fixe* Ox *issue de* O.

1° *Trouver les positions d'équilibre du système. On appellera* $2a$ *la longueur commune des barres et* f *le coefficient de frottement de* AB *sur* Ox.

Étudier le mouvement du système quand on néglige le frottement en B, *en supposant qu'à l'instant initial* $OB = 4a$ *et que le système est au repos. On ne s'occupera que de la période où* B *reste du même côté de* O.

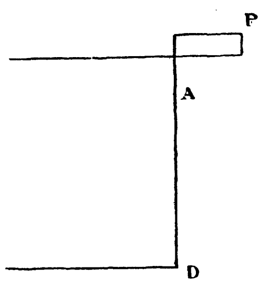
3° *Dans les hypothèses précédentes calculer la vitesse angulaire maximum de* OA. *Comparer la valeur de la vitesse angulaire de* OA *quand* OA *est verticale avec la vitesse qu'elle aurait dans la même position, si à l'instant initial on avait supprimé* AB, OA *tournant seul sans vitesse initiale à partir de la position horizontale.*



4° *Pendant le mouvement étudié dans* (2°), *on a à un certain instant une percussion* P *parallèle à* OB *et de même sens en un point déterminé* T *de* OA $(OT = b)$. *Déterminer la variation de vitesse angulaire de* OA *produite par la percussion* P.

5° *Dans les mêmes conditions, calculer la percussion de liaison en* B *provoquée par la percussion* P.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une lame mince pesant* 50^{kg} *a la forme d'un carré de* 1^m *de côté. Elle attire, suivant la loi*



de Newton, une petite particule P *de* 1^g *qui, placée comme dans la figure, est à* 12^{cm} *de* AB *et à* 30^{cm} *de* AD.

On demande de calculer l'attraction totale de la lame *sur* P *en milligrammes-poids. On pourra retrouver approximativement le coefficient d'attraction en tenant compte de ce que l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre est, dans le système* C. G. S., $g = 981$ *et que la densité moyenne de la terre est* 5.

(Juin 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Effet d'un système de percussions sur un corps solide. Cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe.*

II. *Une tige horizontale homogène* AOB *tourne librement autour d'une verticale passant par son milieu* O. *Un petit anneau* M, *qui glisse sans frottement sur la tige, est attiré vers le point* O *proportionnellement à la distance.*

Étudier le mouvement du système, les conditions initiales étant quelconques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un pendule formé d'un solide* (S) *mobile autour d'un axe horizontal* (O), *et d'un curseur* (S′) *dont le centre de gravité* G′ *se trouve dans le plan* P *déterminé par l'axe* (O) *et le centre de gravité* G *du solide* (S). *On désigne par* m *la masse du solide* (S), *par* a *l'abscisse de son centre de gravité* G, *comptée à partir de l'axe* (O) *dans le plan* P, *par* k *son rayon de gyration autour d'un axe central parallèle à* (O). *Les éléments analogues pour le curseur* (S′) *sont désignés respectivement par* μ, x, ρ.

1° *Déterminer, en fonction de ces quantités, la longueur* l *du pendule simple synchrone.*

2° *La masse* μ *du curseur ayant été mesurée,* x *et* ρ *étant inconnus, on détermine expérimentalement la longueur* l; *puis on déplace le curseur* (S′) *de manière à augmenter l'abscisse* x *d'une quantité connue* d *et l'on détermine encore la longueur analogue* l'. *On demande de déduire de ces mesures les valeurs des inconnues* x *et* ρ.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équilibre d'un fil tendu sur une surface, avec ou sans frottement.*

II. *Une tige horizontale* OA *tourne uniformément autour de la verticale de son extrémité* O. *Une barre pesante, homogène* AB, *articulée en* A, *peut se mouvoir librement dans le plan perpendiculaire à* OA. *Étudier le mouvement relatif de cette barre dans le plan considéré. Conditions d'équilibre. Petits mouvements.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule composé est constitué par un solide homogène ayant la forme d'un cône de révolution de hauteur h et dont le demi-angle au sommet est désigné par θ. L'axe de suspension est perpendiculaire à l'axe de révolution et passe par le sommet du cône :*

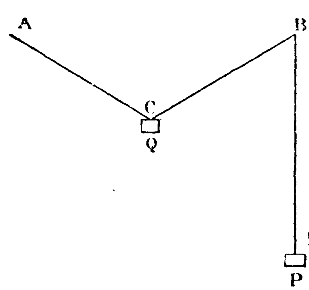
1° *Trouver la longueur du pendule simple synchrone.*

2° *Est-il possible de déterminer θ de telle façon que l'axe conjugué de l'axe de suspension soit situé dans le plan de la base.*

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un fil* ACBD, *flexible, inextensible, de masse négligeable, de longueur l, a l'une de ses extrémités fixée en* A *et passe en* B *sans frottement sur une poulie infiniment petite.*

Au point C *il supporte un poids* Q *de masse q, par l'intermédiaire d'un petit anneau dans lequel il glisse*



sans frottement; la portion BD *pend verticalement et supporte un poids* P *de masse p. Les points fixes* A *et* B *sont sur une même horizontale ; le point mobile* C *reste à égale distance de* A *et de* B *et* BD *reste verticale. Étudier dans ces conditions le mouvement des deux masses pesantes*

P *et* Q. ***Reconnaître si l'équilibre est possible et étudier les petits mouvements. On néglige les masses de l'anneau*** C ***et de la poulie*** B.

II. *Les ponts suspendus.*

Épreuve pratique. — *Dans un plan vertical* P *on considère une tige* AB, *homogène, pesante, de longueur a et de masse m, qui porte à son extrémité* B *un disque homogène pesant, de masse* M, *situé dans le plan* (P) *et dont le centre se trouve en* B. *Le point* A *étant fixe, la tige oscille sans frottement autour de ce point dans le plan* (P) *et le disque tourne librement sans frottement autour de* B *dans le même plan. Démontrer que la vitesse de rotation du disque est constante, et trouver la durée des petites oscillations de la tige.*

(Juin 1913.)

Toulouse.

Épreuve théorique. — *Une plaque homogène, pesante, est mobile dans un plan vertical qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'une droite verticale Oy fixe dans ce plan. Chaque élément de la plaque est attiré par le point fixe* O *proportionnellement à la masse et à la distance. On désignera par k l'intensité de cette attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance.*

1° *Trouver et discuter le mouvement de la plaque.*

2° *La plaque étant supposée en équilibre relatif, qu'arrivera-t-il si on l'écarte légèrement de cette position sans vitesse initiale ?*

(Novembre 1909.)

Épreuve théorique. — *Un solide invariable est constitué par une sphère homogène, pesante, de centre* G, *traversée par une aiguille sans masse* GO, *dont un point* O *est fixe dans l'espace. Soient Oz la verticale ascendante du point* O, *et* P *la projection sur Oz d'un point quelconque* M *de la sphère.*

L'élément de masse m qui entoure le point M *est sollicité par une force dirigée de* P *vers* M *et ayant pour valeur* $2m\dfrac{g}{l}\,\mathrm{MP}$, *$l$ désignant la longueur* OG, *et g l'accélération de la pesanteur :*

1° *Étudier les positions d'équilibre du système.*

2° *Étudier le mouvement du système. Examiner en particulier le cas où le mouvement initial serait une rotation très grande autour de* OG. *Donner dans ce cas une valeur approchée de l'amplitude de la nutation, et indiquer le sens de la précession.*

On rappelle les formules suivantes : Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires liés au solide et dont le dernier coïncide avec* OG, *les composantes* p, q, r *de la rotation du corps sur ces axes sont données par les formules*

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\theta \sin\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r &= \psi' \cos\theta + \varphi', \end{aligned}$$

dans lesquelles θ, Ψ, φ *sont respectivement les angles de nutation, de précession et de rotation propre.*

On désignera par C *le moment d'inertie de la sphère par rapport à un diamètre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une droite* AB *de longueur invariable est tracée dans un plan mobile qui glisse sur un plan fixe. Le point* A *décrit une droite* Δ *du plan fixe, et la droite* AB *passe constamment par un point fixe* O *de ce plan :*

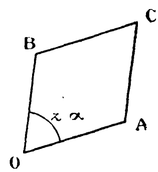
1° *Trouver la base et la roulette qui définissent le mouvement du plan mobile. Construire le cercle des inflexions.*

2° *On considère* AB *comme la diagonale d'un rectangle matériel, homogène, tracé dans le plan mobile et entraîné dans son mouvement. Calculer à un instant donné la force vive de ce rectangle, sachant qu'à l'instant considéré* AB *fait avec la droite* Δ *un angle de* 30° *et que la vitesse du point* A *est égale à l'unité.*

La distance de O *à* Δ *est égale à* 1^m, *les côtés du rectangle ont* 6^m *et* 8^m, *la densité du rectangle est égale à l'unité.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un losange articulé* AOBC *formé de quatre tiges égales et homogènes est mobile sans frottement dans un plan horizontal autour d'un de ses sommets* O *qui est fixe. Étudier le mouvement du système, et* *en particulier les variations de l'angle* 2α *que font entre eux les deux côtés qui aboutissent en* O. *A l'instant initial,*



ces deux côtés OA *et* OB *sont rectangulaires et ont des vitesses angulaires que l'on désigne par* ω_1 *et* ω_2.

On examinera notamment les deux cas particuliers où l'on a

$$\omega_1 - \omega_2 = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

(S'il arrive que les côtés du losange se disposent en ligne droite, on signalera le fait sans continuer l'étude du mouvement ultérieur.)

II. *Trouver la courbe plane tautochrone pour une attraction centrale constante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un disque circulaire pesant ayant un rayon égal à* 1^m, *la densité* ρ *à la distance* x *du centre a pour valeur* $\rho = \rho_0 e^x$. *Ce disque peut rouler et glisser sur une droite horizontale dans un plan vertical. A l'intant initial, la vitesse du centre est* 3^m *par seconde, celle du point de contact est* 1^m, *toutes deux dirigées dans le même sens. On tiendra compte à la fois de la résistance au glissement et de la résistance au roulement.*

1° *Au bout de combien de temps le mouvement se réduira-t-il à un simple roulement, et quel sera le chemin parcouru pendant cette première période ?*

2° *Combien de temps s'écoulera-t-il depuis cet instant jusqu'à l'arrêt complet du disque, et quel sera le chemin parcouru pendant cette seconde période ?*

g, f, δ *désignant l'intensité de la pesanteur et les coefficients de frottement pour le glissement et le roulement* *respectivement, on donne*

$$gf = 0,1, \qquad g\delta = 0,02$$

et l'on prendra

$$e = 2,718.$$

(Novembre 1910.)

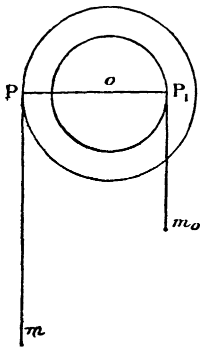
ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un pendule simple de longueur l, fixé en un point O, est assujetti à se déplacer sans frottement dans un plan vertical qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de la verticale Oz du point O :*

1° *Chercher s'il existe pour le pendule, pour un choix convenable de ω, des positions d'*équilibre relatif *autres que la verticale ?*

2° *Former l'équation différentielle qui définit la variation de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale Oz dirigée vers le bas et l'intégrer autant qu'on le peut.*

Étudier le mouvement qu'on obtient en abandonnant le pendule à lui-même sans vitesse initiale après l'avoir écarté de la verticale d'un angle β. Positions extrêmes. Durée des oscillations.

3° *Soit, dans le cas où elle existe, α l'angle qui définit l'écart du pendule dans la position d'équilibre relatif; en posant $\theta = \alpha + \varphi$ et négligeant les puissances de φ supé-*



rieures à la première, on demande d'étudier la variation de φ, c'est-à-dire les petites oscillations au voisinage de l'équilibre relatif.

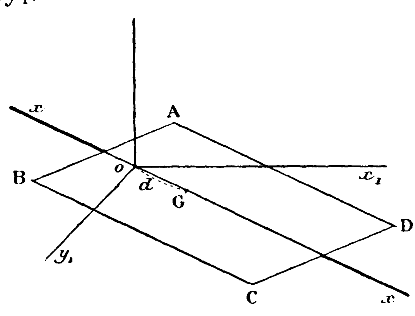
ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un treuil, mobile autour d'un axe horizontal, constitué par deux disques circulaires et concentriques très minces fixés l'un à l'autre et sur lesquels sont enroulés en sens inverse deux fils inextensibles et sans masse supportant respectivement des masses* m *et* m_1. *Soient* M, M_1 *les masses des deux disques,* R *et* R_1 *leurs rayons;* trouver le temps que met le treuil PARTANT DU REPOS *pour tourner d'un angle* θ.

Application :

$$\theta = 45^\circ, \qquad R_1 = \frac{1}{2} R,$$

$$M = 2m, \qquad M_1 = 2m_1 = m, \qquad R = \frac{16}{9} \frac{g}{\pi}.$$

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une tige rectiligne* $x'Ox$ *de masse négligeable, dont un point* O *est fixe, est assujettie à rester dans le plan horizontal* x_1Oy_1. *Une plaque rectangulaire homogène* ABCD *est fixée à la tige par les milieux des côtés parallèles* AB, CD, *de sorte qu'elle peut tourner autour de la tige sans pouvoir glisser le long de cette tige. On définit la position de ce système par l'angle* $x_1Ox = \Psi$ *et par l'angle* θ *du plan de la plaque avec le plan horizontal* x_1Oy_1.

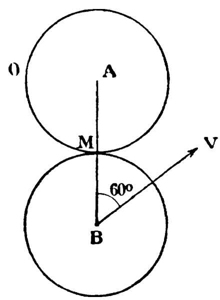


1° *Étudier le mouvement du système formé par la tige et par la plaque, en supposant que la tige reçoive une certaine vitesse angulaire initiale* Ψ'_0 *et que la vitesse initiale de rotation* θ'_0 *de la plaque autour de la tige soit nulle.*

2° *Étudier le mouvement de rotation de la plaque autour de la tige lorsqu'on assujettit cette dernière à avoir un* *mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire* ω, *la vitesse initiale de rotation de la plaque autour de la tige étant ici quelconque. Dans quel cas le mouvement de la plaque est-il révolutif ?*

N. B. — *On désignera par* M *la masse de la plaque, par* d *la distance* OG *du point* O *au centre* G *de la plaque, par* A, B *les moments d'inertie de la plaque par rapport à ses axes de symétrie et l'on calculera en fonction de* M, d, A, B, *si cela est nécessaire, les moments principaux d'inertie de la plaque par rapport à l'origine* O.

Épreuve pratique. — *Deux disques circulaires homogènes de centres* A *et* B, *de même masse et égaux, se meuvent sans frottement sur un même plan horizontal. Le disque* A *est fixé par un point* O *de sa circonférence et par suite il ne peut que tourner autour de ce point* O. *Ce disque* A *étant immobile, on lance avec une vitesse de translation donnée le disque* B *qui vient frapper* A *au point* M *situé à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à* OA. *Les disques sont supposés* parfaitement élastiques.



1° *Trouver à un tour près le nombre de tours par seconde que fera le disque* A *après le choc.*

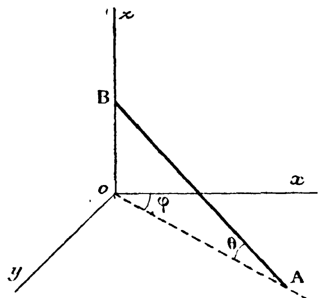
2° *Trouver la vitesse du disque* B *après le choc.*

Données : *Rayon commun aux deux disques*, $R = 2^{cm}$; *vitesse du disque* B *avant le choc*, $V = 10^{m}$ *à la seconde ; angle de cette vitesse* BV *avec* BA, $\alpha = 60°$.

(*Le point* O *et* BV *de part et d'autre de* BA.)

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — *Une barre homogène pesante* AB *de longueur* $2l$, *de masse* M, *s'appuie par l'extrémité* A *sur un plan horizontal* xOy ; *l'autre extrémité* B *porte un anneau infiniment petit que traverse une tige fixe* Oz



perpendiculaire au plan xOy *et située au-dessus de ce plan. Les liaisons sont supposées sans frottement.*

1° *Écrire les équations du mouvement de la barre en prenant pour paramètres l'angle* $xOA = \varphi$ *et l'angle* $BAO = \theta$.

2° *Étudier le mouvement en prenant les données initiales suivantes :*

$$\theta_0 = 30^\circ, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = n\sqrt{\frac{g}{l}}$$

(*n étant un nombre positif*).

On calculera, avec ces données, la réaction du plan sur la barre et l'on cherchera si l'extrémité A *de la barre peut se soulever au-dessus du plan au cours du mouvement : on arrêtera l'étude du mouvement à l'instant où cette circonstance se produit pour la première fois. En particulier, comment faut-il choisir n pour que dès le début du mouvement la barre se soulève au-dessus du plan?*

N. B. — *Si, à un instant donné, la barre vient se placer dans le plan horizontal* xOy, *on arrêtera l'étude du mouvement à cet instant.*

Épreuve pratique. — *Une sphère solide de masse* M *et de rayon* R *se meut librement dans l'espace. On suppose* *qu'à un instant donné son mouvement instantané soit une translation horizontale de vitesse* V *et qu'on fixe subitement à cet instant le point le plus haut de la sphère. On demande :*

1° *De déterminer les conditions initiales du mouvement que prendra la sphère après l'introduction de cette liaison.*

2° *De calculer la perte de force vive provenant de la liaison ainsi introduite.*

Application numérique : $M = 100^g$; $V = 7^{cm}$ *à la seconde ;* $R = 5^{cm}$.

(Novembre 1912.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

804.

(1867, p. 188.)

Étant donnés m nombres en progression arithmétique, trouver le nombre de leurs combinaisons n à n, ayant la propriété que la somme des n nombres composant chaque combinaison ne dépasse pas le plus grand des nombres donnés.

J. Sacchi.

SOLUTION.

Par M. T. Ono, à Kagoshima.

Soient

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad \ldots,\quad a+(n-1)d,\quad \ldots,$$
$$a+(s-1)d,\quad \ldots,\quad a+(m-1)d,$$

m nombres en progression arithmétique, et $F(m, n)$ le nombre cherché.

Supposons qu'on ait

$$a+(s-2)d < a+(a+d)+(a+2d)+\ldots$$
$$+\left(a+\overline{n-1}\,d\right) \leqq a+(s-1)d;$$

si $m = s$, on a

$$F(s, n) = 1;$$

mais, si $m > s$, on constate aisément les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
F(s+1, n) &= F(s, n) + 1,\\
F(s+2, n) &= F(s+1, n) + 2,\\
F(s+3, n) &= F(s+2, n) + 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F(m, n) &= F(s+m-s, n) = F(m-1, n) + m - s;
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
F(m, n) &= 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-s)\\
&= 1 + \frac{(m-s)(m-s+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Or

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + \overline{n-1}\, d) \leqq a + (s-1)d,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \leqq a + (s-1)d$$

ou

$$\frac{(2a+nd)(n-1)}{2d} + 1 \leqq s.$$

Donc, si l'on pose :

$$\frac{(2a+nd)(n-1)}{2d} = E + f,$$

où E désigne la partie entière et f la partie fractionnaire, on a

$$\begin{aligned}
F(m, n) &= 1 + \frac{(m-E-1)(m-E)}{2} \qquad (\text{cas où } f = 0),\\
&= 1 + \frac{(m-E-2)(m-E-1)}{2} \qquad (\text{cas où } f \neq 0).
\end{aligned}$$

1969.

(1903, p. 192.)

Soit PQ *une corde d'une ellipse de centre* O. *Montrer que, lorsque la corde* PQ **tend vers zéro**, *l'orthocentre* H *du triangle* OPQ *a une limite. Le lieu de ce point limite est une sextique unicursale dont l'aire est équivalente à la somme des aires de l'ellipse et de sa développée.*

E.-N. Barisien.

Solution.

Par M. W. Gaedecke.

Soient $M(\alpha, \beta)$ le pôle de la corde PQ par rapport à l'ellipse, G, C, H le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre de OPQ. On calcule d'abord les coordonnées de G et C, et l'on en déduira celles de H, sachant que G, C, H sont en ligne droite et que $HG = 2GC$.

Calcul du centre de gravité G. — La combinaison des équations de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et de sa seconde polaire PQ

$$b^2\alpha x + a^2\beta y = a^2b^2$$

donne les relations suivantes entre les coordonnées de $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Or

$$3x_G = x_1 + x_2, \qquad 3y_G = y_1 + y_2.$$

Donc

$$3x_G = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad 3y_G = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Calcul du centre du cercle circonscrit C. — Le cercle circonscrit au triangle OPQ a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + K\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - p\right) = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle passant par $x = 0$, $y = O$, il faut avoir

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}, \qquad p = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{a^2b^2c^2}\left(= \frac{1}{k}\right).$$

Par suite, l'équation du cercle considéré sera

$$a^2 b^2 (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2+y^2) - b^2\alpha\, x(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 + a^2b^2c^2)$$
$$- a^2\beta\, y(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 - a^2b^2c^2) = 0.$$

Le centre de ce cercle a donc pour coordonnées

$$x_C = \frac{\alpha(a^4\beta^2 + b^4\alpha^2 + a^2b^2c^2)}{2\,a^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},$$
$$y_C = \frac{\beta(a^4\beta^2 + b^4\alpha^2 - a^2b^2c^2)}{2\,b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

Calcul de l'orthocentre H. — On voit facilement qu'on a

$$x_H = 3x_G - 2x_C, \qquad y_H = 3y_G - 2y_C;$$

donc

$$x_H = \frac{\alpha[a^2b^2(a^2+b^2) - a^4\beta^2 - b^4\alpha^2]}{a^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},$$
$$y_H = \frac{\beta[a^2b^2(a^2+b^2) - a^4\beta^2 - b^4\alpha^2]}{b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

Lorsque la corde PQ *tend vers zéro*, le point M *vient sur l'ellipse*; par conséquent, il faut poser $\alpha = a\cos\varphi$, $\beta = b\sin\varphi$. Alors les coordonnées du point limite H sont, en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$(1)\quad x_H = \frac{\cos\varphi}{a}(b^2 + c^2\cos^2\varphi), \qquad y_H = \frac{\sin\varphi}{b}(a^2 - c^2\sin^2\varphi).$$

Si M parcourt l'ellipse, le point limite H décrit une courbe unicursale du sixième degré, ce que l'on voit en posant $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = t$. L'équation cartésienne de H est facile à déduire; elle est

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^4x^2 + b^4y^2)^2.$$

Aire du lieu H. — Les équations (1) ont la forme générale

$$x = A\cos\varphi + B\cos^3\varphi, \qquad y = C\sin\varphi + D\sin^3\varphi.$$

La différentielle $d\mathrm{U}$ de l'aire est

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = x - \frac{dy}{d\varphi} = (\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^3\varphi)(\mathrm{C}\cos\varphi + 3\,\mathrm{D}\sin^2\varphi\cos\varphi)$$
$$= \mathrm{AC}\cos^2\varphi + \mathrm{BC}\cos^4\varphi + 3\,\mathrm{AD}\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$+ 3\,\mathrm{BD}\sin^2\varphi\cos^4\varphi.$$

Donc, l'aire totale de la courbe est

$$\mathrm{U} = \mathrm{AC}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + \mathrm{BC}\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi$$
$$+ \mathrm{AD}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi + 3\,\mathrm{BD}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi, \qquad \int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3\pi}{4},$$
$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Donc

$$\mathrm{U} = \pi\mathrm{AC} + \frac{3\pi}{4}(\mathrm{AD} + \mathrm{BC}) + \frac{3\pi\mathrm{BD}}{8}.$$

En portant dans cette relation les valeurs de A, B, C, D, on obtient

$$\mathrm{U} = \pi ab + \frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}.$$

Or, l'aire de l'ellipse donnée est $\mathrm{E} = \pi ab$, celle de sa développée

$$\mathrm{D} = \frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab};$$

donc

$$\mathrm{U} = \mathrm{E} + \mathrm{D}.$$

Remarque. — Sur des questions semblables, *voir* E.-N. Barisien, *Sur certains points remarquables d'une conique* (Association française pour l'Avancement des Sciences : *Congrès d'Angers*, 1904, t. **12**, p. 121-127, et *Mathesis*, 3e série, t. VIII, 1908, Question **1087**, p. 219-221.

2095.

(1908, p. 240.)

Si deux quadriques ont en commun deux génératrices Ox, Oy, *le long desquelles elles se raccordent, elles ont en* O *un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'une perpendiculaire au plan* xOy *rencontre les deux quadriques en deux points* M *et* M' *dont la distance est un infiniment petit du quatrième ordre en prenant* OM *comme infiniment petit principal.*

G. F.

Seconde solution (1).

(Par l'auteur.)

Les deux quadriques et le plan double tangent en O *font partie d'un faisceau ponctuel de quadriques.* Les axes de coordonnées étant deux droites quelconques menées par le point O dans le plan tangent en ce point et la normale en O, les équations des deux quadriques sont de la forme

$$z = ax^2 + by^2 + \lambda z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$
$$z = ax^2 + by^2 + \mu z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy;$$

on a donc, pour les points M et M' relatifs aux mêmes valeurs des coordonnées x et y,

$$(z' - z)(1 - 2fy - 2gx) = \mu z'^2 - \lambda z^2.$$

Avec OM comme infiniment petit principal, z et z' ont pour partie principale commune $ax^2 + by^2 + 2hxy$, et l'on voit que $z' - z$ a pour partie principale

$$(\mu - \lambda)(ax^2 + by^2 + 2hxy)^2,$$

ce qui démontre la proposition.

---

(1) *Voir* une première solution, 1909, p. 55. *Voir* aussi la Note qui accompagnait l'énoncé, 1908, p. 240, et qui montre l'intérêt de la question.

2200.

(1913, p. 48.)

Soient ABCD *un carré de centre* O, M *un point quelconque du cercle circonscrit au carré*, E *le point où la tangente en* M *au cercle rencontre la diagonale* BD. *Montrer que les centres des cercles tritangents au triangle* OME *sont chacun sur un des côtés du carré* ABCD.

E.-N. Barisien.

Solution.

Par M. Parrod.

Supposons le point M sur l'arc AB et considérons le triangle symétrique de OME par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle MOE; on obtient le triangle OBE′, le côté BE′ est tangent au cercle; le cercle inscrit dans le triangle OBE′ est le même que celui qui est inscrit dans le triangle OME et la la bissectrice de l'angle OBE′ est BA; donc le centre de ce cercle inscrit est sur le côté AB du carré.

On voit de même que les deux cercles exinscrits dans l'angle EOE′ sont les mêmes et par suite le centre est situé sur le côté BC qui est la bissectrice extérieure de l'angle E′BE.

Par le même procédé, à l'aide de la bissectrice extérieure de l'angle MOE; on montrerait que les deux autres centres sont sur les côtés AD et CD.

Autres solutions, de MM. R. Bouvaist, R. Goormaghtigh, L. Klug et T. Ono.

2201.

(1913, p. 48.)

Démontrer la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta)^2}$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^6\sin^2\theta+b^6\cos^2\theta)^2}.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION.

Par M. T. ONO, à Kagoshima.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^4\theta\,d\theta}{(a^2+b^2\operatorname{tang}^2\theta)^2(b^4+a^4\operatorname{tang}^2\theta)} \qquad (\text{soit } \operatorname{tang}\theta=t)$$

$$=\int_0^{\infty} \frac{t^4\,dt}{(a^2+b^2t^2)^2(b^4+a^4t^2)^2(1+t^2)} \qquad \left(\text{soit } t=\frac{a}{b}u\right)$$

$$=\int_0^{\infty} \frac{abu^4\,du}{(1+u^2)^2(b^6+a^6u^2)^2(b^2+a^2u^2)} \qquad (\text{soit } u=\operatorname{tang}\theta)$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^4\theta\,d\theta}{\operatorname{séc}^2\theta(b^6+a^6\operatorname{tang}^2\theta)^2(b^2+a^2\operatorname{tang}^2\theta)}$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^6\sin^2\theta+b^6\cos^2\theta)^2}.$$

N. B. — Dans le calcul ci-dessus, si l'on pose $t=\frac{a^2}{b^2}u$, on obtiendra aussi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta)^2}$$

$$=a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta)(a^6\cos^2\theta+b^6\sin^2\theta)^2}.$$

De plus, d'après la méthode des résidus, on trouve pour valeur des deux intégrales :

$$\pi\left[\frac{1}{2(a^2-b^2)^2(a^4-b^4)^2}+\frac{ab(a^2-3b^2)}{4(a^2-b^2)^2(a^6-b^6)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{a^2b^2(3a^4-b^4)}{4(a^4-b^4)^2(a^6-b^6)^2}-\frac{a^2b(a^7+a^5b^2+b^7)}{(a^4-b^4)(a^6-b^6)^3}\right].$$

[C2a]

EXPRESSION SIMPLE DE L'INTÉGRALE $\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx$, POUR m QUELCONQUE ET p ENTIER;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note contient les expressions de quelques intégrales de la forme $\int_0 \mathrm{U}\, x^p\, dx$, p étant entier. Le résultat obtenu pour $\mathrm{U} = \frac{1}{(1+x)^{m+1}}$ (m quelconque) est surtout intéressant, parce que l'intégration par parties ne le donnerait pas aisément, au moins d'une manière formelle; et l'on remarquera le cas singulier où m est entier, avec $p \gtreqless m$.

1. On a, d'une part,

$$(1)\qquad (-1)^p \int_0 \frac{x^p}{1+x}\,dx = \mathrm{L}(1+x) - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots - (-1)^p \frac{x^p}{p}\right);$$

$$(2)\qquad (-1)^p \int_0 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tang} x - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots - (-1)^p \frac{x^{2p-1}}{2p-1}\right);$$

$$(1,2)\qquad (-1)^p \times 2 \int_0 \frac{x^{2p+1}}{1+x^2}\,dx = \mathrm{L}(1+x^2) - \left(\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \ldots - (-1)^p \frac{x^{2p}}{p}\right);$$

une intégration par parties conduirait aux intégrales

$$\int_0 x^{p+1}\,\mathrm{L}(1+x)\,dx,\qquad \int_0 x^{2p-1}\,\mathrm{arc\,tang}\,x\,dx,$$
$$\int_0 x^{2p}\,\mathrm{arc\,tang}\,x\,dx.$$

On a, d'autre part,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx\\ &\quad = 1 - \frac{1+\mathrm{A}_1 x+\ldots+\mathrm{A}_p x^p}{(1+x)^m},\\ &\qquad \text{pour } m \text{ quelconque, en posant}\\ &\mathrm{A}_1=\frac{m}{1},\quad \mathrm{A}_2=\frac{m(m-1)}{2!},\quad \ldots,\\ &\mathrm{A}_p=\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!};\end{aligned}\right.$$

cette formule est illusoire si, m étant entier, on a $p \geqq m$;

$$(4)\qquad \frac{1}{p!}\int_0 \frac{x^p}{e^x}\,dx = 1 - \frac{1+\dfrac{x}{1}+\ldots+\dfrac{x^p}{p!}}{e^x};$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \qquad\qquad p=2q. & \qquad\qquad p=2q-1. \\ \dfrac{(-1)^q}{p!}\displaystyle\int_0 x^p\cos x\,dx & \\ = \left\{\begin{aligned}&\sin x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\\ &-\cos x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\end{aligned}\right. & 1-\left\{\begin{aligned}&\cos x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\\ &+\sin x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\end{aligned}\right. \\ \dfrac{(-1)^q}{p!}\displaystyle\int_0 x^p\sin x\,dx & \\ = 1-\left\{\begin{aligned}&\cos x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\\ &+\sin x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned}&-\sin x\left(1-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)\\ &+\cos x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\end{aligned}\right. \end{array}\right.$$

où le degré de chaque polynome en x est le degré de la puissance de x qui figure sous le signe $\int$, ou ce degré moins 1; on remarquera la forme des expressions placées dans les deux diagonales du Tableau.

Dans celles de ces formules qui contiennent des fonctions circulaires, on peut introduire des fonctions hyperboliques en changeant x en xi; dans la formule (1, 2) on peut remplacer x^2 par $-x^2$.

Les intégrales (1, 3, 4, 5), par exemple, sont *a priori* des infiniment petits d'ordre $p+1$ si x est infiniment petit principal; c'est pour cela que, au second membre de la formule (3), l'expression

$$(1+x)^m - (1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p),$$

après qu'on a développé $(1+x)^m$ par la formule du binome, commence au terme en x^{p+1}.

Pour m entier et $p \geqq m$, la formule (3) est illusoire. On a alors, en désignant par M le produit

$$m(m-1)\ldots(m-p)$$

débarrassé du facteur égal à zéro,

$$(3') \quad \frac{M}{p!}\int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx = L(1+x) - \frac{A'_1 x + A'_2 x^2 + \ldots + A'_p x^p}{(1+x)^m},$$

avec

$$A'_1 = \frac{1}{1}, \quad A'_2 = \frac{[m(m-1)]'}{2!}, \quad \ldots, \quad A'_m = \frac{[m(m-1)\ldots 1]'}{m!},$$

ou

$$A'_1 = \frac{1}{1}, \qquad A'_2 = \frac{m(m-1)}{2!}\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1}\right], \qquad \ldots,$$

et, pour $p > m$,

$$A'_{m+1} = \overline{A}_{m+1}, \qquad A'_{m+2} = \overline{A}_{m+2}, \qquad \ldots,$$

le trait indiquant que l'on supprime le facteur égal à zéro.

2. On vérifierait directement ces diverses formules, à l'exception de la formule (3'), par dérivation; nous obtiendrons chacune d'elles par une intégration, simple quadrature pour les formules (1) et (2), intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à partir de la formule (3).

La formule (1) s'obtient en écrivant

$$y = \mathrm{L}(1+x),$$
$$y' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{p-1}x^{p-1} + (-1)^p \frac{x^p}{1+x}$$

et en intégrant; on a réellement ainsi le développement de $\mathrm{L}(1+x)$, le terme complémentaire étant sous forme d'intégrale (Vallès, *Des formes imaginaires en Algèbre*, Chap. X); au point de vue où nous nous plaçons, on déduit au contraire de là l'expression de cette intégrale.

Pour la formule (2), on considère arc tang x.

La formule (1, 2) n'est pas autre chose que la formule (1) où l'on remplace x par x^2; elle complète la formule (2).

Pour la formule (3), on pose (Vallès, *loc. cit.*)

$$y = (1+x)^m = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_p x^p + \mathrm{R}(x),$$

les A étant des coefficients indéterminés, et l'on se sert de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - my = 0,$$

qui donne pour $\mathrm{R}(x)$ une équation différentielle linéaire. On la simplifie, en disposant des A de manière que le polynome en x obtenu se réduise au terme de degré p ; cela revient, en supposant que l'on a écrit

$$(1+x)y' = my,$$

à identifier dans la mesure du possible les polynomes placés dans les deux membres. On obtient $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{m}{1}$, ..., et l'équation différentielle se réduit à

$$(1+x)R'(x) - mR(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}x^p;$$

l'équation sans second membre admettant la solution $R(x) = (1+x)^m$, on pose $R(x) = (1+x)^m \times v$, et l'on arrive à la formule

$$(1+x)^m = 1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}(1+x)^m \times \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}dx.$$

On en déduit la formule (3).

Pour m entier et $p \gtreqless m$, le calcul précédent ne peut rien donner relativement à l'intégrale considérée; nous reviendrons sur ce cas singulier.

La formule (4) est un cas limite de la formule (3); on l'obtient en remplaçant x par $\frac{x}{m}$ et en faisant m infini. Le traitement direct est d'ailleurs plus aisé.

Les formules (5) se déduisent de la formule (4) en remplaçant x par xi, et en mettant $\cos x - i\sin x$ au lieu de e^{-xi}. Au premier membre de la formule (4), on a alors le facteur i^{p+1}, et il faut distinguer deux cas, $p = 2q$, $p = 2q-1$ [colonnes du Tableau (5)].

3. On obtient directement les formules (5), sous une forme plus condensée, en opérant comme il suit. Considérons les fonctions

$$y = \cos x, \qquad y = \sin x,$$

qui satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = 0.$$

Prenons, par exemple,

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^q \frac{x^p}{p!} + R(x),$$

avec $p = 2q$; nous aurons ainsi les deux formules de la première colonne du Tableau (5). On a pour $R(x)$

$$R''(x) + R(x) = -(-1)^q \frac{x^p}{p!}.$$

L'équation sans second membre admettant les solutions $R(x) = \cos x$, $R(x) = \sin x$, posons, par exemple,

$$R(x) = \cos x \, v,$$

ce qui donne

$$v'' \cos x - 2v' \sin x = -(-1)^q \frac{x^p}{p!}.$$

Ainsi la fonction

$$w = v' = \left(\frac{R(x)}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\cos x}\right)'$$

satisfait à l'équation différentielle linéaire *du premier ordre*

$$w' \cos x - 2w \sin x = -(-1)^q \frac{x^p}{p!},$$

et c'est cette fonction w qui fournira une intégrale. L'équation sans second membre admettant la solution $w = \frac{1}{\cos^2 x}$, posons

$$w = \frac{1}{\cos^2 x} r,$$

ce qui donne

$$r' = -\frac{(-1)^q}{p!} x^p \cos x;$$

d'ailleurs, la fonction v étant paire, on a $v'(o) = o$, ou $r(o) = o$. On a par suite, *avec* $p = 2q$,

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \cos x\, dx = -r = -\cos^2 x \times w$$
$$= \cos^2 x \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\cos x}\right)',$$

formule équivalente à la première des formules (5). Si l'on pose $R(x) = \sin x \times v$, on obtient

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \sin x\, dx = 1 + \sin^2 x \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{\sin x}\right)',$$

avec $p = 2q$.

Pour $y = \sin x$, on obtient les deux formules de la seconde colonne du Tableau (5) lue en remontant, sous les formes suivantes :

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x_p \sin x\, dx = -\sin^2 x \left(\frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{\sin x}\right)',$$

$$\frac{(-1)^q}{p!}\int_0 x^p \cos x\, dx = 1 - \cos^2 x \left(\frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots}{\cos x}\right)',$$

avec $p = 2q - 1$.

4. L'application réitérée du procédé d'intégration par parties donne généralement

$$\int U x^p\, dx = V x^p - p x^{p-1} V_1 + p(p-1) x^{p-2} V_2 - \ldots$$
$$+ (-1)^p p(p-1)\ldots 1\, V_p + C,$$

V étant une primitive de U, V_1 étant une primitive de V, ... Cela permet d'obtenir très aisément les formules (4) et (5). *Mais il n'en est pas de même de la* *formule* (3), les intégrales V, V_1, ..., V_p étant alors

$$\frac{-1}{m(1+x)^m}, \quad \frac{1}{m(m-1)(1+x)^{m-1}}, \quad \ldots,$$
$$\frac{-(-1)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)(1+x)^{m-p}};$$

on a ainsi

$$[3] \quad \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}dx$$
$$= -\frac{x^p}{m(1+x)^m} - \frac{p\,x^{p-1}}{m(m-1)(1+x)^{m-1}} - \ldots$$
$$-\frac{p(p-1)\ldots 2x}{m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+x)^{m-p+1}}$$
$$-\frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1)\ldots(m-p)(1+x)^{m-p}}$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1)\ldots(m-p)};$$

il faudrait, pour arriver à la formule (3), *connaître* a priori *l'identité*

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}$$
$$\times\left[\frac{x^p}{m} + \frac{p\,x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)} + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots 1(1+x)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)}\right]$$
$$= (1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p).$$

On pourrait dire toutefois que la formule [3] peut prendre la forme (3) avec des valeurs convenables des coefficients A, et déterminer ces coefficients par la condition que le second membre de la formule (3) soit un infiniment petit d'ordre $p+1$ si x est infiniment petit principal.

5. Reprenons la formule (3), pour en déduire la formule (3′) dans le cas où, m étant entier, on a $p \gtreqless m$. Soit pour cela un entier μ, et supposons que m tende vers μ, avec $p \gtreqless \mu$. En appelant $\mathfrak{M}$ le produit $m(m-1)\ldots(m-p)$, débarrassé du facteur $m-\mu$

qui tend vers zéro, la formule (3) peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{M}(m-\mu)}{p!}\int_0 = \frac{(1+x)^m - (1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p)}{(1+x)^m};$$

pour $m = \mu$, en désignant par $a_1, \ldots, a_p$ les valeurs correspondantes de $A_1, \ldots, A_p$, on peut écrire, avec $(1+x)^m$ au dénominateur,

$$0 = \frac{(1+x)^\mu - (1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p)}{(1+x)^m};$$

on a donc, en retranchant membre à membre et en divisant par $m-\mu$,

$$\frac{\mathfrak{M}}{p!}\int_0 = \frac{\dfrac{(1+x)^m - (1+x)^\mu}{m-\mu}}{(1+x)^m} - \frac{\dfrac{(A_1-a_1)}{m-\mu}x + \ldots}{(1+x)^m}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{1-(1+x)^\varepsilon}{-\varepsilon}$$

et a pour limite $L(1+x)$, quand m tend vers μ.

Le second terme a pour limite

$$-\frac{A'_1 x + A'_2 x^2 + \ldots + A'_p x^p}{(1+x)^\mu},$$

les accents indiquent des dérivées par rapport à m, et ces dérivées étant calculées pour $m = \mu$. On a d'ailleurs, pour $p > \mu$,

$$A'_{\mu+1} = \overline{A}_{\mu+1}, \qquad A'_{\mu+2} = \overline{A}_{\mu+2}, \qquad \ldots,$$

le trait indiquant que l'on supprime le facteur égal à zéro; en effet, les fractions $\dfrac{A_{\mu+1} - a_{\mu+1}}{m-\mu}$, ... se réduisent à $\dfrac{A_{\mu+1}}{m-\mu}$, ... On a ainsi la formule (3').

Ce calcul revient d'ailleurs à multiplier les deux membres de la formule (3) par $(1+x)^m$, à prendre les dérivées des deux membres par rapport à m pour faire ensuite $m = \mu$, et à diviser par $(1 + x)^\mu$.

6. Cherchons ce que devient la formule [3], résultat d'une intégration par parties, quand m tend vers une valeur entière μ, avec $p \overline{\gtrless} \mu$. Si l'on fait, par exemple, $m = 3 + \varepsilon$, $p = 5$, la formule [3] peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon + 3)(\varepsilon + 2)(\varepsilon + 1)\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) \\
&\quad \times \int_0 = - \frac{x^5}{(1 + x)^{3+\varepsilon}}(\varepsilon + 2)(\varepsilon + 1)\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \ldots \\
&\qquad - \frac{5.4x^3}{(1 + x)^{1+\varepsilon}}\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) \\
&\qquad - 5.4.3x^2(1 + x)^{-\varepsilon}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) \\
&\qquad - 5.4.3.2x(1 + x)(1 + x)^{-\varepsilon}(\varepsilon - 2) \\
&\qquad - 5.4.3.2.1(1 + x)^2(1 + x)^{-\varepsilon} \\
&\qquad + 5.4.3.2.1;
\end{aligned}$$

en retranchant de cette formule celle que l'on obtient pour $\varepsilon = 0$, en divisant par ε, en faisant tendre ε vers zéro et en divisant par $3.2.1.-1.-2$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0 &= - \frac{x^5}{3(1 + x)^3} - \ldots - \frac{5.4x^3}{3.2.1(1 + x)} \\
&- \frac{5.4.3x^2}{3.2.1}\lim\left[\frac{(1 + x)^{-\varepsilon}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - (-1)(-2)}{(-1)(-2)\varepsilon}\right] \\
&- \frac{5.4.3.2x(1 + x)}{3.2.1(-1)}\lim\left[\frac{(1 + x)^{-\varepsilon}(\varepsilon - 2) - (-2)}{(-2)\varepsilon}\right] \\
&- \frac{5.4.3.2.1(1 + x)^2}{3.2.1(-1)(-2)}\lim\left[\frac{(1 + x)^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}\right];
\end{aligned}$$

les limites en question sont des dérivées par rapport à ε, dérivées prises pour $\varepsilon = 0$, savoir

$$\begin{aligned}
&- L(1 + x) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right), \\
&- (1 + x) - \left(\frac{1}{2}\right), \\
&- L(1 + x),
\end{aligned}$$

en se rappelant que

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

D'une manière générale, on a

$$[3'] \quad \int_0 \frac{x^p}{(1+x)^{m+1}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -\frac{x^p}{m(1+x)^m} - \ldots \\
& - \frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)x^{p-m+1}}{m(m-1)\ldots 1(1+x)} \\
& + \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)x^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1} \\
\times & \left[L(1+x) + \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-m}\right)\right] \\
& + \frac{p(p-1)\ldots(p-m)x^{p-m-1}(1+x)}{m(m-1)\ldots 1(-1)} \\
\times & \left[L(1+x) + \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-m}\right)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{p(p-1)\ldots 1(1+x)^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1(-1)\ldots[-(p-m)]} L(1+x).
\end{aligned}$$

Le calcul précédent revient à multiplier les deux membres de la formule [3] par $m(m-1)\ldots(m-p)$, à prendre les dérivées des deux membres par rapport à m pour faire ensuite $m = \mu$, et à diviser par $\mathfrak{M}$.

Pour $p = m$, on a simplement

$$\int_0 \frac{x^m}{(1+x)^{m+1}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{x^m}{m(1+x)^m} - \frac{x^{m-1}}{(m-1)(1+x)^{m-1}} - \ldots \\
& - \frac{x}{1+x} + L(1+x).
\end{aligned}$$

7. D'après la formule (3′), le facteur qui multiplie $L(1+x)$ dans la formule [3′] doit se réduire à $\frac{p!}{M}$; et, en effet, ce facteur est

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{m!}\left[x^{p-m}-\frac{p-m}{1}x^{p-m-1}(1+x)+\ldots\right],$$

ou

$$(-1)^{p-m}\frac{p!}{m}[x-(1+x)]^{p-m},$$

ou

$$\frac{p!}{M}.$$

D'autre part, la comparaison des formules (3′) et [3′] donne l'identité

$$\begin{aligned}\frac{M}{p!}\Bigg\{ & \frac{x^p}{m}+\frac{px^{p-1}(1+x)}{m(m-1)}+\ldots \\ & +\frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)x^{p-m+1}(1+x)^{m-1}}{m(m-1)\ldots 1} \\ & -\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)x^{p-m})(1+x)^m}{m(m-1)\ldots 1}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right) \\ & -\frac{p(p-1)\ldots(p-m)x^{p-m-1}(1+x)^{m+1}}{m(m-1)\ldots 1(-1)}\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right) \\ & -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -\frac{p(p-1)\ldots 2x(1+x)^{p-1}}{m(m-1)\ldots 1(-1)\ldots[-(p-m-1)]}\left(\frac{1}{p-m}\right)\Bigg\} \\ & = A'_1x+\ldots+A'_px^p,\end{aligned}$$

pour m entier et $p \gtreqless m$. Avec $p=m$, le premier membre se réduit à la première ligne.

On déduirait cette identité de celle du n° 4 en faisant d'abord entrer le facteur $m(m-1)\ldots(m-p)$ dans la parenthèse, etc., comme au n° 6.

8. Si l'on fait directement l'intégration par parties

dans le cas actuel, on a

$$\begin{aligned}
V_{m-1} &= \frac{(-1)^m}{m!\,(1+x)},\\
V_m &= \frac{(-1)^m}{m!} L(1+x),\\
V_{m+1} &= \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1+x}{1!} \left[L(1+x) - \frac{1}{1} \right],\\
V_{m+2} &= \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(1+x)^2}{2!} \left[L(1+x) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule qui diffère de la formule [3′] en ce que

$$L(1+x) + \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-m} \right)$$

est remplacé par $L(1+x)$, le dernier terme étant

$$\frac{p(p-1)\ldots 1\,(1+x)^{p-m}}{m(m-1)\ldots 1\,(-1)\ldots[-(p-m)]} \times \left[L(1+x) - \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-m} \right) \right];$$

mais il faut ajouter une constante

$$\begin{aligned}
C &= \frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1\ldots[-(p-m)]} \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-m} \right)\\
&= (-1)^{p-m} \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{m(m-1)\ldots 1} \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-m} \right).
\end{aligned}$$

Voici la raison de cette différence. Dans la formule générale d'intégration par parties données au début du n° 4, on peut remplacer V, V_1, ... par

$$V + C, \quad V_1 + C\frac{x}{1!} + C_1, \quad \ldots;$$

et, à partir de V_m, les intégrales V écrites au début du n° 7 ne sont pas les limites des intégrales correspondantes du n° 4. On avait

$$V_\mu = \frac{(-1)^\mu}{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}\,\frac{-(1+x)^{\mu-m}}{m-\mu},$$

et il faut considérer

$$\frac{-(1+x)^{\mu-m}+1}{m-\mu}$$

pour avoir comme limite $L(1+x)$; etc. On serait arrivé à la formule [3′] en remplaçant, au début du n° 8, $L(1+x)$ par $L(1+x)+\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)$, comme on le pouvait.

Pour passer de la formule [3′] à celle que l'on vient d'obtenir, on pose

$$L(1+x)+\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{p-m}\right)=X;$$

le facteur qui multiplie X est, d'après ce qu'on a vu au début du n° 7,

$$(-1)^{p-m}\frac{p!}{M}[x-(1+x)]^{p-m},$$

ou

$$\frac{p!}{M};$$

on retrouve ainsi la constante C. Inversement, si l'on multiplie la constante C par le développement de l'expression

$$[(1+x)-x]^{p-m}$$

qui est égale à 1, afin de rendre le second membre de la formule actuelle homogène par rapport à x et $1+x$, et si l'on réduit les termes semblables, on obtient la formule [3′] qui présente cette homogénéité.

[H5e]

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES, TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE LA FONCTION ET DE LA VARIABLE;

PAR M. PAUL SUCHAR,
Professeur au Lycée de Pau.

1. M. Appell, dans son Mémoire (*Acta mathematica*, 1891), avait étudié et avait donné l'intégrale d'une classe étendue des équations différentielles linéaires et homogènes, transformables en elles-mêmes par un changement de la variable et par un changement linéaire de la fonction. Je me propose d'intégrer une classe d'équations différentielles, différente de celle étudiée par M. Appell et transformables en elles-mêmes par un changement de la variable et de la fonction qui n'est plus linéaire.

2. Toute équation différentielle linéaire et homogène du second ordre peut toujours être ramenée, comme on sait, à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)y. \tag{1}$$

Effectuons le changement de la variable et de la fonction en posant

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

$$z = \frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

où $\varphi(t)$ est continue, admet une dérivée et de plus la fonction $\varphi(t) - t$ a au moins un zéro. Supposons que l'équation (1) soit transformable en elle-même, c'est-à-dire soit transformable en une autre qui ne diffère de (1) que par le changement de x en t et de y en z. Si cette condition est réalisée, l'équation (1) admet au moins une solution $y = F(x)$, vérifiant la relation

$$(F'_x)_{x=\varphi(x)} = A\,F(x),$$

où A est une constante, c'est-à-dire que l'équation (1) admet au moins une solution telle que, si sur la dérivée de cette fonction on effectue la substitution $x = \varphi(x)$, on obtient sa primitive à un facteur constant près.

En effet, si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (1), les fonctions

$$[F'_1(x)]_{x=\varphi(t)}, \qquad [F'_2(x)]_{x=\varphi(t)}$$

sont aussi solutions de la même équation et l'on aura

$$[F'_1(x)]_{x=\varphi(t)} = a_1 F_1(t) + b_1 F_2(t),$$
$$[F'_2(x)]_{x=\varphi(t)} = a_2 F_1(t) + b_2 F_2(t).$$

Si l'on pose

$$F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x),$$

on pourra déterminer les constantes λ_1, λ_2 de manière à avoir

$$(F'_x)_{x=\varphi(t)} = A\,F(t),$$

où A est une solution de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 - A & a_2 \\ b_1 & b_2 - A \end{vmatrix} = 0.$$

3. Différentions la relation (3), on a

$$\frac{dz}{dt} = \varphi'(t) f[\varphi(t)] y;$$

différentions à nouveau cette dernière relation, on a, en ayant égard à (3),

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = y \frac{d}{dt} \{ \varphi'(t) f[\varphi(t)] \} + \varphi'^2(t) f[\varphi(t)] z.$$

L'équation (1) sera transformable en elle-même si l'on a

$$\frac{d}{dt} \{ \varphi'(t) f[\varphi(t)] \} = 0, \qquad \varphi'^2(t) f[\varphi(t)] = f(t).$$

La première nous donne

$$(4) \qquad \varphi'(t) f[\varphi(t)] = a,$$

a étant la constante d'intégration, d'où l'on déduit

$$(5) \qquad f(t) = a\,\varphi'(t).$$

La fonction $f(t)$ sera donc déterminée si l'on se donne la fonction $\varphi(t)$. Si dans cette dernière relation nous changeons t en $\varphi(t)$ et si nous multiplions les deux membres par $\varphi'(t)$, on aura

$$\varphi'(t) f[\varphi(t)] = a\,\varphi'(t)\,[\varphi'(t)]_{t=\varphi(t)},$$

d'où il résulte, d'après (4),

$$\varphi'(t)\,[\varphi'(t)]_{t=\varphi(t)} = 1,$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{d}{dt} \{ \varphi[\varphi(t)] \} = 1;$$

d'où, en intégrant cette dernière relation depuis t_0 à t, t_0 étant un zéro de $\varphi(t) - t$, on trouve que la fonction $\varphi(t)$ supposée donnée doit être solution de l'équation fonctionnelle

$$\varphi[\varphi(t)] = t,$$

équations dont toutes les solutions ont été déterminées par M. Lattès dans son article *Sur les courbes invariantes par polaires réciproques* (*Nouvelles Annales*, juillet 1906), en posant, comme l'indique son raisonnement ainsi que son calcul,

$$t = F(u) - \Phi(u),$$
$$x = \varphi(t) = F(u) + \Phi(u),$$

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires, l'une paire, l'autre impaire, définies dans le domaine de $u = 0$.

En résumé, l'équation (1) est transformable en elle-même par le changement (2) et (3) si la fonction $\varphi(t)$ vérifie la relation

$$\varphi[\varphi(t)] = t,$$

et si la fonction $f(t)$ est le produit de la dérivée d'une de ces solutions $\varphi(t)$ par une constante arbitraire. Remarquons que l'on peut particulariser la valeur de la constante a sans diminuer la généralité de la fonction $f(t)$, car deux déterminations de $f(t)$ qui ne diffèrent que par un facteur constant peuvent être considérées comme identiques; on aura donc

$$f(t) = \varphi'(t); \tag{6}$$
$$\varphi[\varphi(t)] = t, \tag{7}$$
$$f(t)f[\varphi(t)] = 1; \tag{8}$$

cette dernière s'obtient en différentiant la relation (7).

Il s'ensuit, d'après ce qui précède, que *la dérivée d'une solution de l'équation* (1) *sur laquelle on fait la substitution $x = \varphi(x)$ est une solution de la même équation* et ces deux solutions forment en général un système fondamental de l'équation (1).

4. Nous allons déterminer l'intégrale générale, nous allons la donner à l'aide d'un développement bien

connu. Soient x_0 une valeur de x pour laquelle la fonction $f(x)$ est finie et déterminée et x_0 à x un intervalle donné où la fonction $f(x)$ est finie et déterminée pour toutes les valeurs de x dans cet intervalle; enfin désignons par A et B les valeurs que prennent la fonction y et sa dérivée pour $x = x_0$. Intégrons deux fois entre x_0 et x les deux membres de l'équation (1), on aura

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx;$$

multiplions les deux membres par $f(x)$, on a, d'après (1),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{A} f(x) + \mathrm{B}(x - x_0) f(x) + f(x) \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x) dx;$$

en intégrant à nouveau et en continuant ainsi, on trouve

$$(9)\quad \begin{aligned} y = {} & \mathrm{A}\Big[1 + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \\ & \qquad + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \ldots\Big] \\ & + \mathrm{B}\Big[x - x_0 + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x) \\ & \qquad + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx + \ldots\Big] \\ & + \mathrm{R}_n. \end{aligned}$$

Le terme complémentaire

$$\mathrm{R}_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x) y\, dx$$

est une intégrale multiple d'ordre $2n$, si les deux suites précédentes renferment n termes. La loi de formation des termes est déterminée, chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par $f(x)\,dx^2$, et en effectuant deux intégrations successives entre x_0 et x. Je dis que le terme complémentaire R_n tend vers zéro lorsque n croît et que les deux suites sont absolument convergentes. En effet, soient m et M le maximum du module de la fonction $f(x)$ et y, dans l'intervalle de x_0 à x; on a

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx < m.\operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^2}{2!},$$

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx < m^2 \operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^4}{4!},$$

. . . . ;

de même pour les termes coefficients de B,

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-x_0) f(x)\,dx < m.\operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^3}{3!}, \quad \dots,$$

et

$$\operatorname{mod} R_n < M m^n \operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^{2n}}{2n!};$$

donc, *a fortiori*,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} y < \frac{1}{2}\operatorname{mod} A\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right) \\ + \frac{1}{2\sqrt{m}}\operatorname{mod} B\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} - e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right) \\ + M \operatorname{mod}\frac{\left[(x-x_0)\sqrt{m}\right]^{2n}}{2n!};\end{aligned}$$

or, $\operatorname{mod}\frac{\left[(x-x_0)\sqrt{m}\right]^{2n}}{2n!}$ peut devenir plus petit qu'une quantité donnée ε, si n croît, et si nous désignons par α le maximum de l'expression

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{mod} A\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right) \\ + \frac{1}{2\sqrt{m}}\operatorname{mod} B\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} - e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right),\end{aligned}$$

dans l'intervalle de x_0 à x, valeur qui d'ailleurs est indépendante de n, on aura

$$\operatorname{mod} y < \alpha + M\varepsilon,$$

inégalité qui a lieu pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle considéré; on peut donc remplacer, dans l'inégalité précédente, $\operatorname{mod} y$ par son maximum et l'on a

$$M < \alpha + M\varepsilon,$$

d'où

$$M < \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Par conséquent M ne peut pas devenir infini; donc le terme complémentaire R_n, dont le module est moindre que $M \operatorname{mod} \frac{\left[(x - x_0)\sqrt{m}\right]^{2n}}{2n!}$, tend vers zéro, et les deux séries précédentes sont absolument convergentes, puisque R_n tend encore vers zéro si A ou B est nul. On remarque que les deux fonctions définies par ces séries sont linéairement indépendantes et comme chacune d'elles est une solution de l'équation différentielle (1), l'intégrale générale est donc

$$(10) \qquad y = A\,u(x) + B\,v(x),$$

en posant

$$(11) \qquad \begin{aligned} u(x) = 1 &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \ldots, \end{aligned}$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} v(x) = x - x_0 &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx + \ldots. \end{aligned}$$

5. Supposons que la fonction $f(x)$ au lieu d'être arbitraire, soit donnée par la relation (6) et que la fonction φ vérifie la relation (7); supposons de plus que la limite inférieure des intégrales qui figurent dans (11) et (12) soit un zéro de la fonction

$$\varphi(x) - x; \tag{13}$$

on remarque, d'après (8), qu'on a

$$\operatorname{mod} f(x_0) = 1;$$

par conséquent la fonction $f(x)$ est finie pour $x = x_0$ et les deux séries définies par (11) et (12) sont encore convergentes. Je dis que l'une quelconque de ces fonctions est égale à la dérivée de l'autre après avoir remplacé x par $\varphi(x)$. En effet, les termes de (11) s'écrivent en effectuant une première intégration

$$\begin{aligned} u(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx + \ldots . \end{aligned} \tag{14}$$

Remarquons que l'on peut encore écrire les termes de cette dernière série, à partir du troisième, comme il suit : la dérivée du troisième terme étant

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ = \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx, \end{aligned} \tag{15}$$

obtenue en remplaçant dans la limite de l'intégrale et dans l'élément différentiel x par $\varphi(x)$ et en ayant égard à (8). En effet, posons

$$s = \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx;$$

changeons dans cette fonction x en $\varphi(x)$ et prenons la dérivée par rapport à x, on aura

$$f(x)\,(s'_x)_{x=\varphi(x)} = \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

changeons dans cette dernière égalité x en $\varphi(x)$, on a, en ayant égard à (7) et (8),

$$s'_x = f(x) \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

fonction qui est aussi la dérivée par rapport à x de la fonction

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx;$$

donc cette fonction et la fonction s, ayant même dérivée, diffèrent par une constante, et comme ces fonctions s'annulent pour $x = x_0$, cette fonction est donc nulle et la relation (15) a donc lieu; on a donc, en multipliant les deux membres de (15) par dx et en intégrant entre x_0 et x,

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ &\equiv \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx. \end{aligned}$$

La dérivée du quatrième terme de (14) étant

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

on démontre de la même manière qu'on a identiquement

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\,dx$$
$$\equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\,dx;$$

d'où, en multipliant les deux membres par dx et en intégrant entre x_0 et x, le quatrième terme de (14) sera donc remplacé par

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\,dx,$$

et ainsi de suite; donc la fonction $u(x)$ peut s'écrire

$$(16)\quad u(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\,dx + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\,dx + \ldots,$$

où chaque terme se déduit du précédent en changeant x en $\varphi(x)$, en le multipliant par dx^2 et en intégrant une première fois entre x_0 et $\varphi(x)$ et une deuxième fois entre x_0 et x.

Une remarque analogue sera faite sur les termes de la fonction $v(x)$ donnée par (12); ainsi la dérivée par rapport à x du deuxième terme de $v(x)$ étant

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx,$$

si l'on change dans la limite de l'intégrale et dans l'élément différentiel x en $\varphi(x)$ et en ayant égard à (8), on a identiquement

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx \equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\,dx;$$

posons, comme précédemment,

$$\alpha = \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

changeons dans cette relation x en $\varphi(x)$ et en dérivant par rapport à x, on a

$$f(x)\,(\alpha'_x)_{x=\varphi(x)} = \varphi(x) - x_0.$$

Changeons dans cette relation x en $\varphi(x)$, on aura, d'après (7) et (8),

$$\alpha'_x = (x - x_0) f(x);$$

on a donc

$$\alpha = \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx,$$

puisque les deux fonctions

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx$$

s'annulent pour $x = x_0$; donc ces deux fonctions sont identiques, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx \equiv \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx.$$

On démontre de même que le terme suivant de $v(x)$ peut être remplacé par

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

et ainsi de suite, la loi de formation des termes étant la même que pour la fonction $u(x)$; donc la fonction $v(x)$ sera définie par

$$(17)\quad v(x) = x - x_0 + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx + \ldots$$

Sous cette forme, on reconnaît que chacune des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ données par (16) et (17) est la dérivée de l'autre après avoir fait la substitution $x = \varphi(x)$; on peut donc poser

$$v(x) = (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \tag{18}$$

et comme ces fonctions, comme nous l'avons vu, sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1), son intégrale générale est donc

$$y = \mathrm{A}\, u(x) + \mathrm{B}(u'_x)_{x=\varphi(x)}.$$

6. Les deux fonctions $u(x)$ et $(u'_x)_{x=\varphi(x)}$ étant deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (1), les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} \omega(x) = u(x) + (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \\ \pi(x) = u(x) - (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \end{array}\right. \tag{19}$$

forment aussi un système fondamental de l'équation (1). Si nous prenons la dérivée de ces fonctions, on a, en ayant égard à l'équation (1) et (8),

$$\omega'(x) = \omega[\varphi(x)], \qquad \pi'(x) = -\pi[\varphi(x)],$$
$$(\omega'_x)_{x=\varphi(x)} = \omega(x), \qquad (\pi'_x)_{x=\varphi(x)} = -\pi(x).$$

Il s'ensuit qu'à chaque fonction $\varphi(x)$, solution de (7), correspond une équation différentielle (1) et cette équation admet un couple de solutions formant un système fondamental et tel que *si dans l'une d'elles on fait la substitution $x = \varphi(x)$, on obtient au signe près sa dérivée, de même si sur la dérivée de l'une d'elles on fait la même substitution, on obtient sa primitive au signe près et à une constante près.*

M. Lattès, dans sa Thèse (*Sur les équations fonc-*

tionnelles, etc., Paris, 1906), et en se plaçant à un autre point de vue, a donné, à la page 92, un exemple d'une fonction telle que sa dérivée se déduise de la fonction en effectuant sur la variable une substitution donnée.

7. Comme application, considérons le cas où $\varphi(x) = x$, dans ce cas la fonction (13) admet en particulier pour zéro $x = 0$, en prenant pour limite inférieure des intégrales $x_0 = 0$, et en mettant à la place de $\varphi(x)$ sa valeur x dans les fonctions $u(x)$ et $v(x)$, c'est-à-dire $(u'_x)_{x=\varphi(x)}$, on trouve que les fonctions $\omega(x)$ et $\pi(x)$ sont représentées par les développements des fonctions exponentielles e^x et e^{-x}.. Ce résultat est d'ailleurs évident, car dans ce cas particulier $f(x) = 1$ et l'équation (1) est alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y.$$

2° Si $\varphi(x) = -x$, la fonction (13) n'admet qu'un seul zéro, $x = 0$, en le prenant pour limite inférieure des intégrales, on trouve que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ représentent la première le développement de $\cos x$ et la dernière le $\sin x$, donc $\omega(x)$ et $\pi(x)$ sont données par

$$\omega(x) = \cos x + \sin x,$$
$$\pi(x) = \cos x - \sin x.$$

Quant à l'équation différentielle (1), elle est, dans ce cas,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

3° Considérons en dernier lieu $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, les zéros de la fonction (13) sont $x = \pm 1$ si l'on prend pour limite inférieure des intégrales $x_0 = 1$, on trouve

$$\omega(x) = \sqrt{x}\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right],$$

$$\pi(x) = \sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right].$$

On remarque, en effet, qu'il suffit de changer x en $\frac{1}{x}$ pour obtenir les dérivées de ces fonctions au signe près. Enfin, on remarque aussi que dans ce cas l'équation (1) est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}y,$$

équation qui se ramène, comme on sait, à une équation du même ordre à coefficients constants.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1913).

Mathématiques spéciales.

I. *Par deux points fixes* A *et* A′ (AA′ $= 2a$), *on fait passer un cercle variable de centre* C; *un cercle de rayon a passe par le point* C *et son centre* C′ *est sur la perpendiculaire à* AA′ *en son milieu, le vecteur* $\overline{\mathrm{CC}'}$ *ayant toujours le même sens. Construire le lieu* Γ *des points communs aux deux cercles.* (*On pourra exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonctions d'un paramètre.*)

II. *Une droite variable* D *perpendiculaire à* AA′ *rencontre* Γ *en quatre points* M_1, M'_1, M_2, M'_2; *au* *point* M_1 *on peut associer un point* M'_1 *tel que le milieu du segment* $M_1M'_1$ *décrive un cercle* Γ_1 ; *montrer que les droites* AM_1, $A'M'_1$ *sont rectangulaires. Construire le lieu des milieux de tous les segments déterminés sur* D *par* Γ.

III. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *rencontrent* Γ *en quatre points formant deux couples de points associés* M_1 *et* M'_1 ; *si l'on suppose un de ces couples constitué par deux points fixes, le lieu des centres des hyperboles correspondantes est un cercle; quel est le lieu du centre de ce cercle et quelle est l'enveloppe de ce cercle, quand on fait varier les points associés supposés fixes primitivement ?*

IV. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *et sont tangentes à* Γ *se distribuent en plusieurs faisceaux ponctuels et une famille constituée par des hyperboles bitangentes à* Γ.

On considère deux hyperboles H_1 *et* H_2 *qui font partie de cette famille et sont tangentes à* Γ, *l'une en* M_1 *et* M'_1, *l'autre en* M_2 *et* M'_2, *ces quatre points étant en ligne droite; montrer que la droite qui joint le milieu de* $M_1M'_1$ *au point de rencontre* M *des tangentes à* Γ *en* M_1 *et* M'_1 *est tangente au cercle* Γ_1.

H_1 *et* H_2 *ont une corde commune qui ne passe par aucun des points* A, A′; *soit* P *le point où cette corde rencontre* AA′; *trouver l'enveloppe de* MP.

Solution par M^lle L. GRUMEAU, à Poitiers.

I. Prenons pour axes AA′ et la perpendiculaire en son milieu O. Soient (C) et (C′) les cercles mobiles de centre C et C′. Si l'ordonnée de C est λ, leurs équations respectives sont

$$(C) \qquad x^2+y^2-2\lambda y = a^2,$$
$$(C') \qquad x^2+y^2-(2\lambda+a)y+\lambda^2+2\lambda a = 0,$$

qui donnent pour les points de rencontre

$$y = \frac{(\lambda+a)^2}{2a}, \qquad x^2 = \frac{(\lambda^2+a^2)(3a^2-\lambda^2)}{4a^2}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$a^2+\lambda^2 = 2ap,$$

d'où

$$\lambda = \pm\sqrt{a(2p-a)}.$$

Alors

$$y = p+\lambda, \qquad x^2 = p(2a-p);$$

on en déduit pour l'équation de Γ

$$(x^2+y^2)^2+4ay(x^2-y^2)-2a^2(x^2-y^2)-4a^3y+a^4 = 0.$$

A chaque valeur de p correspondent deux valeurs opposées de λ, donc quatre points, d'abscisses

$$\pm\sqrt{p(2a-p)}$$

et d'ordonnées

$$p\pm\sqrt{a(2p-a)}$$

que nous désignerons par y_1 et y_2.

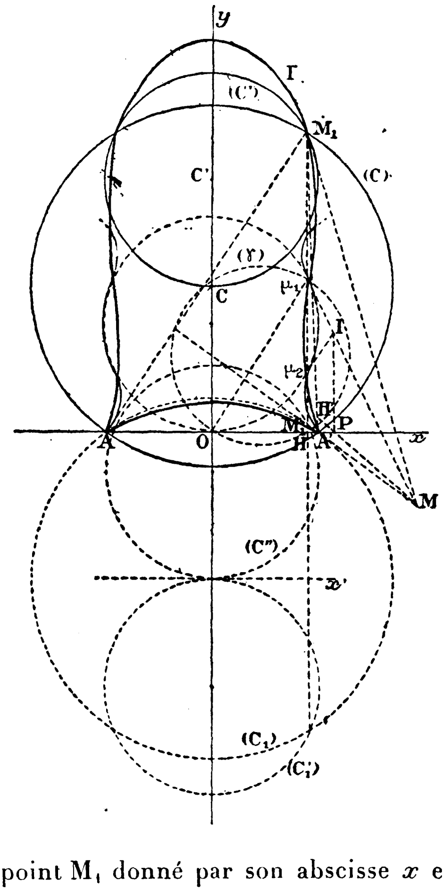
Pour construire Γ, il nous suffit de faire varier p de $\frac{a}{2}$ à $2a$ et à cause de la symétrie par rapport à Oy, nous ne prendrons que la valeur positive de x. La variation se résume en

p	$\frac{a}{2}$		a		$2a$
y_1	$\frac{a}{2}$	$\nearrow$	$2a$	$\nearrow$	$a(2+\sqrt{3})$
y_2	$\frac{a}{2}$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$a(2-\sqrt{3})$
x	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	0.

On en déduit la forme de la courbe donnée sur la figure. Elle présente deux rebroussements en A et A′ et les tangentes sont à 45° sur les axes.

II. Quand on se donne x, on a p par l'équation $p^2 - 2ap + x^2 = 0$. A chaque racine correspondent deux valeurs opposées pour λ, donc deux points réels ou imaginaires dont le milieu μ_1 a pour ordonnée p et la relation $x^2 + p^2 - 2ap = 0$ montre que μ_1 est sur un cercle Γ_1 de rayon a tangent à AA′ en O, ce qui détermine l'association demandée des points M_1, M'_1; ceux-ci devront donc correspondre à la même valeur de p.

Des considérations géométriques donnent facilement ce résultat. Faisons subir : 1° une symétrie par rapport à AA′ à toute la figure, (C) vient en (C_1) et (C′) en (C'_1); 2° une symétrie par rapport à une parallèle à AA′ menée par C_1 au cercle (C'_1) qui vient en (C″) et coupe (C_1) en M'_1. Il est facile de reconnaître qu'à un point M du lieu correspond ainsi un autre point M'_1 également du lieu, mais ces deux opérations équivalent à une translation -2λ parallèle à Oy. Le milieu μ_1 de $M_1M'_1$ se déduit donc de M_1 par une translation parallèle à Oy et égale à $-\lambda$, ce qui amène le cercle (C') en Γ_1 tangent à AA'. Ces opérations montrent en même temps que M'_1 est l'orthocentre de AM_1A'.



A un point M_1 donné par son abscisse x et correspondant aux valeurs p et λ des paramètres, on peut faire correspondre son associé $(p_1 - \lambda)$ et le lieu du milieu est Γ_1 ou l'autre racine p' de $p^2 - 2ap + x^2 = 0$ avec les deux valeurs $\pm\lambda'$ correspondantes, les milieux ont alors pour ordonnées $y = \frac{p+\lambda+p'\pm\lambda'}{2}$ en tenant compte de $p+p' = 2a$ et $pp' = x^2$, on en déduit l'équation du lieu

$$a^2x^2 = (y-a)^4 - a^2(y-a)^2 + a^4.$$

Le lieu se compose de deux branches symétriques par rapport à Oy. En ne s'occupant que de la branche $x > 0$, on voit qu'elle aura même forme générale que celle de la courbe représentant la variation du trinome bicarré

$$(y-a)^4 + a^2(y-a)^2 + a^4$$

et les parties pour lesquelles $|x| < a$ correspondent seules à des points réels sur Γ_1.

III. Une hyperbole équilatère H_1 passant par A, A', rebroussements de Γ, n'a évidemment que quatre autres points communs avec cette courbe du quatrième degré. Soit M_1 l'un d'eux, nous avons vu que son associé M'_1 est l'orthocentre de AM_1A', il est donc sur H_1 et si l'on suppose M_1, M'_1 fixes, le lieu du centre de H_1 est le cercle des neuf points (γ) du même triangle. Si N_1, N'_1 sont les deux autres points associés sur H_1 à AN_1A' ou AN'_1A' correspondrait un second cercle (γ'), le centre de H_1 est à l'intersection de γ et γ' et par suite symétrique de O par rapport à la ligne des centres de ces deux cercles. Le centre de (γ) est le milieu de $O\mu_1$, il décrit donc un cercle (Γ_2) homothétique à (Γ_1) dans le rapport $\frac{1}{2}$ et qui sera par suite tangent lui-même à AA' en O avec un diamètre a.

Quand M_1 et M'_1 varient, (γ) varie en passant par O; il touche son enveloppe au symétrique de O par rapport à la tangente au lieu de son centre, c'est-à-dire au pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente à (Γ_1) menée en μ_1; cette enveloppe est donc la podaire de (Γ_1) pour le point O, c'est-à-dire une cardioïde ayant O pour rebroussement et (Γ_2) pour base.

IV. Une hyperbole H_1 passant par A, A' et M_1 sera tangente à (Γ) en ce point si un deuxième point vient se confondre avec lui. Ce deuxième point peut être son associé M'_1 mais nous avons vu que deux points associés correspondent à la même valeur de p et à des valeurs opposées de λ, ce qui entraîne $\lambda = 0$, $p = \frac{a}{2}\cdot$ Il y a ainsi deux points $M_1 \begin{cases} x = \pm a, \\ y = \frac{a}{2}\cdot \end{cases}$

En chacun de ces points les hyperboles sont tangentes à la courbe et par suite à une parallèle à Oy. Comme elles passent par A et A', elles forment deux faisceaux ponctuels. Si le point qui vient se confondre avec M_1 n'est pas son associé, soit N_1 ce point, alors l'associé N'_1 de N_1 vient aussi se confondre avec M'_1 associé de M_1 et l'hyperbole est bitangente à (Γ). Une telle hyperbole aura pour centre le point où (γ) touche son enveloppe, c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en μ_1 à Γ_1.

Considérons une hyperbole H_1 rencontrant Γ aux points associés M_1, M'_1 et N_1, N'_1, les milieux des segments correspondants étant μ_1 et ν_1, la figure $N_1 M_1 M'_1 N'_1$ est un trapèze et les côtés non parallèles sont concourants avec la droite joignant les milieux des bases. Cette propriété aura encore lieu si N_1 se rapproche indéfiniment de M_1 et montre que les tangentes en M_1 et M'_1 à (Γ) sont concourantes avec la tangente en μ_1 à (Γ_1). $M\mu_1$ est pour H_1 le diamètre conjugué de la direction Oy.

Les hyperboles H_1 et H_2 déterminées par les points associés M_1, M'_1 (milieu μ_1) et M_2, M'_2 (milieu μ_2) auront leur seconde corde commune BB′ perpendiculaire à AA′, car par A, A′, B, B′ passent deux hyperboles équilatères et par suite l'un des quatres points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Le milieu I de BB′ est donc à la fois sur les tangentes à (Γ_1) en μ_1 et μ_2, donc à leur point de rencontre, par suite si H est le pied de $M_1M'_1$ sur AA′, AHA′P forment une division harmonique. La polaire de H par rapport à l'hyperbole H_1 passe donc par P; elle passe d'autre part au pôle M de $M_1M'_1$, c'est donc la droite MP et elle rencontre $HM_1M'_1$ en H′ conjugué de H par rapport à $M_1M'_1$. Les coordonnées de P sont $\frac{a^2}{x}$ et O (x étant l'abscisse de H).

Celles de H′ sont x et $\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2} = \frac{(p-a)^2}{p}$; l'équation de MP est donc

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \frac{a^2}{x} & 0 & 1 \\ x & \frac{(p-a)^2}{p} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$Xx + pY - a^2 = 0$$

en tenant compte de $a^2 - x^2 = (p-a)^2$; cette équation montre que MP est encore la polaire du point $\mu_1(x, p)$ par rapport au cercle fixe

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Quand le point μ_1 décrit (Γ_1), la droite enveloppe donc la conique, polaire réciproque de (Γ_1) par rapport à

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

(Γ_1) passant par O, centre de ce cercle, cette polaire réciproque sera une parabole ayant O pour foyer, Oy pour axe, $y = a$ pour directrice et d'équation

$$x^2 + 2ay - a^2 = 0.$$

Il est évident que toutes les propriétés de l'énoncé peuvent s'étendre à des coniques en en faisant soit une tranformation homographique, soit une perspective. Si I et J sont les homologues des points cycliques, l'homologue de (C) sera une conique passant par les homologues de A, A′ et par I et J, le pôle de IJ décrivant l'homologue de Oy. L'homologue de (C′) sera une conique passant par I, J et le pôle de IJ, tangente aux deux droites allant de A et A′ au point de rencontre de IJ avec l'homologue de Oy. Mais il est à remarquer qu'à un cercle (C) ne correspondait qu'un cercle (C′) parce que le vecteur CC′ avait un sens déterminé, cette restriction n'est plus possible quand on passe aux coniques. On trouverait donc, en même temps que la quartique homologue de (Γ), une deuxième quartique homologue de (Γ′), (Γ′) étant la symétrique de (Γ) par rapport à AA′.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \cos 2x + x^2 e^{2x}.$$

2° *Déterminer la solution y de cette équation telle que, si x est infiniment petit principal, y soit un infiniment petit du troisième ordre. Quelle est alors la partie principale des infiniment petits y, $1 - \cos y$, arc $\sin y$, y — arc $\sin y$?*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ :

1° *Montrer que les surfaces ayant pour équation*

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - R^2[x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2] = 0,$$

où R *désigne une longueur constante donnée et λ un paramètre arbitraire, sont des cônes de révolution autour de* OZ.

2° *Chercher l'enveloppe des génératrices de ces cônes situées dans le plan* XOZ. *En déduire la surface enveloppe de ces cônes.*

3° *Considérant, parmi les trajectoires orthogonales des génératrices précédentes, celles qui passent par un point donné (quelconque) du plan* XOZ, *dire à l'aide de quelle construction géométrique on peut obtenir les centres de courbure en ce point des trajectoires considérées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *En désignant par* OX, OY *deux axes rectangulaires, et par x, y les mesures de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point en centimètres, construire la courbe*

$$y = 10\, e^{-x^2} \sin 2x.$$

Déterminer en particulier, à 1mm *près, la valeur de la première ordonnée maxima à droite de* OY.

2° *A partir de quelle valeur absolue de x la valeur absolue de l'ordonnée y reste-t-elle constamment inférieure à $\frac{1}{10}$ de millimètre?*

3° *Calculer, d'une façon approchée, l'aire comprise entre* OX *et l'arc de courbe qui va du point* O *jusqu'au premier point de rencontre avec* OX *à droite de* O. *Indiquer l'approximation obtenue.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Étudier la convergence de la série*

$$1 + 3x^3 + 6x^6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{3n-3} + \ldots.$$

2° *Vérifier que dans l'intervalle de convergence la somme* $y(x)$ *de cette série vérifie la relation différentielle*

$$(1 - x^3)y' - 9x^2 y = 0.$$

Déduire de là une expression de la fonction $y(x)$ *qui la définisse pour toutes les valeurs de* x.

3° *Calculer* $Y = \int_0^x x^2 y\, dx$, *et développer cette fonction* Y *en série entière suivant les puissances de* x.

II. 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on propose de déterminer dans le plan* XOY *la courbe la plus générale satisfaisant à la condition suivante : si l'on désigne par* M *un point quelconque de la courbe, par* C *le centre de courbure de la courbe en* M, *et par* N *le point d'intersection de la normale en* M *avec* OX, *le point* N *doit être le milieu de la distance* MC. *Faire voir que cette courbe est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon arbitraire roulant sans glissement sur* OX, *et à laquelle on a imprimé, parallèlement à* OX, *une translation arbitraire.*

2° *Assujettissant désormais la courbe à passer par le point* O, *considérant, parmi ses points d'intersection avec la partie positive de* OX, *celui qui est à la plus petite distance de* O, *et désignant par* A *le point dont il s'agit, on propose de déterminer le centre de gravité de l'arc* OA.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les trois axes* OX, OY, OZ *étant rectangulaires, on considère l'ellipsoïde de révolution dont les trois demi-axes, respectivement dirigés suivant* OX, OY, OZ, *ont pour longueurs*

$$OA = OB = 1^m, \qquad OC = 2^m.$$

1° *Déterminer à* 1^{cm^3} *près le volume limité par l'ellipsoïde, le plan* XOY, *et le plan parallèle à* XOY *de cote* 75^{cm}.

2° *Déterminer à* 1^{cm} *près la cote d'un plan* P *parallèle à* XOY, *tel que le volume compris entre le plan* XOY, *le plan* P *et l'ellipsoïde soit égal à* 2^{m^3}.

NOTA. — *On donne* $\pi = 3{,}1415926535\ldots$; *on prendra dans les calculs le nombre de décimales utiles.*

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' - 3ay' + 2a^2y = (bx+1)e^{bx},$$

où a *et* b *désignent des constantes données.*

On exprimera l'intégrale générale dans les quatre cas suivants :

$$(\alpha) \qquad a \neq 0, \qquad b \neq a, \qquad b \neq 2a;$$
$$(\beta) \qquad a \neq 0, \qquad b = a;$$
$$(\gamma) \qquad a \neq 0, \qquad b = 2a;$$
$$(\delta) \qquad a = 0.$$

2° *Dans le cas*

$$a \neq 0, \qquad b = a,$$

déterminer l'intégrale particulière de l'équation différentielle (1) *qui s'annule ainsi que sa dérivée pour* $x = -\dfrac{2}{a}$. *Quelle est, lorsqu'on fait varier* a, *l'enveloppe de la courbe intégrale correspondante ?*

3° *Pour* $b = a = 1$, *la courbe intégrale particulière spécifiée dans* 2° *est*

$$y = -\frac{e^x}{2}(x+2)^2.$$

Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe OY *et l'axe* OX.

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère les deux paraboles*

$$(\mathrm{P}) \qquad y^2 - 2px = 0,$$
$$(\mathrm{Q}) \qquad x^2 - 2qy = 0.$$

Sur (P) *on prend un point* M *de coordonnées* x, y; *la* *tangente en* M *à* (P) *rencontre la parabole* (Q) *en deux points* N, N'.

1° *Former l'équation dont les racines sont les abscisses des points* N *et* N', *et calculer les coordonnées* X, Y *du point* I, *milieu de* NN', *en fonctions de* y, *ordonnée de* M.

2° *Construire la courbe* C, *lieu du point* I.

3° *Montrer que cette courbe* C *est tangente à la parabole* (P) *en un point* A *dont on calculera les coordonnées.*

Calculer le rapport des rayons de courbure de la courbe C *et de la parabole* (P) *au point* A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *sur lesquels les abscisses* x *et les ordonnées* y *sont mesurées en centimètres :*

1° *Construire la courbe*

$$y = x\,\mathrm{L}(1+x^2)$$

(L *désigne le logarithme népérien. On donne* $\mathrm{L}.10 = 2,3026$).

On calculera à l'aide des Tables de logarithmes les ordonnées des points d'abscisses 1, 2, 3, *et les coefficients angulaires des tangentes en ces points.*

2° *Calculer avec trois décimales exactes, à l'aide du développement de* y *en une série entière par rapport à* x, *les ordonnées des points ayant respectivement pour abscisses*

$$0,25; \quad 0,5; \quad 0,75.$$

3° *Calculer avec deux décimales exactes l'abscisse du point ayant pour ordonnée* 1. (Juin 1913.)

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Soient deux axes rectangulaires* Oxy. *On donne sur* Ox *les points* A *et* B *tels que* $\overline{\mathrm{OA}} = l$, $\overline{\mathrm{BA}} = nl$ $(l > 0)$. *On décrit les cercles* Γ *et* C *qui passent par* A *et ont pour centres respectifs les points* O *et* B. *On fait rouler, sans glissement,* C *sur* Γ *de manière que la vitesse angulaire du centre* O' *soit égale à* 1, *l'origine des temps étant l'instant où ce centre est en* B. *Calculer, en fonction de* t, *les coordonnées du point* M *de* C *qui se trouvait en* A *à l'origine des temps.*

2° *Construire le centre de courbure en* M *de cette trajec-*

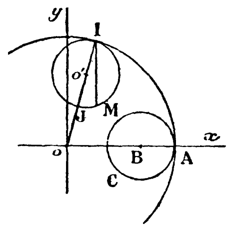


Fig. 1.

toire. Montrer qu'il divise MI *dans un rapport constant,* I *désignant le point de contact de* C *et* Γ.

3° *Construire les vecteurs vitesse et accélération du point* M. *On montrera que le vecteur accélération se trouve sur la droite symétrique de* MO *par rapport à* MI.

4° *Trouver les équations de la tangente et de la normale sous la forme canonique. En déduire que la développée se déduit de la trajectoire par une homothétie de centre* O, *suivie d'une rotation autour de* O. (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la parabole d'équation polaire* $r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$. *On prend son sommet* A *pour origine des arcs, la demi-tangente positive en ce point ayant pour angle polaire* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Calculer, en fonction de* θ, *l'arc* AM $= s$, *l'angle polaire de la demi-tangente positive* MT, *l'aire du secteur* AOM *et le rayon de courbure en* M. *On vérifiera que la perpendiculaire en* O *à* OM *coupe le rayon de courbure en son milieu.*

2° *Un point matériel, de masse* 1, *est assujetti à décrire la parabole sans frottement. Il est, en outre, attiré par* O *suivant la force* $\frac{1}{r^2}$. *On le lance de* A, *dans le sens positif, avec la vitesse* v_0. *Déterminer et décrire le mouvement. Calculer la réaction en fonction de* θ. *Vérifier que, si* v_0 *est convenablement choisie, cette réaction est constamment nulle. Expliquer ce résultat.* (Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient trois axes rectangu-*

laires $Oxyz$ *et le point* A *de* Oz *qui a pour cote* 1. *Sur* OA *comme diamètre, on décrit un cercle* (C) *dans le plan* yOz.

Soit d'autre part D *la première bissectrice de* $\widehat{zOx}$.

1° *On prend un point* P *sur* (C) *tel que l'angle de* Oy *avec* OP *soit égal à* φ. *On le joint au point* Q *de* D *qui a même cote. On obtient une droite* Δ, *dont on demande les équations. Trouver l'équation de la surface* (S) *qu'elle engendre quand* P *décrit* (C).

2° *On oriente* Δ *de* P *vers* Q. *Désignant par* M *un point quelconque de* Δ, *on pose* $\overline{PM} = \rho$. *Calculer les coordonnées de* M *en fonction de* ρ *et* φ.

3° *Ligne de striction de* (S) *et paramètre de distribution relatif à* Δ.

4° *Construire la section de* (S) *par le plan* $x = \frac{3}{8}$.

5° *Le point* M, *supposé de masse* 1, *est attiré par* O *suivant une force égale à* OM. *On l'abandonne de* P *sans vitesse initiale. Calculer* ρ *en fonction du temps. Calculer la réaction.*

Trouver les positions d'équilibre et l'équation polaire du lieu de leurs projections sur xOy. *Construire ce lieu.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \qquad \frac{dy}{dt} = y + t.$$

Déterminer une solution telle que $x = 0, y = 0$ *pour* $t = 0$. *Construire la courbe obtenue.*

Déterminer : 1° *l'aire comprise entre la courbe* Ox *et la droite* $x = 1$; 2° *l'aire comprise entre la courbe et la droite* $x = 1$.

Trouver les coordonnées des points d'inflexion à 0,01 *près.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *La droite* $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, *où* p *désigne une certaine fonction de* φ, *enveloppe une courbe* (C). *Soient* M *le point de contact,* N *le point de rencontre de la normale avec* Ox, P *la projection de l'origine sur la tangente.*

1° *Déterminer la fonction* p *pour que l'on ait constam-*

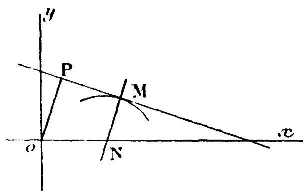
ment

$$\frac{\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{PO}}} = 1 - n,$$

n désignant une constante donnée.

2° *Montrer que pour une certaine valeur de n les courbes* (C) *ainsi obtenues sont telles que le rayon de*

Fig. 1.



courbure en M *soit fonction linéaire de p. Parmi les courbes parallèles à* (C), *il y en a alors une dont le rayon de courbure est triple de la normale limitée à* O*x*.

3° *Construire une des courbes* (C) *trouvées dans* (2°) *et calculer sa longueur totale.*

II. *Une tige homogène, d'épaisseur négligeable, de masse m, de longueur* 2*l*, *peut tourner autour d'un axe horizontal* O, *qui lui est perpendiculaire en son milieu. A une extrémité* A *est fixée une sphère homogène, de*

Fig. 2.

rayon R, *de masse* M *et de centre* A. *Le long de* OB *peut glisser une sphère identique à la première et dont on fixe le centre à une distance quelconque x de* O. *On obtient de la sorte un pendule composé dont on demande la durée* *d'oscillation. Variations de cette durée quand x croît de o à l. Calculer la longueur du pendule simple synchrone, en négligeant les rapports $\frac{m}{M}$ et $\frac{R}{l}$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer les équations*

$$y' \pm y = A e^x + B e^{-x} + C \cos(x + \alpha) + x^3.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient un trièdre trirectangle $Oxyz$ et le point A de Ox qui a pour abscisse $+1$. On considère le cylindre (C), qui admet pour section droite le cercle décrit dans xOy sur OA comme diamètre, et le cône de révolution (C′), qui a pour sommet A, dont l'axe de révolution est parallèle à Oz et dont l'angle au sommet vaut un droit. Ces deux surfaces se coupent suivant une ligne (Γ).*

1° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de cette ligne en fonction de l'angle polaire φ de sa projection sur xOy.*

2° *Trouver les équations des projections de (Γ) sur les plans de coordonnées et construire ces projections.*

3° *Trouver l'équation du conoïde droit qui a pour axe Oz et dont les génératrices s'appuient sur (Γ). Prouver que les plans qui passent par Ox coupent ce conoïde suivant des ellipses. Lieux des sommets et des foyers de ces ellipses.*

4° *Montrer que (Γ) est une sphère (Σ) de centre O et calculer l'aire de la surface qui limite le volume commun à (C) et (Σ).*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une solution de l'équation différentielle*

$$y'' + \frac{2}{a} y' + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) y = 0,$$

telle que $y = h$, $y' = 0$, pour $x = 0$.

Construire la courbe qui représente cette fonction.

Déterminer les points où la tangente est parallèle à Ox, et le rayon de courbure en ces points. (Juin 1913.)

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — On a inséré dans le fascicule du mois de mai la note qui annonçait en 1892 la publication de l'*Hyperespace*. Je dois dire que ce titre était mal choisi, car il n'indique pas l'idée nouvelle que j'ai introduite; et, si j'avais à le refaire, je me bornerais à montrer que, dans l'espace réel, même supposé euclidien, *les propriétés métriques d'une corrélation générale sont analogues à celles d'une polarité réciproque*, en un mot que les idées de Cayley peuvent être étendues. Quoi qu'il en soit, je conseille à ceux qui voudraient prendre connaissance de cette théorie de lire d'abord une Note insérée au *Bulletin de la Société mathématique* pour 1898, Note dans laquelle j'ai considéré les choses en Géométrie plane, et peut-être une autre Note parue dans le même recueil en 1904. Il y a lieu, d'ailleurs, de laisser de côté, dans une première lecture, l'Avertissement placé en tête de l'Ouvrage. Si le point de vue auquel je me suis placé rend assez pénible la lecture de cet Ouvrage, je crois pouvoir dire qu'il renferme une idée susceptible de donner lieu à des développements intéressants.

E.-N. Barisien. — *Au sujet de la solution* 2201 (**1914** p. 287-288). — M. T. Ono donne comme valeur commune des deux intégrales de l'énoncé

$$\pi\left[\frac{1}{2(a^2-b^2)^2(a^4b^4)^2}+\frac{ab(a^2-3b^2}{4(a^2-b^2)^2(a^6-b^6)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{a^2b^2(3a^4-b^4)}{4(a^4-b^4)^2(a^6-b^6)^2}-\frac{a^2b(a^7+a^5b^2+b^7)}{(a^4-b^4)(a^6-b^6)^3}\right],$$

alors que je trouve

$$\frac{\pi[2(a^2+b^2)^3+3ab(a^2+b^2)^2-a^3b^3]}{4(a+b)^3(a^2+b^2)^2(a^3+b^3)(a^4+a^2b^2+b^4)^2},$$

résultat *dont je suis certain* et qui n'est pas équivalent au résultat de M. T. Ono.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2202.

(1913, p. 96.)

Soient A, B, C, D *quatre sommets d'un parallélépipède, tels que deux quelconques d'entre eux soient les sommets opposés d'une même face du polyèdre. Soient* G_a *un cône du second ordre inscrit dans le trièdre formé par les trois faces qui se coupent en* A; G_b, G_c *et* G_d *les cônes parallèles à* G_a *ayant leurs sommets respectifs en* B, C, D.

Démontrer que les quatre cônes passent par un même point.

THIÉ.

SOLUTION.

Par M. R. B.

Prenons comme tétraèdre de référence ABCD, et soit

$$(1)\qquad x+y+z+t=0$$

l'équation du plan de l'infini.

Les faces du parallélépipède qui se coupent en A sont les plans menés par AB, AC et AD parallèlement aux arêtes CD, DB et BC respectivement. Elles ont pour équations

$$z+t=0, \qquad t+y=0, \qquad y+z=0.$$

L'équation d'un cône G_a inscrit à ce trièdre peut s'écrire

$$(2)\qquad \pm\sqrt{a(z+t)}\pm\sqrt{b(t+y)}\pm\sqrt{c(y+z)}=0.$$

On forme immédiatement l'équation du cône G_b en remplaçant dans l'équation (2) $t+y$ par $-(x+z)$ et $y+z$ par $-(x+t)$, ce qui donne

$$(3)\qquad \pm\sqrt{a(z+t)}\pm\sqrt{-b(x+z)}\pm\sqrt{-c(x+t)}=0.$$

En effet, cette équation est bien celle d'un cône ayant son sommet en B et ayant la même conique à l'infini que le cône G_a, à cause de l'équation (1).

On formera de même les équations des cônes G_c et G_d :

$$(4)\qquad \pm\sqrt{-a(x-y)}\pm\sqrt{b(t+y)}\pm\sqrt{-c(x+t)}=0,$$
$$(5)\qquad \pm\sqrt{-a(x+y)}\pm\sqrt{-b(x+z)}\pm\sqrt{c(y+z)}=0.$$

Dans les équations (2), (3) (4) et (5), les signes radieaux sont arbitraires. On peut les choisir de manière à mettre en évidence le fait que les quatre cônes ont un point commun. On prendra par exemple les formes

$$\begin{aligned}
\sqrt{a(z+t)} + \sqrt{b(t+y)} + \sqrt{c(y+z)} &= 0,\\
-\sqrt{a(z+t)} + \sqrt{-b(x+z)} + \sqrt{-c(x+t)} &= 0,\\
\sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{b(t+y)} - \sqrt{-c(x+t)} &= 0,\\
-\sqrt{-a(x+y)} - \sqrt{-b(x+z)} - \sqrt{c(y+z)} &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on obtient une identité, ce qui établit la proposition énoncée.

Remarque. — On peut supposer que les quatre cônes G_a, G_b, G_c, G_d sont de révolution. Si M est leur point commun, ils sont tangents à un même cône de révolution, de sommet M et parallèle à chacun d'eux.

Si l'on coupe la figure par un plan P, perpendiculaire aux axes des cônes de révolution G_a, G_b, etc., il est facile de voir qu'on est conduit au théorème suivant :

Soient α, β, γ *les trois côtés d'un triangle* et α', β', γ' *les côtés d'un second triangle respectivement parallèles à ceux du premier. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta'\gamma')$, $(\alpha'\beta\gamma')$, $(\alpha'\beta'\gamma)$ *sont tangents à un même cercle.*

J'ai démontré autrement ce théorème (dont on précise l'énoncé en introduisant la considération des demi-droites et des cycles), dans un article des *Nouvelles Annales* (4e série, t. VII, 1907, p. 491). *Voir* aussi, dans le même recueil, un article de M. M. Fouché (4e série, t. VIII, 1908, p 116).

Autre solution de M. T. Ono.

QUESTIONS.

2222. — Soient (E) une ellipse ayant pour axes Ox et Oy, M un point de cette ellipse. La tangente en M à (E) coupe Ox et Oy en α et β ; la normale les coupe en α' et β'. Soient (P) la parabole tangente en O à Ox et touchant les parallèles à la normale et à la tangente, menées respectivement par α et α'; (P') la parabole analogue, obtenue en remplaçant Ox par Oy.

1° Démontrer que les paraboles (P) et (P′) ont même axe et même foyer;

2° Donner une construction géométrique simple de l'axe et du foyer communs.

F. BALITRAND.

2223. — Soient M et M′ les extrémités de deux demi-diamètres conjugués, F et F′ les foyers d'une ellipse. Trouver le lieu du point d'intersection de MF, M′F′ ou de MF′, M′F.

T. ONO.

2224. — Étant donnés deux triangles ABC, A′B′C′, si les parallèles menées par A′, B′, C′ respectivement à BC, CA, AB, rencontrent les droites B′C′, C′A′, A′B′ en trois points collinéaires, de même, les parallèles menées par A, B, C respectivement à B′C′, C′A′, A′B′, rencontrent BC, CA, AB aussi en trois points collinéaires.

N. ABRAMESCU.

2225. — Soient Γ et C une conique et le cercle, inscrits dans le triangle ABC. Trouver le lieu du point de contact de la conique variable Γ avec la quatrième tangente commune au cercle C et à la conique Γ. Étudier le cas particulier quand la conique Γ est une parabole.

N. ABRAMESCU.

2226. — On donne une ellipse (ou une hyperbole) et un cercle ayant le même centre; trouver le lieu du point d'intersection des tangentes menées à la conique par les extrémités d'un diamètre du cercle.

T. ONO.

2227. — Le lieu du point d'intersection des normales menées aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse est une courbe du sixième ordre.

T. ONO.

2228. — Étant donnés deux faisceaux de cercles φ et φ', on associe, à chaque cercle du faisceau φ, le cercle du faisceau φ' qui lui est orthogonal. Démontrer que le lieu du centre du cercle qui passe par leurs points d'intersection et par un point fixe du plan est une conique.

R. GOORMAGHTIGH.

[O¹2b,e]

DÉTERMINATION DE LA TANGENTE ET DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT DE CERTAINES COURBES PLANES;

Par M. R. BOUVAIST.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorème. — *Soient* $f+\lambda\varphi=0$ *un faisceau linéaire de courbes algébriques planes, les courbes de base* f *et* φ *étant de degrés* m *et* n, *et* Γ *la courbe du faisceau passant par un point* O *du plan.*

1° *La tangente à* Γ *en* O *passe par l'intersection des droites polaires de* O *par rapport à* f *et* φ.

2° *Si* Q *et* Q_1, Q' *et* Q'_1 *sont les intersections de la tangente en* O *avec les coniques polaires de* O *par rapport à* f *et* φ, P *et* P' *les intersections de la normale en* O *avec les droites polaires de ce point par rapport à* f *et* φ, *le rayon de courbure de la courbe* Γ *au point* O *est donné par la formule*

$$\rho=\frac{\dfrac{m}{\overline{\text{OP}}}-\dfrac{n}{\overline{\text{OP}'}}}{\dfrac{m(m-1)}{\overline{\text{OQ}}.\overline{\text{OQ}'}}-\dfrac{n(n-1)}{\overline{\text{OQ}_1}.\overline{\text{OQ}'_1}}}.$$

1° Les droites polaires du point O par rapport à toutes les courbes du faisceau $f+\lambda\varphi$ passent par un point fixe, qui doit être sur la tangente en O à Γ, tangente qui est la polaire de O par rapport à Γ.

2° Soient

$$f=f_m+f_{m-1}+\ldots$$
$$+\mathrm{A}\,x^2+2\mathrm{B}\,xy+\mathrm{C}\,y^2+2\mathrm{D}\,x+2\mathrm{E}\,y+\mathrm{F}=0,$$

$$\varphi=\varphi_n+\varphi_{n-1}+\ldots$$
$$+\mathrm{A}'x^2+2\mathrm{B}'xy+\mathrm{C}'y^2+2\mathrm{D}'x+2\mathrm{E}'y+\mathrm{F}'=0$$

les courbes de base du faisceau, les axes étant la tangente et la normale en O à la courbe Γ. Si ρ est le rayon de courbure de Γ en O, on a

$$\rho = \frac{f'_y + \lambda\varphi'_y}{f''_{x^2} + \lambda\varphi''_{y^2}} = \frac{E + \lambda E'}{A + \lambda A'},$$

ou, puisque $F + \lambda F' = 0$,

$$\rho = \frac{\frac{E}{F} - \frac{E'}{F'}}{\frac{A}{F} - \frac{A'}{F'}}.$$

Les droites polaires de O par rapport à f et φ sont

$$2D\,x + 2E\,y + mF = 0,$$
$$2D'x + 2E'y + nF' = 0;$$

les coniques polaires sont

$$A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + (m-1)(2D\,x + 2E\,y) + \frac{m(m-1)}{2}F = 0,$$

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + (n-1)(2D'x + 2E'y) + \frac{n(n-1)}{2}F' = 0;$$

on en déduit

$$OP = -\frac{mF}{2E}, \qquad OP' = -\frac{nF}{2E'},$$

$$OQ.OQ_1 = \frac{m(m-1)}{2}\frac{F}{A}, \qquad OQ'.OQ'_1 = \frac{n(n-1)}{2}\frac{F'}{A'},$$

d'où

$$\rho = -\frac{\frac{m}{OP} - \frac{n}{OP'}}{\frac{m(m-1)}{OQ.OQ'} - \frac{n(n-1)}{OQ_1.OQ'_1}}.$$

Remarque. — Si l'on désigne par $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les points d'intersection d'une droite $OA_1A_2\ldots$ avec f, la droite polaire de O par rapport à f est le lieu des points P, tels que

$$\frac{m}{OP} = \sum_1^m \frac{1}{A_i},$$

la conique polaire de O par rapport à f est de même le lieu des points Q tels que

$$\sum_{1}^{m}\left(\frac{1}{OQ}-\frac{1}{OA_i}\right)\left(\frac{1}{OQ}-\frac{1}{OA_j}\right)=0;$$

on voit donc que, si l'on peut déterminer les points d'intersection de deux droites passant par O avec f et φ, on peut construire la tangente en O à Γ, et si de plus on peut déterminer les intersections de cette tangente avec f et φ, on peut construire le rayon de courbure de Γ en O.

Construction de la formule

$$\rho=\frac{\dfrac{m}{OP}-\dfrac{n}{OP'}}{\dfrac{m(m-1)}{OQ.OQ'}-\dfrac{n(n-1)}{OQ_1.OQ'_1}}.$$

La droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{OQ.OQ_1}{\lambda m(m-1)} & \dfrac{OQ.OQ_1}{(m-1)OP} & 1 \\ \dfrac{OQ'.OQ'_1)}{\lambda n(n-1)} & \dfrac{OQ'.OQ'_1}{(n-1)OP'} & 1 \end{vmatrix}=0$$

coupe visiblement la normale Oy au point d'ordonnée ρ. Le cercle PQQ_1 coupe Oy en P_1; le cercle PP_1A, A étant un point quelconque de Ox, coupe Ox en R; on a

$$OP_1=\frac{OQ.OQ_1}{OP} \quad \text{et} \quad OR=\frac{OP.OP_1}{OA}=\frac{OQ.OQ_1}{OA};$$

de P_1 et R on déduit le point S de coordonnées

$$\frac{OR}{m(m-1)},\ \frac{OP_1}{m-1};$$

on construit de même le point S' en partant des points P', Q', Q'_1; la droite TS' coupe Oy en T et l'on a $OT = \rho$.

Cas particuliers. — 1° *Courbes* $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n = K^n$. — Nous supposons que $\Delta_i \equiv x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i - p_i$; les courbes considérées sont donc les courbes n'ayant pas de points communs à distances finies avec leurs asymptotes.

Détermination de la tangente. — Dans le cas actuel, la courbe φ est la droite de l'infini; la tangente en un point O de la courbe considérée est donc parallèle à sa droite polaire par rapport aux asymptotes.

Détermination du rayon de courbure. — La formule générale donne $(n-1)\rho = \dfrac{OQ.OQ'}{OP}$, le cercle PQQ' coupe la normale en N et $ON = (n-1)\rho$. Les points Q et Q' sont d'ailleurs symétriques par rapport à O. Dans le cas des coniques, on a les propositions suivantes :

La tangente en un point M *d'une hyperbole coupe les asymptotes en* A *et* B; *la parallèle à* AB, *menée par le centre de la courbe, coupe la normale en* M *au point* N; *le cercle* ABN *coupe la normale en un point* N' *tel que* MN' *est égal au rayon de courbure en* M.

Et encore :

OA *et* OB *étant un couple de diamètres conjugués d'une ellipse de centre* O, *la perpendiculaire abaissée de* O *sur la tangente en* A *coupe cette tangente en* P, *la perpendiculaire élevée en* B *à la droite* PB *coupe* OP *en* P', PP' *est égal au rayon de courbure ou point* A.

Remarquons aussi que la méthode ci-dessus s'applique à la conchoïde de Külp $x^2(y^2+a^2)-a^4=0$ (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 193).

2° *Courbes du troisième ordre.* — L'équation d'une courbe de degré m peut s'écrire sous la forme $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_m+\varphi_{m-2}=0$, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m étant les asymptotes de la courbe, φ_{m-2} un polynome de degré $m-2$ en x et y; la méthode générale s'appliquera donc à toutes les courbes, telles qu'on puisse déterminer la droite et la conique polaire d'un point par rapport à la courbe $\varphi_{m-2}=0$: c'est le cas des courbes du troisième ordre pour lesquelles on a $\Delta_1\Delta_2\Delta_3+a^2\Delta_4=0$; on voit donc que :

La tangente en un point quelconque d'une courbe du troisième ordre passe par l'intersection de la droite polaire de ce point par rapport aux asymptotes, et de la droite joignant les points d'intersection de la courbe et des asymptotes.

La formule générale donne pour expression du rayon de courbure

$$\rho=\frac{\mathrm{OQ.OQ'}}{2\mathrm{OP}}-\frac{\mathrm{OQ.OQ'}}{6\mathrm{OP'}},$$

expression qui se construit immédiatement.

Remarquons enfin que la détermination de la droite et de la conique polaire d'un point par rapport à trois droites est particulièrement simple; on sait en effet que si O est le point donné et ABC le triangle des trois droites, les droites AO, BO, CO coupent BC, CA, AB en α, β, γ; les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ coupent BC, CA, AB en L, M, N; la droite LMN est la droite polaire de O, et la conique polaire est circonscrite au triangle ABC et admet pour tangentes en A, B, C les droites LA, MB, NC.

3° *Courbes du quatrième ordre.* — Pour ces courbes on a

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + a^2 \varphi_2 = 0,$$

la courbe $\varphi_2 = 0$ étant une conique; donc :

La tangente en un point d'une courbe du quatrième ordre passe par l'intersection des droites polaires de ce point par rapport aux asymptotes, et par rapport à la conique passant par les points d'intersection à distance finie de la courbe et de ses asymptotes.

Le rayon de courbure s'obtiendra en construisant, comme il a été dit plus haut, la formule générale.

Remarque. — Pour obtenir la droite et la conique polaire d'un point par rapport à quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, on remarquera que la droite et la conique cherchées coupent Δ_4 par exemple aux points d'intersection de cette droite avec la droite et la conique polaire du point donné par rapport à Δ_1, Δ_2, Δ_3. On construirait de même la droite et la conique polaire d'un point par rapport à un système de n droites.

4° *Courbes d'ordre supérieur au quatrième.* — Pour ces courbes $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_p + \varphi_{p-2} = 0$ la méthode ne s'appliquera que si la courbe $\varphi_{p-2} = 0$ se décompose en un système de droites et de coniques, tout au moins dans le cas général. Remarquons encore que la méthode générale s'applique aux courbes

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n + \lambda \Delta'_1 \Delta'_2 \ldots \Delta'_p = 0$$

ou

$$\Delta_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i;$$

elle conduit en particulier à une solution très simple du problème suivant : *Construire le rayon de courbure* *en un point d'une conique déterminée par cinq points.*

Remarque. — La nature des points à l'infini d'une courbe pouvant modifier à la fois la construction de la droite et de la conique polaire d'un point par rapport aux asymptotes, et la courbe φ_{p-2}, on aurait, en envisageant les divers cas qui peuvent se présenter, un grand nombre de propositions particulières qui ne peuvent trouver place dans un exposé aussi sommaire.

En voici quelques exemples :

Soient Γ *une cubique admettant une asymptote simple* D *coupant la courbe en* A, *et une asymptote de rebroussement* Δ, M *un point de la courbe, la parallèle à* D *menée par* M *coupe* Δ *en* M_1; *si l'on prend sur* OM_1 *le point* M'_1 *tel que* $\overline{OM'_1} = 3\,\overline{OM_1}$, *la droite passant par* M'_1 *et l'intersection de* D *et de* Δ, *coupe la parallèle à* Δ *menée par* A *en* T; TM *est la tangente à* Γ *en* M.

Soit Γ *une cubique circulaire passant par son foyer singulier* F *et d'asymptote* D; *soient* M *un point de la courbe,* Δ *la perpendiculaire menée à* MF *en* F, *les parallèles à* D *et* Δ *menées par* M *coupent* Δ *en* M_1, D *en* M_2; *si l'on prend sur* OM_1 *et* OM_2 *les points* M'_1 *et* M'_2 *tels que* $\overline{OM'_1} = \frac{3}{2}\overline{OM_1}$, $\overline{OM'_2} = 3\,\overline{OM_2}$, *la droite* $M'_1M'_2$ *coupe la tangente en* F *à* Γ *en* T, TM *est la tangente à* Γ *en* M.

Soit Γ *une quartique bicirculaire à asymptotes d'inflexion; soient* M *un point de cette courbe,* F *et* F′ *les foyers singuliers; la tangente en* M *à* Γ *est parallèle à la polaire de* M *par rapport aux perpendiculaires en* F *et* F′ *à* MF *et* MF′.

DEUXIÈME PARTIE.

Considérons dans le plan n points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et supposons que les distances $r_1, r_2, \ldots, r_n$ d'un point variable O à ces points fixes soient liées par la relation $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$; dans ces conditions le point O décrit une courbe C; déterminons la tangente et le rayon de courbure en O à cette courbe.

Prenons pour axes la tangente et la normale en O à C; nous avons

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f'_x = \sum_1^n f'_{r_i} r'_{ix} = 0,$$

ou, en désignant par α_i l'angle $\widehat{xOP_i}$,

$$\sum_1^n f'_{r_i} \cos\alpha_i = 0;$$

donc : la normale au point O de la courbe C est la résultante des vecteurs $\overline{OS}_i = f'_{ri}$ portés sur OP_i.

Cette construction est bien connue.

Le rayon ρ en O est donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}},$$

d'où, en remarquant que

$$r'_{ix} = \cos\alpha_i \qquad \text{et} \qquad r''_{ix^2} = \frac{\sin^2\alpha_i}{r_i},$$
$$r'_{iy} = \sin\alpha_i :$$

$$\rho = \frac{\displaystyle\sum_1^n f'_{r_i} \sin\alpha_i}{\displaystyle\sum_1^n (f''_{r_i^2} \cos^2\alpha_i + 2 f''_{r_i r_j} \cos\alpha_i \cos\alpha_j) + \sum_1^n f'_{r_i} \frac{\sin^2\alpha_i}{r_i}}.$$

Cette formule conduit à des constructions géométriques simples dans un certain nombre de cas que nous allons étudier rapidement.

1° *Courbes* $n_1 r_1 + n_2 r_2 + \ldots + n_n r_n = \mathrm{K}$. — Nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \frac{n_i \sin^2 \alpha_i}{r_i}}{\sum n_i \sin \alpha_i};$$

la perpendiculaire élevée en P_i à la droite OP_i coupe la normale en O au point N_i et l'on a

$$\frac{\sin \alpha_i}{r_i} = \frac{1}{ON_i},$$

d'où

$$\frac{\sum n_i \sin \alpha_i}{\rho} = \sum \left(\frac{n_i \sin \alpha_i}{ON_i} \right).$$

Pour déterminer la normale en O nous avons porté sur les droites OP_i des segments $OS_i = n_i$ et nous avons pris leur résultante, la longueur de cette résultante est égale à $\Sigma\, n_i \sin \alpha_i$, et si T_i est la projection de S_i sur la normale, $OT_i = n_i \sin \alpha_i$. Nous sommes donc ramenés à construire un segment ρ déterminé par la relation

$$\frac{m + n + \ldots + k + l}{\rho} = \frac{m}{ON_1} + \frac{n}{ON_2} + \ldots + \frac{l}{ON_n},$$

connaissant les quantités $m, n, \ldots, l$ et les points $N_1, N_2, \ldots, N_n$. La construction est immédiate, il suffit de déterminer les points N'_i tels que $ON_i . ON'_i = K^2$, de construire le point C' tels que

$$OC' = \frac{m\, ON'_1 + n\, ON'_2 + \ldots + l\, ON'_n}{m + n + \ldots + k + l},$$

et enfin le point C tel que $OC . OC' = K^2$; le point C sera le centre de courbure cherché.

Remarque. — Parmi les courbes étudiées se trouvent les quartiques bicirculaires pour lesquelles, r_1, r_2, r_3 désignant les distances d'un point de la courbe à trois foyers, on a $lr_1+mr_2+nr_3=0$, et les cubiques circulaires qui correspondent au cas où $l\pm m\pm n=0$.

Cas particulier. — Un cas particulièrement simple est celui des cartésiennes pour lesquelles on a $n_1 r_1 + n_2 r_2 = K$.

Supposons par exemple n_1 et n_2 de même signe, la normale sera comprise entre les droites FO, F'O, F et F' étant les foyers (cette supposition ne diminue d'ailleurs en rien la généralité du raisonnement quiva suivre); soit xOx' la tangente en O; posons

$$\widehat{\mathrm{FO}x}=\alpha, \qquad \widehat{\mathrm{F'O}x'}=\beta;$$

nous aurons

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{n_1\sin^2\alpha}{r_1}+\dfrac{n_2\sin^2\beta}{r_2}}{n_1\sin\alpha+n_2\sin\beta};$$

nous avons aussi $n_1\cos\alpha=n_2\cos\beta$ et en désignant par N l'intersection de la normale avec FF' :

$$\mathrm{ON}(r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta)=r_1 r_2\sin(\alpha+\beta),$$

d'où

$$\frac{r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta}{\rho}=r_2\cos\beta\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{ON}}+r_1\cos\alpha\frac{\sin^2\beta}{\mathrm{ON}},$$

la perpendiculaire élevée à ON en N coupe OF en A, OF' en A'; les perpendiculaires à ces droites en A et A' coupent ON en B et B'; on a

$$\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{ON}}=\frac{1}{\mathrm{OB}}, \qquad \frac{\sin^2\beta}{\mathrm{ON}}=\frac{1}{\mathrm{OB'}},$$

d'où

$$\frac{r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta}{\rho}=\frac{r_2\cos\beta}{\mathrm{OB}}+\frac{r_1\cos\alpha}{\mathrm{OB'}},$$

relation qui montre que le rapport anharmonique $\frac{OB}{OB'} : \frac{CB}{CB'}$ est égal à $\frac{r_2 \cos\beta}{r_1 \cos\alpha} = \frac{O\varphi'}{O\varphi}$, C désignant le centre de courbure en O, φ et φ' les projections de F et F' sur la tangente xOx', d'où la construction suivante :

Soit O *un point d'une cartésienne de foyers* F *et* F', *soit* N *le point d'intersection de la normale en* O *avec* FF', *soient* φ *et* φ' *les projections de* F *et* F' *sur la tangente en* O ; *la perpendiculaire à* ON *en* N *coupe* OF, OF' *en* A *et* A', *les perpendiculaires à ces droites en* A *et* A' *coupent* ON *en* B *et* B', *les droites* Bφ' *et* B'φ *se coupent en* K, *la projection du point* K *sur* ON *est le centre de courbure en* O.

Remarque. — Si $n_1 = \pm 1$, $n_2 = \pm 1$, on retrouve la construction classique du centre de courbure en un point d'une conique.

2° *Courbes* $r_1 r_2 \ldots r_n = K^n$. — On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\cos\alpha_i \cos\alpha_j}{r_i r_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin^2\alpha_i}{r_2^2}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\alpha_i}{r_i}},$$

ou, en désignant par T_i et N_i les points d'intersection de la perpendiculaire en P_i à OP_i avec la tangente et la normale en O,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \frac{1}{OT_i OT_j} + \sum \frac{1}{\overline{ON}_i^2}}{\sum \frac{1}{ON'_i}}.$$

Posons

$$OT_i . OT_j = \overline{OM}_i^2, \qquad OM_i . OM'_i = l^2, \qquad ON_i . ON'_i = l^2,$$

nous aurons

$$\frac{l^2}{\rho} = \frac{\sum \overline{\mathrm{OM}'_i}^2 + \sum \overline{\mathrm{ON}'_i}^2}{\sum \mathrm{ON}'_i};$$

une suite de moyennes proportionnelles donnera donc le segment ρ.

Cassiniennes. — L'équation des cassiniennes est $r_1 r_2 = \mathrm{K}^2$; en employant les notations qui nous ont servi dans le cas des cartésiennes, nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_2^2 \sin^2\alpha + r_1^2 \sin^2\beta - 2 r_1 r_2 \cos\alpha \cos\beta}{r_1 r_2 (\sin\alpha\, r_2 + \sin\beta\, r_1)},$$

d'où, en tenant compte des relations

$$r_2 \cos\alpha = r_1 \cos\beta,$$
$$\mathrm{ON}(r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta) = r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta):$$

$$(\alpha) \quad \frac{r_2 \cos\beta + r_1 \cos\alpha}{\rho} = r_2 \cos\beta \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{\mathrm{ON}} + r_1 \cos\alpha \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{\mathrm{ON}},$$

et le raisonnement employé dans le cas des cartésiennes nous conduit à la construction suivante :

Soient O *un point d'une cassinienne de foyers* F *et* F', N *le point d'intersection de la normale en* O *avec* FF', φ *et* φ' *les projections de* F *et* F' *sur la tangente en* O; *la perpendiculaire à* ON *en* N *rencontre les droites* OA *et* OA' *symétriques de la normale* ON *par rapport à* OF, OF' *en* A *et* A'; *si l'on porte sur* ON *les segments* $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}'} = \overline{\mathrm{OA}'}$ *et que l'on joigne les points* B, φ', B', φ, *les droites* Bφ', Bφ *se coupent en* K, *la projection de* K *sur* ON *est le centre de courbure en* O.

Remarque. — Précisons la construction précédente; elle se déduit immédiatement de la formule (α), qui peut s'écrire

$$\frac{O\varphi' + O\varphi}{OC} = \frac{O\varphi'}{OB} + \frac{O\varphi}{OB'},$$

avec

$$\frac{1}{OB} = \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{ON},$$

$$\frac{1}{OB'} = \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{ON};$$

l'équation de la courbe étant $r_1 r_2 = K^2$, la normale est toujours située dans l'angle FOF', et l'on a $\alpha + \beta < \pi$, un seul des cosinus, $\cos(\pi - 2\alpha)$, $\cos(\pi - 2\beta)$ peut être négatif; la construction précédente sera absolument générale, si l'on porte le segment OB correspondant au cosinus positif dans le sens ON, le segment OB' correspondant au cosinus négatif dans le sens opposé.

Généralisation. — Considérons d'une façon plus générale la courbe $r_1^m r^n = K^{m+n}$; la formule générale appliquée à ce cas particulier donne, si l'on tient compte de la relation $m r_2 \cos\alpha = n r_1 \cos\beta$,

$$\frac{r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta}{\rho} = r_2 \cos\beta \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{ON} + r_1 \cos\alpha \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{ON},$$

formule identique à celle trouvée dans le cas des cassiniennes; la construction donnée du centre de courbure en un point de ces courbes s'applique donc aux courbes $r_1^m r_2^n = K^{m+n}$ quels que soient les exposants m et n.

3° *Courbes* $p_1 r_1^{\lambda_1} + p_2 r_2^{\lambda_2} + \ldots + p_n r_n^{\lambda_n} + K^9$. —

Nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i r_i^{\lambda_i - 2}[(\lambda_i - 1)\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i]}{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i r_i^{\lambda_i - 1}\sin\alpha_i},$$

ou, en posant $\lambda_i p_i r_i^{\lambda_i - 1} = \mu^{q-2} a_i$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{r_i}[(\lambda_i - 1)\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i]}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i \sin\alpha_i};$$

on obtiendra donc ρ par une série de quatrièmes proportionnelles.

Cas particulier. — Dans le cas de la courbe $pr_1^m + qr_2^n = \mathrm{K}^p$, on a

$$\frac{r_1\cos\alpha + r_2\cos\beta}{\rho} = \frac{r_2\cos\beta}{\mathrm{ON}}[(m-1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha] + \frac{r_1\cos\alpha}{\mathrm{ON}}[(n-1)\cos^2\beta + \sin^2\beta],$$

formule qui conduit à une construction identique à celle donnée pour les cartésiennes et les cassiniennes, après avoir construit les segments

$$\frac{1}{\mathrm{OB}} = \frac{(m-1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathrm{ON}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{OB'}} = \frac{(n-1)\cos^2\beta + \sin^2\beta}{\mathrm{ON}}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Considérons dans le plan un certain nombre n de droites fixes Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, et supposons que les distances d'un point O variable du plan à ces droites soient liées par la relation $f(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) = 0$ ($\Delta_i = x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i$); le point O décrit une courbe C, dont nous allons déterminer la tangente et le rayon de courbure en O.

Si les axes sont la tangente et la normale en O, nous aurons

$$y'_x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \sum f'_{\Delta_i}\cos\alpha_i = 0;$$

donc la tangente en O est la résultante des vecteurs $\overline{\mathrm{OS}_i} = f'_{\Delta_i}$ portés sur les perpendiculaires abaissées de O sur les droites fixes.

Quant au rayon de courbure en O, il est donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}} = \frac{\sum_1^n \sin\alpha_i f'_{\Delta_i}}{\sum_1^n \cos^2\alpha_i f''_{\Delta_i^2} + 2\sum_1^n \cos\alpha_i\cos\alpha_j f''_{\Delta_i\Delta_j}}.$$

Appliquons cette formule à quelques cas particuliers.

1° *Courbes* $n_1\Delta_1^n + n_2\Delta_2^n + \ldots + n_p\Delta_p^n = \mathrm{K}^n$. — Nous aurons

$$\rho = \frac{\sum n_i\Delta_i^{n-1}\sin\alpha_i}{(n-1)\sum n_i\Delta_i^{n-2}\cos^2\alpha_i};$$

d'où, en posant $n_i\Delta_i^{n-2} = a^{n-3}u_i$,

$$\rho = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sum u_i\Delta_i\sin\alpha_i}{\sum u_i\cos^2\alpha_i},$$

formule que l'on construira par une série de quatrièmes proportionnelles.

Cas particulier. — Supposons $n_i = 1$, $n = 2$,

$$\rho = \frac{\sum_1^n \Delta_i \sin \alpha_i}{\sum_1^n \cos^2 \alpha_i}.$$

La parallèle à une droite Δ_i, menée par O, coupe en M_i la parallèle à la tangente, menée par l'extrémité du vecteur résultant des distances du point O aux droites Δ_i; la perpendiculaire à OM_i en M_i coupe la normale en N_i, et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \sum_1^n \frac{1}{ON_i},$$

construction qui s'appliquera en particulier pour l'ellipse $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = K^2$ qui admet Δ_1 et Δ_2 pour diamètres conjugués égaux.

2° *Courbes*

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n = K^n, \quad \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n + \lambda \Delta'_1 \Delta'_2 \ldots \Delta'_n = K^n.$$

L'application à ces courbes de la méthode ci-dessus conduirait aux mêmes résultats que celle exposée dans la première partie.

QUATRIÈME PARTIE.

Considérons, dans le plan, n points fixes et p droites fixes, et supposons que les distances d'un point variable O du plan à ces points et droites fixes soient liées par la relation $f(r_1, r_2, \ldots, r_n; \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p) = 0$; le point O décrit une courbe C; nous allons déterminer la tangente et le rayon de courbure à C en ce point.

Prenons comme axes la tangente et la normale à C en O. Nous aurons $y'_x = 0$ ou, en désignant par α_i et θ_i les angles que la direction positive de l'axe des x fait avec la droite joignant l'origine au point fixe P_i, et avec la normale menée de l'origine à la droite Δ_i,

$$\sum_1^n \cos\alpha_i f'_{\Delta_i} + \sum_1^p f'_{r_i} \cos\theta_i = 0.$$

La tangente est donc la résultante des vecteurs $\overline{OA}_i = f'_{r_i}$ portés sur les droites OP_i et des vecteurs $\overline{OB}_i = f'_{\Delta_i}$ portés sur les normales issues de O aux droites Δ_i.

Le rayon de courbure en O sera donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}} = \frac{\sum_1^n f'_{\Delta_i} \sin\alpha_i + \sum_1^p f'_{r_i} \cos\theta_i}{\left\{\begin{array}{l} \sum_1^n \left(f''_{\Delta_i^2} \cos^2\alpha_i + 2 f''_{\Delta_i\Delta_j} \cos\alpha_i \cos\alpha_j\right) \\ \quad + 2\sum_1^{n,p} f''_{\Delta_i r_j} \cos\alpha_i \cos\theta_j + \sum_1^p f''_{r_i^2} \cos^2\theta_i \end{array}\right\}}.$$

Cas particuliers. — 1° *Courbe* $r_1 - e\Delta_1 = 0$, *conique de foyer* F, *de directrice* Δ *et d'excentricité* e. — Des formules précédentes on déduit immédiatement que :

La tangente en un point M *d'une conique de foyer* F *et de directrice* Δ *passe par le point d'intersection de la directrice avec la perpendiculaire élevée en* F *à la droite* MF.

La directrice Δ *et la perpendiculaire élevée en* F *à* MF *coupent la tangente et la normale, en* A *et* B, P *et* Q; *l'antiparallèle à* AB, *menée par* A, *coupe la normale en* B'; *l'antiparallèle à* BP, *menée par* B′, *coupe la tangente en* A′; *la parallèle à la tangente menée par* B′ *coupe la parallèle à la normale menée par* A′ *en* N, *la droite* FN *coupe la normale en* N′, ON′ *est égal au rayon de courbure en* O.

2° Considérons comme deuxième et dernier exemple *les cubiques circulaires* $r_1^2\Delta_1 - a^2\Delta_2 = 0$; l'application des formules données montre que :

La symétrique de l'asymptote par rapport à un point M *d'une cubique circulaire de foyer singulier* F *coupe la droite joignant les points d'intersection de la cubique et de ses asymptotes en* P; *la conjuguée harmonique de* MP *par rapport à ces deux droites coupe la perpendiculaire élevée en* F *à* MF *en* Q, MQ *est la tangente en* M.

La formule du rayon de courbure nous conduirait à une construction identique à celle indiquée dans la première Partie.

[O¹2e]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE LA CONCHOÏDE DE KULP;

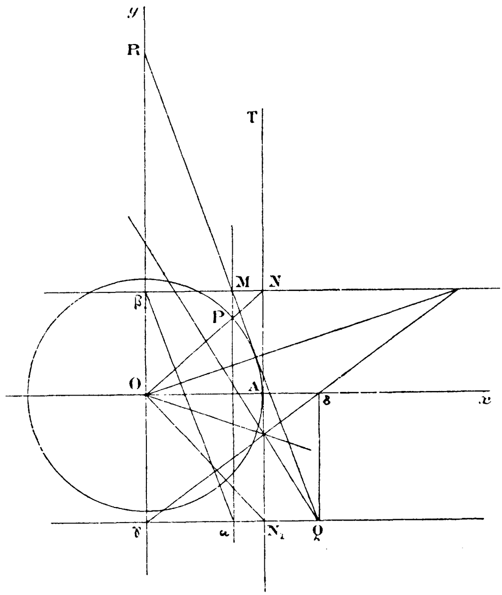
Par M. F. BALITRAND.

La conchoïde de Kulp est définie de la façon suivante [1] : On donne un cercle C de centre O, de rayon a et la tangente AT à l'extrémité A du diamètre AA′; un rayon variable rencontre C en P et AT en N; les parallèles menées par P et N respectivement

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 1913, p. 193 et 575.

à AT et OA se coupent en un point M, dont le lieu est la conchoïde de Kulp.

Prenons comme axe des x le diamètre OA, comme



axe des y le diamètre perpendiculaire; désignons par x et y les coordonnées de P, par ξ et η celles de M, par X et Y les coordonnées courantes.

L'équation du cercle C est

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0.$$

On a entre les coordonnées de P et de M les relations

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{ay}{x},$$

$$x = \xi, \qquad y = \frac{\xi\eta}{a}.$$

La tangente en M à la conchoïde a pour équation

$$Y - \frac{ay}{x} = - \frac{a^3}{x^2 y}(X - x).$$

Elle passe par le point de coordonnées $2x$ et $-\frac{ax}{y}$.

Menons la perpendiculaire en O à OP. Elle coupe la droite AT en un point N_1 dont l'ordonnée est égale à $-\frac{ax}{y}$. Soit $N_1 Q$ la parallèle à Ox menée par ce point. Si l'on projette M en α sur $N_1 Q$ et en β sur Oy, la tangente en M est parallèle à $\alpha\beta$. Autrement dit, si l'on prend sur $N_1 Q$ le point Q tel que $\alpha Q = \beta M$, la droite MQ est la tangente en M. Donc :

Pour avoir la tangente en M *à la conchoïde, il suffit de mener une droite qui, limitée à* Oy *et* $N_1 Q$, *ait son milieu en ce point.*

Les coordonnées de Q sont $2x$ et $-\frac{ax}{y}$. Lorsque P décrit le cercle C, Q décrit la courbe

$$\frac{4}{X^2} - \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Elle est bien connue; nous allons néanmoins donner explicitement la construction de sa tangente. Son équation est

$$Y + \frac{ax}{y} = - \frac{a^3}{2y^3}(X - 2x).$$

Elle passe par le point d'intersection des deux droites.

$$\frac{X}{2x} - \frac{Yy}{ax} - 1 = 0,$$

$$Xy + 2aY = 0.$$

La première représente la droite qui joint les projections γ et δ de Q sur Ox et Oy; la seconde, la symétrique par rapport à Ox, de celle qui va de l'origine au point de rencontre de MN et de $\gamma\delta$.

La connaissance de cette tangente suffit pour la construction du centre de courbure de la conchoïde.

En effet, prenons une seconde position $Q_1M_1R_1$ de la tangente QMR. Les points M et M_1 étant respectivement les milieux des segments QR et Q_1R_1, il en résulte, d'après un théorème classique, que les deux droites QMR, $Q_1M_1R_1$ et les trois cordes QQ_1, MM_1, RR_1, sont cinq tangentes d'une parabole.

Soit S le point de rencontre des deux tangentes à la conchoïde. Considérons le cercle circonscrit au triangle MSM_1.

Par rapport à la parabole, il est circonscrit à un triangle circonscrit à la parabole. A la limite, lorsque les deux tangentes coïncident, il est tangent à la parabole en M et son rayon est le quart du rayon de courbure de la parabole.

Par rapport à la conchoïde, il est circonscrit à un triangle formé par deux points de cette courbe et le point de rencontre des tangentes en ces points. A la limite, il est tangent à la conchoïde et son rayon est la moitié du rayon de courbure de cette courbe.

Autrement dit, le rayon de courbure de la conchoïde est la moitié de celui de la parabole. Par suite, il est égal au segment de normale à la courbe compris entre le point M et la directrice de la parabole.

Or cette directrice est facile à construire. Il suffit d'appliquer deux fois le théorème de Steiner :

« *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice* »

aux deux triangles infiniment aplatis formés par la tangente QMR, le point de contact M et les tangentes en Q et R. On obtient ainsi la construction suivante :

Après avoir construit la tangente en Q *à la courbe lieu de ce point, on abaisse de* M *une perpendiculaire sur cette tangente et l'on prend son point de rencontre avec la perpendiculaire en* Q *à* MQ; *on construit de même le point de rencontre de la perpendiculaire en* R *à* MR *avec* MN; *la droite qui joint ces deux points de rencontre détermine sur la normale en* M *à la conchoïde un segment égal au rayon de courbure.*

On peut aussi arriver à la détermination de ce centre de courbure par voie analytique. Considérons la parabole

$$X^2 - \alpha X - \beta Y - \gamma = 0.$$

On peut choisir les coefficients α, β, γ de façon qu'elle passe en P et y oscule le cercle C. En effectuant les calculs, on trouve

$$a^2 X^2 - 2x(a^2 + y^2) X - 2y^3 Y + a^2(a^2 + y^2) = 0.$$

Si on lui fait subir la transformation qui fait correspondre la conchoïde de Kulp au cercle C, on trouve comme transformée une courbe, osculatrice en M à la conchoïde, et dont l'équation est

$$a^3 X^2 - 2y^3 XY - 2ax(a^2 + y^2) X + a^3(a^2 + y^2) = 0.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes sont en évidence. Elles ont pour équations

$$X = 0, \qquad a^3 X - 2y^3 Y - 2ax(a^2 + y^2) = 0.$$

Cette dernière représente une droite menée par Q, symétrique, par rapport à Ox, de la tangente en Q à la courbe lieu de ce point.

On connaît donc les deux asymptotes de l'hyperbole.

Dès lors, la construction de son cercle osculateur en M est un problème facile et connu. Il suffit, par exemple, de déterminer ses axes; ce qui est immédiat, pour retomber sur un problème tout à fait classique.

[O[1]6h]

SUR LA RECHERCHE DES SURFACES MINIMA;

PAR M. C. CLAPIER.

I. Considérons le champ des normales à une famille de surfaces $f(x, y, z) = \text{const.}$ Par chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, il passe une droite de ce champ, MN dont les cosinus directeurs (c, c', c'') sont fonctions de (x, y, z); nous allons montrer que la courbure moyenne de la surface de la famille, qui passe en ce point, est donnée par la formule

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right).$$

Nous avons en effet, sur une ligne de courbure de la surface, les formules d'Olinde Rodriguez

$$dx + R\,dc = 0, \qquad dy + R\,dc' = 0, \qquad dz + R\,dc'' = 0,$$

R étant positif quand NM est dirigé vers le centre de courbure correspondant.

La première équation peut s'écrire

$$dx + R\left(\frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy + \frac{\partial c}{\partial z}dz\right) = 0$$

avec

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0.$$

Il en résulte que les dx et dy d'une ligne de courbure vérifient la relation

$$(2)\quad \left[c''\left(1+\mathrm{R}\frac{\partial c}{\partial x}\right)-\mathrm{R}c\frac{\partial c}{\partial z}\right]dx+\mathrm{R}\left(c''\frac{\partial c}{\partial y}-c'\frac{\partial c}{\partial z}\right)dy=0.$$

On trouverait de même la condition

$$(3)\quad \mathrm{R}\left(c''\frac{\partial c'}{\partial x}-c\frac{\partial c'}{\partial z}\right)dx+\left[c''\left(1+\mathrm{R}\frac{\partial c'}{\partial y}\right)-\mathrm{R}c'\frac{\partial c'}{\partial z}\right]dy=0.$$

Et l'élimination de dx et dy nous donne une équation du second degré qui est satisfaite pour les deux rayons de courbure R_1 et R_2. On en déduit

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1}+\frac{1}{\mathrm{R}_2}=-\frac{c''\dfrac{\partial c}{\partial x}-c\dfrac{\partial c}{\partial z}+c''\dfrac{\partial c'}{\partial y}-c'\dfrac{\partial c'}{\partial z}}{c''};$$

en tenant compte de la relation

$$c\frac{\partial c}{\partial z}+c'\frac{\partial c'}{\partial z}+c''\frac{\partial c''}{\partial z}=0,$$

il vient la formule (1).

Pour appliquer cette formule, on déterminera c, c', c'' par les égalités

$$\frac{c}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{c'}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{c''}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Si la surface est donnée sous la forme $z=\varphi(x,y)$, c'' ne contient pas z, et si l'on pose $dz=p\,dx+q\,dy$,

$$\mathrm{X}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mathrm{Y}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

nous avons

$$(4)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1}+\frac{1}{\mathrm{R}_2}=-\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\right).$$

II. Une surface minima est telle que sa courbure moyenne est nulle en chacun de ses points $R_1 + R_2 = 0$.

D'après le résultat précédent, pour obtenir une famille de surfaces minima, nous devrons choisir trois fonctions uniformes c, c', c'' de (x, y, z), satisfaisant aux conditions

$$(5) \qquad \begin{gathered} c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z} = 0, \end{gathered}$$

et telles que l'équation aux différentielles totales

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0$$

soit intégrable.

On sait que la condition d'intégrabilité est exprimée par l'identité

$$(6) \quad c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = 0.$$

Appliquons au cas simple où l'on prend

$$(7) \qquad c = \frac{-ay}{f(\rho)}, \qquad c' = \frac{ax}{f(\rho)}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui satisfont à la condition (5). Nous avons

$$I = c'\frac{\partial c''}{\partial x} - c\frac{\partial c''}{\partial y} + c'\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = a\rho\frac{\partial c''}{\partial \rho} + ac''\frac{-2f + \rho f'}{f^2},$$

avec

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \rho},$$

et, en outre,

$$c'' = \sqrt{1 - \frac{a^2\rho^2}{f^2}}, \qquad \frac{\partial c''}{\partial \rho} = -\frac{a^2(f\rho - f'\rho^2)}{c''f^3}.$$

Égalant I à 0, on trouve que $f(\rho)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$a^2\rho^2 - 2f^2 + ff'\rho = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{df^2}{d\rho} = 4\frac{f^2}{\rho} - 2a^2\rho;$$

elle est facilement intégrable comme équation linéaire et l'on trouve

$$(8) \qquad f = \rho\sqrt{a^2 + \alpha\rho^2}.$$

Pour obtenir les surfaces minima correspondantes, nous porterons les valeurs (7) et (8) dans l'équation $c\,dx + c'dy + c''dz = 0$; ce qui nous donne

$$\alpha\,dz = a\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2};$$

d'où

$$(9) \qquad \alpha z = a \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \beta,$$

qui représente une famille d'hélicoïdes gauches à plan directeur.

III. Parmi toutes les surfaces qui passent par un contour donné, celle dont l'aire est minima est une surface minima; autrement dit : toutes les surfaces minima qui passent par un même contour ont la même aire.

On peut démontrer cette propriété caractéristique en se servant de la condition (5). Soient, en effet, deux de ces surfaces limitant un volume τ et appliquons à ce volume la formule relative à la divergence d'un flux,

$$\int_V \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right) d\tau = \int_S (\alpha c + \beta c' + \gamma c'')\, d\sigma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure. La première intégrale est nulle d'après (5) et la seconde se réduit à

$$S_1 - S_2,$$

S_1 étant l'aire de la première surface minima et S_2 l'aire de la surface minima voisine qui passe par le même contour; on a donc

$$S_1 = S_2.$$

[O[1]5b]

SUR LES SPHÉROÏDES;

PAR M. L. KOLLROS.

Dans la séance du 1er avril 1914 de la Société mathématique de France, M. Lebesgue a énoncé quelques propriétés des courbes de largeur constante, des *orbiformes*, comme il les appelle; il a rappelé, en particulier, que toutes les orbiformes de largeur donnée d ont la *même longueur;* le cercle a la plus grande surface; l'aire minimum est celle du triangle curviligne de Reuleaux ([1]) formé de trois arcs de circonférence ayant respectivement pour centres les sommets d'un triangle équilatéral et pour rayon le côté d de ce triangle.

Appelons *sphéroïdes* les surfaces de largeur constante; leurs projections orthogonales sur un plan quelconque sont évidemment des orbiformes; elles ont donc toutes un pourtour de même longueur ([2]). Or,

([1]) REULEAUX, *Theorische Kinematik*, t. I, p. 130. Braunschweig, 1875.

([2]) Minkowski a démontré (*Œuvres*, t. II, p. 277) que, réciproquement, tout corps de pourtour constant est un sphéroïde.

d'après un théorème remarquable de Minkowski (*Œuvres*, t. II, p. 215), l'aire d'un corps convexe, en particulier d'un sphéroïde, est égale à quatre fois la moyenne arithmétique des aires de ses projections orthogonales dans toutes les directions. Il en résulte immédiatement que *les sphéroïdes de largeur donnée n'ont pas toutes la même aire* et que *la sphère a la plus grande* (*a fortiori* le plus grand volume).

[La plus petite aire et le volume minimum sont *probablement* (je ne l'ai pas encore démontré) ceux du sphéroïde qu'on obtient en décrivant, autour de chaque sommet d'un tétraèdre régulier ABCD comme centre, une sphère passant par les trois autres sommets et en tronquant trois des six arêtes ainsi obtenues, par exemple AB, AC et AD à l'aide de tores; le segment de tore arrondissant l'arête AB, par exemple, est celui qu'on obtient en faisant tourner l'arc de cercle AB de centre C autour de l'arête AB du tétraèdre. Il existe un modèle de cette surface (1).]

[M³6bα]

NOTE SUR LA COURBE DE VIVIANI;

PAR Mlle ANNE DE PRÉHYR.

1. La courbe de Viviani est l'intersection de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=1$$

et du cylindre

$$x^2+y^2-x=0.$$

---

(1) *Voir* SCHILLING et MEISSNER, *Zeitschrift für Math. und Physik*, t. LX, 1912.

2. On peut prendre des coordonnées curvilignes sur la sphère pour que l'équation de la courbe de Viviani soit

$$u = v.$$

On tire de là un mode de construction de la courbe sur la sphère rappelant celui de la strophoïde dans le plan.

3. Les plans tangents à la sphère aux points de la courbe de Viviani engendrent une surface développable dont l'arête de rebroussement γ est une développée de la courbe de Viviani et dont l'intersection avec le plan xy est la parabole P de foyer (0, 0, 0) et de sommet (1, 0, 0).

4. Les tangentes à la courbe de Viviani déterminent une surface développable dont la trace sur le plan xy est la cissoïde Γ podaire de la parabole P pour son sommet.

On tire de là une construction géométrique facile du plan osculateur et du centre de courbure à la courbe de Viviani.

Le lieu du centre de courbure est la courbe inverse de γ par rapport à l'origine des coordonnées et pour la puissance 1.

5. La projection stéréographique de la courbe de Viviani sur le plan xy est la strophoïde droite dont le sommet est le point (0, 0, 0) et le point double, le point (1, 0, 0).

6. La projection stéréographique de la courbe de Viviani sur le plan yz est une lemniscate de Bernoulli ou une hyperbole équilatère suivant que le pôle de projection est le point (— 1, 0, 0) ou le point (1, 0, 0).

7. Le conoïde droit dont l'axe est l'axe des z et la directrice, la courbe de Viviani, coupe le cylindre $x^2+y^2=1$ suivant deux ellipses.

[K¹2b]

RELATION D'EULER ENTRE LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ET LES CERCLES TANGENTS AUX TROIS COTÉS DE CE TRIANGLE;

Par M. Bertrand GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Je considère le triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O et rayon R; j'appelle I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrits. La bissectrice AII' perce le cercle O en D et l'on a $DB=DC=DI=DI'$; la bissectrice AI''I''' perce le cercle O en D' et l'on a $D'B=D'C=D'I''=D'I'''$.

D'un point P de AII' comme centre, je décris le cercle de rayon $PQ=r$ tangent aux deux côtés de l'angle A; soit $OP=d$. Les triangles semblables APQ, DD'C donnent

$$\frac{r}{DC}=\frac{AP}{2R} \quad \text{ou} \quad 2Rr=AP.DC.$$

En prenant un sens positif sur AD nous écrirons

$$(1)\qquad \begin{cases} 2Rr=AP.ID=AP.DI', \\ d^2-R^2=PA.PD; \end{cases}$$

d'où, par addition et soustraction,

$$(2)\qquad \begin{cases} d^2-R^2+2Rr=AP.ID+AP.DP=AP.IP, \\ d^2-R^2-2Rr=AP.I'D+AP.DP=AP.I'P. \end{cases}$$

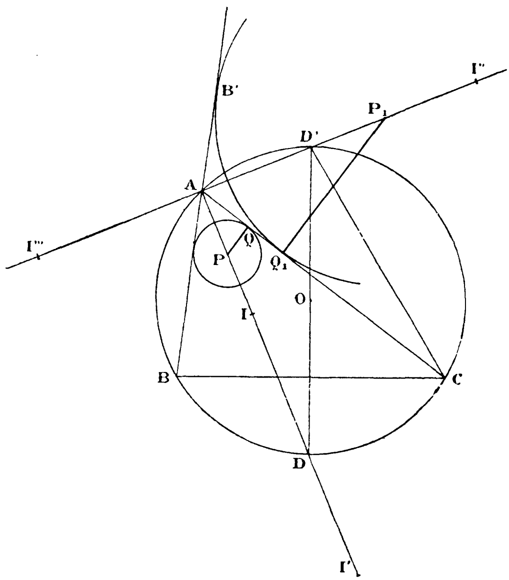
La démonstration est indépendante de la position de P sur AD : si P coïncide avec I, on a

$$(3) \qquad d^2 = R^2 - 2Rr;$$

si P coïncide avec I′,

$$(4) \qquad d^2 = R^2 + 2Rr.$$

Ce sont les relations dites d'Euler.



Si l'on prend un point P_1 sur la demi-droite AI″, on a de même, en posant encore $P_1Q_1 = r$, $OP_1 = d$,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2Rr &= AP_1 . D'I'' = AP_1 . I'''D, \\ d^2 - R^2 &= P_1D' . P_1A; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} d^2 - R^2 - 2rR &= AP_1(I''D' + D'P_1) = AP_1 . I''P_1, \\ d^2 - R^2 + 2rR &= AP_1(I'''D' + D'P_1) = AP_1 . I'''P_1. \end{aligned} \right.$$

En nous servant des relations (2) ou (6) nous démontrons aisément les réciproques : si deux cercles de centre O et P satisfont à la relation (3) ou à la relation (4), un point quelconque du cercle O est le sommet d'un triangle inscrit dans le cercle O, et qui admet pour cercle inscrit ou exinscrit le cercle P.

En effet, supposons vérifiée la relation (3) : on en déduit $R > 2r$, $d < R - r$; donc le cercle P est tout entier intérieur au cercle O : d'un point A du cercle O je mène les tangentes au cercle P, elles coupent le cercle O de nouveau en B et C; la première relation (2) devient $AP.IP = 0$, donc P coïncide avec I.

Supposons au contraire vérifiée la relation (4) : elle entraîne $R < d < R + r$. On voit aisément que si $d < 3R$, les deux cercles sont sécants, tandis que si $d > 3R$, le cercle P contient le cercle O tout entier à son intérieur; nous nous bornerons donc au cas $d < 3R$.

Je prends un point A sur la portion du cercle O extérieure au cercle P et je recommence la même construction : si le cercle P est inscrit dans l'angle BAC, la seconde relation (2) me donne $I'P = 0$; si le cercle P est inscrit dans l'un des angles adjacents à BAC, dans l'angle B'AC, par exemple, je me sers de la première relation (6) qui me donne $I''P = 0$; de toute façon, P coïncide avec le centre de l'un des cercles exinscrits au triangle ABC.

[M¹4b]

NOTE SUR LES COURBES PLANES DE GENRE UN;

PAR M. M.-F. EGAN,

Soit une courbe C de degré n et de genre 1. Considérons les courbes adjointes Φ de degré $n-2$, passant par les points doubles de C (qu'on peut supposer distincts l'un de l'autre) et par $n-2$ points Q pris sur C. Les courbes Φ dépendent linéairement d'un paramètre λ; soit

$$\Phi = f - \lambda g = 0$$

leur équation. Chacune d'elles rencontre la courbe C en deux points ϖ variables avec λ. Nous dirons qu'une courbe Φ est tangente à C lorsque ces deux points se confondent.

Il ressort de la théorie classique des courbes de genre 1 que quatre des courbes Φ sont tangentes à C; que le rapport anharmonique R des paramètres λ de ces quatre courbes est indépendant de la façon dont on a choisi les points Q; que R est un invariant pour toute transformation birationnelle de C; enfin, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe C soit transformable en C′ est qu'on ait $R = R'$.

Dans le cas des cubiques, R est le rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la courbe.

L'objet de cette Note est d'indiquer une démonstration très simple de ces propositions.

On peut exprimer les coordonnées d'un point de C par des fonctions elliptiques d'une variable u. Alors la fonction $\lambda(u) = f(x, y) : g(x, y)$ est du second ordre. En effet, la courbe $\Phi_0 = f - \lambda_0 g = 0$ rencontre C en deux points en dehors des points fixes, donc l'équation $\lambda(u) = \lambda_0$ admet deux solutions dans un parallélogramme des périodes. Supposons qu'on ait choisi pour g l'une des courbes Φ qui sont tangentes à C; soit u_0 l'affixe de son point de contact. Alors $\lambda(u)$ admet u_0 comme pôle double; on a donc

$$\lambda(u) = \mathrm{A}\,p(u - u_0) + \mathrm{B}.$$

Les valeurs de u autres que u_0, répondant aux points de contact de C avec celles des courbes Φ qui lui sont tangentes, sont visiblement les zéros de $\lambda'(u)$, c'est-à-dire $u_0 + \omega_1$, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_3$. Les valeurs de λ répondant aux quatre courbes Φ tangentes à C sont donc

$$\infty, \quad \mathrm{A}e_1 + \mathrm{B}, \quad \mathrm{A}e_2 + \mathrm{B}, \quad \mathrm{A}e_3 + \mathrm{B};$$

d'où

$$\mathrm{R} = (\infty, e_1, e_2, e_3).$$

On voit que R garde sa valeur, soit qu'on fasse varier les points Q, soit qu'on soumette C à une transformation birationnelle. Il s'ensuit aussi que la condition $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ est nécessaire pour que C puisse se transformer en C'.

Pour montrer que cette condition est suffisante, on remarque que la valeur de R détermine celle de l'invariant absolu $g_2^3 : g_3^2$. Or, en mettant $u = hv$, on a

$$h^2 p(u; g_2, g_3) = p(v; h^4 g_2, h^6 g_3).$$

On peut donc considérer g_2 et g_3 comme déterminés lorsque $g_2^3 : g_3^2$ l'est. Donc, lorsque $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$, on peut exprimer les coordonnées des points de C et de C' par des fonctions elliptiques ayant les mêmes invariants. Cela posé, on peut transformer soit C, soit C' en la cubique

$$x = \wp(u; g_2, g_3), \qquad y = \wp' u,$$

ce qui achève la démonstration.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES.

(DEUXIÈME PARTIE.)

Session de 1914. — Mathématiques.

On pose

$$(1) \qquad y = A\cos 5u + B\sin 5u,$$

$$(2) \qquad x = \cos u,$$

u étant une variable, A *et* B *étant des constantes; y est ainsi une fonction de x.*

1° *Montrer qu'il existe entre* x, y, y', y'' (*les accents indiquent des dérivées par rapport à* x) *une relation indépendante des constantes* A *et* B. — *Former cette relation en appliquant la formule*

$$y'_u = y'_x \times x'_u.$$

On trouvera

$$(3) \qquad (1 - x^2)y'' - xy' + 25y = 0.$$

2° *Si l'on propose de satisfaire à cette équation différentielle en prenant pour y un polynome de degré donné, au moins égal à* 2,

$$y = a(x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots),$$

ce problème paraît-il bien posé, c'est-à-dire dispose-t-on d'autant de paramètres arbitraires qu'il y a de conditions à remplir? Montrer qu'il faut prendre $m = 5$, *et que le polynome renferme alors une constante arbitraire* a;

faire le calcul en posant

$$y = ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f;$$

on mettra le résultat sous la forme

$$y = e(16x^5 - \ldots) = \varphi(x)$$

avec e comme constante arbitraire.

3° *Les relations* (1) *et* (2) *définissent* y *comme fonction de* x, $y = f(x)$. *Montrer que* $f(x)$ *ne peut être identifié avec* $\varphi(x)$ *que si les constantes* A *et* B *vérifient une relation (condition nécessaire). — En changeant* u *en* $-u$, *faire voir que l'identification en question exige que l'on ait* $B = 0$ *(condition nécessaire); en changeant* u *en* $\pi - u$, *faire voir que cette identification a alors des chances de réussir, vu la forme du polynome* $\varphi(x)$. *— En admettant que l'on sache que* $\cos 5u$ *s'exprime en fonction de* $\cos u$ *par un polynome entier, montrer que les faits du second paragraphe permettent d'obtenir cette expression, et la donner.*

4° *Déduire de là une solution de l'équation différentielle* (3) *renfermant deux constantes arbitraires, et la mettre sous la forme*

$$\begin{aligned} y = A\varphi(x) \pm B(4x^2 + 2x - 1)\sqrt{1 - x} \\ \times (4x^2 - 2x - 1)\sqrt{1 + x}, \end{aligned}$$

avec $e = 1$ *dans* $\varphi(x)$. *— Vérifier qu'on peut écrire*

$$y = A\varphi(x) \pm \frac{B}{\sqrt{5}}\varphi'(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

Est-il possible d'obtenir directement le résultat sous cette dernière forme? — On pourra rendre compte de la formule

$$1 - \cos 5u = (1 - \cos u)(4\cos^2 u + 2\cos u - 1)^2,$$

qui s'est présentée au cours du calcul, en annulant les deux membres; on changera ensuite u *en* $\pi - u$.

SOLUTION PAR M^lle R. MILANE.

1° On pose

$$(1) \qquad y = A\cos 5u + B\sin 5u,$$
$$(2) \qquad x = \cos u,$$

de sorte que y est une fonction de x. On peut *imaginer* qu'on exprime $\cos 5u$ et $\sin 5u$ en fonction de $\cos u$ ou de x, au moyen de la formule de Moivre, par exemple; on aurait alors

$$y = F(x), \qquad y' = G(x), \qquad y'' = H(x),$$

et l'on pourrait éliminer A et B entre ces trois relations.

Mais, comme on va le voir, on peut faire cette élimination sans exprimer $\cos 5u$ et $\sin 5u$ en fonction de $\cos u$; *on aura l'équation différentielle* (3), *et l'on en déduira au contraire l'expression de* $\cos 5u$ *en fonction de* $\cos u$; on écrira ensuite

$$\sin^2 5u = 1 - \cos^2 5u = (1 - \cos 5u)(1 + \cos 5u) = \ldots.$$

Voici un calcul qui met bien les idées en évidence. Si l'on écrit :

$$(1) \qquad y = A\cos 5u + B\sin 5u,$$
$$(1') \qquad y'_u = 5(-A\sin 5u + B\cos 5u),$$
$$(1'') \qquad y''_u = -25(A\cos 5u + B\sin 5u),$$

on peut éliminer A et B entre ces trois relations, et l'on a

$$(R) \qquad y''_u + 25y = 0;$$

il reste à exprimer y''_u en fonction de x, y, y'_x, y''_x. Or on a, d'une manière générale,

$$y'_u = y'_x x'_u,$$
$$y''_u = y''_x (x'_u)^2 + y'_x x''_u;$$

avec $x = \cos u$, cette dernière relation donne

$$y''_u = y''_x \sin^2 u - y'_x \cos u = (1 - x^2)y''_x - xy'_x;$$

la relation (R) devient

$$(3) \qquad (1-x^2)y''-xy'-25y=0.$$

[On pourrait, plus sommairement, déduire de la relation (1)

$$5(-A\sin 5u+B\cos 5u)=y'_x-\sin u,$$

et de là

$$-25(A\cos 5u+B\sin 5u)=y''_x\sin^2 u-y'_x\cos u,$$

ou

$$-25y=(1-x^2)y''-xy'.]$$

2° Si l'on essaie de satisfaire à cette équation différentielle en prenant

$$y=a(x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots),$$

le premier nombre de la relation (3) devient un polynome en x du degré m qui doit s'annuler identiquement; cela donne $m+1$ conditions. Comme cette relation (3) est homogène par rapport à y, y', y'', le coefficient a se met en facteur, et l'on dispose seulement de m paramètres $p, q, \ldots$ Le problème est probablement impossible avec m quelconque.

Le calcul donne

$$\begin{aligned}(1-x^2)[m(m-1)x^{m-2}+\ldots]&\\ -x(mx^{m-1}+\ldots)+25(x^m+\ldots)&\equiv 0;\end{aligned}$$

le coefficient du terme de degré m est

$$-m(m-1)-m+25 \qquad \text{ou} \qquad -m^2+25;$$

on l'annulera en donnant à m la valeur entière $m=5$. Il reste alors m conditions entre les m paramètres $p, q, \ldots$; le coefficient a pourra être quelconque.

Si l'on écrit

$$\begin{array}{rl|l} y = & ax^5+5bx^4+10cx^3+10dx^2+5ex+f, & +5\\ y':5 = & ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e, & -x\\ y'':5 = & 4ax^3+12bx^2+12cx+4d, & 1-x^2 \end{array}$$

en annulant successivement les coefficients du polynome fourni par

$$(1-x^2)\frac{y''}{5}-x\frac{y'}{5}+5y,$$

on a

$$b = 0, \qquad a + 8c = 0, \qquad d = 0, \qquad c + 2e = 0, \qquad f = 0,$$

ou

$$b = 0, \qquad d = 0, \qquad f = 0, \qquad c = -2e, \qquad a = 16e;$$

le polynome demandé est donc

$$(4) \qquad y = e(16x^5 - 20x^3 + 5x) = \varphi(x).$$

3° Les relations (1) et (2) définissent y comme fonction de x, $y = f(x)$, et cette fonction dépend de deux paramètres A et B; elle ne peut être identifiée avec le polynome $\varphi(x)$, qui dépend d'un seul paramètre e, que si les constantes A et B vérifient une relation (condition nécessaire).

Si l'on change u en $-u$, x ne change pas et le polynome $\varphi(x)$ reprend la même valeur; pour qu'il puisse représenter la fonction $A\cos 5u + B\sin 5u$, dont le second terme, s'il existe, change de signe en même temps que u, il faut donc que B soit nul.

Cette fonction est alors $A\cos 5u$; si l'on change u en $\pi - u$, x ne fait que changer de signe et le polynome $\varphi(x)$, dont tous les termes sont de degré impair, ne fait que changer de signe; comme on a également

$$A\cos[5(\pi - u)] = -A\cos 5u,$$

l'identification de $f(x)$ avec $\varphi(x)$ a des chances de réussir.

Si l'on admet que $\cos 5u$ s'exprime en fonction de $\cos u$ par un polynome entier, ce polynome doit satisfaire à l'équation différentielle (3), c'est un polynome $\varphi(x)$; comme l'hypothèse $u = 0$ donne alors

$$x = \cos 0 = 1, \qquad y = \cos 0 = 1,$$

le polynome $\varphi(x)$ doit prendre la valeur 1 pour $x = 1$, ce qui donne $e = 1$. On a ainsi

$$(5) \qquad \cos 5u = 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u;$$

on peut vérifier ce résultat par la formule de Moivre.

4° L'équation différentielle (3) est satisfaite par

$$y = A\cos 5u + B\sin 5u.$$

Comme on l'a dit au début, l'idée du problème est d'obtenir $\cos 5u$ en fonction de $\cos u$ par l'équation différentielle (3), sans employer la formule de Moivre ; on ne doit pas évaluer $\sin 5u$ par cette formule ([1]). On doit écrire

$$\sin^2 5u = 1 - \cos^2 5u = (1 - \cos 5u)(1 + \cos 5u),$$

et l'on a facilement, avec $e = 1$ dans $\varphi(x)$,

$$(6) \qquad 1 - \cos 5u = 1 - \varphi(x) = (1 - x)(4x^2 + 2x - 1)^2,$$

$$(7) \qquad 1 + \cos 5u = 1 + \varphi(x) = (1 + x)(4x^3 - 2x - 1)^2;$$

on a donc cette solution de l'équation différentielle

$$(8) \qquad \begin{aligned} y = \mathrm{A}\,\varphi(x) \pm \mathrm{B}(4x^2 + 2x - 1)\sqrt{1 - x} \\ \times (4x^2 - 2x - 1)\sqrt{1 + x}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} (4x^2 + 2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) &= (4x^2 - 1)^2 - 4x^2, \\ &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ &= \frac{1}{5}\varphi'(x), \end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$(9) \qquad y = \mathrm{A}\,\varphi(x) \pm \frac{\mathrm{B}}{5}\varphi'(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

On pouvait plus simplement, ayant obtenu

$$\cos 5u = \varphi(x),$$

en déduire par dérivation

$$\sin 5u = \frac{1}{5}\varphi'(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

([1]) On pourrait, dans la formule (5), changer u en $\frac{\pi}{2} - u$, ce qui donnerait

$$\begin{aligned} \sin 5u &= \sin u(16\sin^4 u - 20\sin^2 u + 5) \\ &= \pm\sqrt{1 - x^2} \times (16x^4 - 12x^2 + 1) \\ &= \pm\sqrt{1 - x^2}(4x^2 + 2x - 1)(4x^2 - 2x - 1); \end{aligned}$$

mais cela ne donne pas le groupement $(1 - x)(4x^2 + 2x - 1)^2, \ldots$

Remarque. — On a rencontré la formule

$$(10) \qquad 1 - \cos 5u = (1 - \cos u)(4\cos^2 u + 2\cos u - 1)^2;$$

il est facile d'en rendre compte. Si l'on annule le premier membre, on a, à $2k\pi$ près,

$$u = 0, \qquad u = \frac{2\pi}{5}, \qquad u = \frac{4\pi}{5}, \qquad \ldots;$$

sur le cercle trigonométrique, les extrémités de ces arcs sont les sommets d'un pentagone régulier qui a un sommet en A, qui est, par conséquent, symétrique par rapport au diamètre AA'. Les cosinus de ces arcs ont donc, en dehors de la valeur 1, quatre valeurs égales deux à deux; les deux valeurs sont

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \qquad \cos\frac{4\pi}{5},$$

ou

$$\sin\frac{\pi}{5}, \qquad -\sin\frac{3\pi}{5},$$

et ces valeurs sont les racines de l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui se déduit de l'équation

$$X^2 + X - 1 = 0,$$

relative à l'inscription des décagones réguliers dans le cercle.

On voit d'ailleurs directement que les quantités $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $-\cos\frac{4\pi}{5}$, qui sont les apothèmes OM et ON du pentagone étoilé et du pentagone convexe, sont les moitiés des côtés PE et QD du décagone convexe et du décagone étoilé, dans un cercle de rayon 1.

Les deux membres de la formule (10) sont donc égaux à un facteur existant près; comme ils sont égaux pour $u = \frac{\pi}{2}$, ils sont réellement égaux.

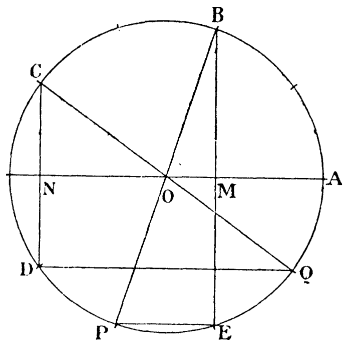
La présence d'un facteur carré au second membre de la formule (10) est liée à la première des deux formules

$$1 - \cos 5u = 2 \sin^2 5 \frac{u}{2},$$

$$1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2};$$

si l'on pose

$$\sin \frac{u}{2} = z,$$



cette formule (10) peut se déduire de la formule

$$\sin 5 \frac{u}{2} = z(16z^4 - 20z^2 + 5)$$

donnée dans la note (1) : on élève au carré, on multiplie par 2, on remplace $2 \sin^2 5 \frac{u}{2}$ par $1 - \cos 5u$ et $2z^2$ par $1 - \cos u$; le trinome bicarré en z est remplacé par un trinome du second degré en $\cos u$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1914. SUJETS DES COMPOSITIONS.

Algèbre et Trigonométrie.

I. *Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général* $u_n = \frac{1}{n^3}$, *si l'on veut calculer la valeur de la série à un dix-millième près?*

II. 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$f(z) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + z\cos^2 x}, \tag{1}$$

z étant un nombre supérieur à -1.

2° *Développer, suivant les puissances croissantes de* z, *l'expression trouvée pour* $f(z)$.

3° *Vérifier qu'on obtient bien le même résultat en partant du développement de* $\frac{1}{1 + z\cos^2 x}$ *et intégrant les termes du développement, la variable* x *variant de* 0 *à* π, *comme l'indique la formule* (1).

III. *Étudier la variation de la fonction*

$$y = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right).$$

(4 heures.)

Géométrie analytique et mécanique.

I. *Sur la spirale logarithmique* C, *définie par l'équation* $\Gamma = ae^{m\theta}$ *en coordonnées polaires, on considère les deux points* M_0 *et* M, *définis respectivement par les angles polaires* θ_0 *et* θ.

1° *Déterminer la position du centre de gravité* G *de l'arc* M_0M.

2° *Déterminer la position limite du point* G *quand le point* M_0 *tend vers le pôle* O.

II. *Dans le cas où le point* M_0 *coïncide avec le pôle* O *de la spirale, on suppose que l'angle polaire* θ *du point* M *augmente avec la vitesse d'un radian par seconde.*

1° *Étudier la courbe* Γ, *lieu du point* G.

2° *Déterminer en grandeur et direction la vitesse* V *et l'accélération* A *du point* G, *correspondant à un angle donné* θ.

III. *Au lieu d'un arc de spirale, on considère une courbe quelconque* C. *L'extrémité* M *de l'arc* $M_0M = l$ *de cette courbe est supposée parcourir la courbe* C, *suivant une loi qui est déterminée en fonction du temps. Étant donné le centre de gravité* G *de l'arc* M_0M, *l'extrémité* M *de l'arc, la tangente* MT *au point* M, *la longueur* l *de l'arc* M_0M, *les deux premières dérivées* l' *et* l'' *de* l *par rapport au temps, déterminer, en grandeur et direction, au moyen de ces données :*

1° *La vitesse* V *du point* G;

2° *L'accélération* A *du même point.*

IV. *Dans le cas particulier où la ligne* C *est formée de deux segments rectilignes* M_0O *et* OM :

1° *Déterminer le centre de gravité* G *de la ligne* M_0OM;

2° *Trouver le lieu* Γ *du point* G *quand le segment* OM *prend toutes les longueurs possibles et pivote en outre autour du point* O *dans un plan donné.*

N. B. — On tiendra compte des considérations géométriques.

(4 heures.)

Calcul.

On donne l'équation

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

1° *Constater qu'une de ses racines* x *est comprise entre* $+1$ *et* $+1,5$.

2° *La méthode d'approximation de Newton est-elle applicable à la recherche de cette racine?*

3° *Former l'équation qui donne* $y = 1,5 - x$.

4° *Calculer la valeur* y_1 *qu'elle donne pour* y *quand on néglige les termes de degré supérieur au premier dans cette équation en* y.

5° *Évaluer les termes négligés dans ce calcul et déduire de cette évaluation une nouvelle valeur* y_2 *plus approchée de* y *que* y_1, *en tenant compte des termes de degré supérieur au premier.*

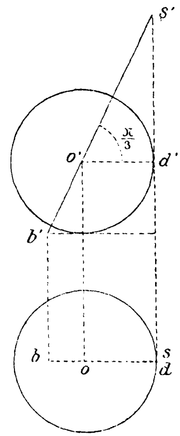
Règle à calcul ou calcul arithmétique à volonté.

(1 heure.)

Épure de Géométrie descriptive.

1° *Une sphère de* 6^{cm} *de rayon. La ligne de rappel* OO′ *des projections du centre a pour longueur* 17^{cm}. *Elle est parallèle au grand côté de la feuille, à* 14^{cm} *du bord droit, le point* O *à* 12^{cm} *du bord inférieur.*

2° *Un cône de révolution a son axe dans le plan de front du centre de la sphère. Son sommet* SS′ *est sur la verticale et au-dessus du point le plus à droite dd′ de la sphère. Une des génératrices de front passe par le centre et fait avec l'horizon-*



tale O′*d′ un angle égal à* $\frac{\pi}{3}$. *L'autre génératrice de front est la tangente non verticale menée par s′ au contour apparent vertical de la sphère.*

On représentera le solide, supposé opaque, formé par l'ensemble de la sphère et du cône, ce dernier étant limité, d'une part, à son sommet, et, d'autre part, au plan perpendiculaire à son axe mené par la trace bb′ de la droite SO, S′O′ *sur le plan tangent à la sphère en son point le plus bas.*

(4 heures.)

CORRESPONDANCE.

M. H. Brocard. — *Au sujet de la réponse* 804. — Le cahier de juin 1914 contient, pp. 281-282, une réponse à la question 804. Je désire à cette occasion rappeler que j'ai adressé depuis longtemps une solution tout à fait pareille à celle de M. Ono, et accompagnée de quelques vérifications numériques. Cet envoi date du 21 octobre 1869.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Grenoble.

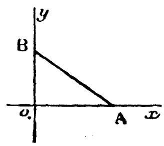
ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + (1 + m)y = e^x + e^{2x} + \sin x,$$

où m désigne une constante réelle. Donner l'expression de l'intégrale générale pour toutes les valeurs réelles de m.

II. *Un mobile* B *se meut sur la droite* Oy *avec une vitesse constante et égale à* 1. *Un second mobile* A *est assujetti à se trouver sur la droite perpendiculaire* Ox, *et à une distance constante a du mobile* B. *Écrire l'équation du mouvement du mobile* A. *Décrire ce mouvement en étudiant successivement les cas où à l'instant initial l'ordonnée* y_0 *du mobile* B, *qui est inférieure à a en valeur absolue, est positive, nulle et négative. Tracer le diagramme des espaces et celui des vitesses.*

III. *On fait tourner autour de son axe une parabole de paramètre a, et l'on coupe le paraboloïde de révolution* *ainsi engendré par un plan perpendiculaire à l'axe, et situé à la distance h du sommet. Calculer le volume du solide obtenu, sa surface totale : calculer cette surface à $\frac{1}{100}$ près pour $a = 2$, $h = 3$. Calculer le moment d'inertie du solide, supposé homogène de densité 1, par rapport à*



l'axe de révolution. Déterminer le centre de gravité et l'ellipsoïde central d'inertie de ce solide. Quel doit être le rapport $\frac{h}{a}$ pour que cet ellipsoïde soit une sphère?

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$2xyy' = y^2 - 4x^2.$$

Définir géométriquement les courbes intégrales.

III. *Un point matériel* M, *de masse* m, *mobile sur une horizontale fixe* Ox, *est soumis uniquement à une résistance de milieu* R, *qui est dirigée en sens contraire de la vitesse* V *et dont la valeur absolue est* $mk\sqrt{v}$, k *désignant une constante positive donnée.*

A l'instant $t = 0$, *le mobile est lancé dans le sens positif* Ox *avec une vitesse donnée* v_0. *Calculer :* 1° *le*

temps T *au bout duquel la vitesse s'annule;* 2° *l'espace parcouru pendant le temps* T; 3° *le travail de la force* R *pendant le même temps. Application numérique :* $m = 3$, $k = 2$, $v_0 = 4$, *en unités C. G. S.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

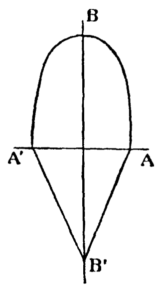
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x + x^3 + e^{ax},$$

où a désigne une constante réelle. Donner l'expression de l'intégrale générale pour toutes les valeurs réelles de a.

II. *Un point* M *de masse* 1, *mobile sur une droite* Ox, *est repoussé par le point* O *de cette droite proportionnel-*

lement à sa distance x à ce point : à l'unité de distance, la force répulsive est égale à 4. *A l'instant initial* (t = 0), *le point* M *est placé en* M_0, *à la distance* 1 *du point* O, *et lancé vers le point* O *avec une vitesse dont la valeur absolue est égale à* 1. *Étudier le mouvement du point* M. *Tracer le diagramme des espaces et celui des vitesses.*

III. *De l'ellipse d'axes* AA'(= $2a$) *et* BB'(= $2b$), *on considère la moitié* ABA', *et l'on ajoute à cette demi-ellipse le triangle* AB'A'. *On suppose que le solide*



engendré par la révolution de la figure totale autour de l'axe BB' *est homogène de densité* 1. *Calculer le volume de ce solide, déterminer son centre de gravité, calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe* BB'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer les équations différentielles*

$$y'' = \frac{y'^2 + y'}{y}, \qquad y'' = \frac{y'^2 + 1}{y}.$$

II. *On coupe l'hyperboloïde de révolution à une nappe qui a comme équation en axes rectangulaires*

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$$

par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et de cotes $\pm b$. *Calculer le volume de l'hyperboloïde compris entre ces deux plans. Calculer la longueur du segment que ces deux plans interceptent sur une génératrice quelconque de l'hyperboloïde. En supposant que cette longueur est égale à* 2 *et que* a *est égal à* 1, *calculer à une unité près le volume considéré.* (Octobre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un point* M *de masse* m *est attiré par un centre fixe* O *proportionnellement à la distance; on appellera le coefficient de proportionnalité* mk^2.

Ce point M *est en outre soumis à une résistance de milieu proportionnelle à la vitesse (coefficient* mh^2).

On rapporte le mouvement à deux axes fixes rectangulaires passant par O *et l'on demande :*

1° *Écrire les équations différentielles du mouvement, en général.*

2° *Trouver l'intégrale générale de ces équations, dans le cas particulier où le coefficient* h^2 *est petit par rapport à* k^2.

3° *On supposera le point* M *situé sur* Ox *à l'instant initial (abscisse* x_0 *positive) et la vitesse initiale* v_0 *dirigée parallèlement à* Oy *et dans le même sens : calculer dans ces conditions les valeurs des constantes d'intégration en fonction des données initiales.*

Quel est alors la forme de la trajectoire? Étudier le mouvement.

4° *La trajectoire précédente coupe une infinité de fois l'axe des* x; *soit* A_n *le* $n^{\text{ième}}$ *de ces points d'intersection dans l'ordre où les rencontre le mobile* (A_1 *étant la position initiale*); *calculer la valeur absolue de l'aire limitée par l'axe* Ox *et la portion de trajectoire décrite entre deux points consécutifs* A_n *et* A_{n+1}.

5° *En appelant* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *les aires dont il est question dans la quatrième partie, montrer que la série* $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$ *est convergente.*

Quelle est la somme de cette série?

On peut faire sur cette somme quelques remarques intéressantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Étant donnée l'équation*

$$\sin x + \frac{1}{10}\cos x = x,$$

calculer numériquement sa racine positive.

Donner le résultat avec une approximation égale au moins à $\frac{1}{100}$.

2° *Calculer le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène infiniment mince, de côtés a et b par rapport :*

1° *à l'un de ses axes;*

2° *à une droite de l'espace, parallèle à un axe de la plaque à la distance d de cet axe.*

Déduire de ces résultats le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle homogène, de dimensions a, b, c par rapport à l'un de ses axes.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 11y = e^{3x}\left[\sin\sqrt{2}x + x^2 + 1\right].$$

1° *Trouver l'intégrale générale;*

2° *Trouver l'intégrale particulière qui représente, par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires, l'équation d'une courbe C passant par l'origine et admettant comme tangente en ce point la bissectrice des axes $y = x$.*

3° *Construire la portion de cette courbe C comprise entre l'origine et le point qui a pour abscisse* $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, la portion de courbe C précédemment construite et la droite $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, avec une erreur absolue* *inférieure à $\frac{1}{100}$, l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}.$$

(Novembre 1912.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — *Champs de forces, lignes de force, surfaces de niveau.*

Cas où les forces dérivent d'un potentiel; travail d'une force dérivant d'un potentiel.

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver toutes les courbes telles que la somme* $Mm + MT$ *des distances d'un point quelconque* M *à sa projection* m *sur* Ox *et au point* T *où la tangente en* M *rencontre le même axe soit égale à une longueur donnée.*

L'une de ces courbes peut être représentée par les équations

$$x = 2t + a\,\mathrm{L}\frac{a-t}{a+t},$$

$$y = \frac{a^2 - t^2}{2a},$$

où a *désigne une quantité fixe et* t *un paramètre variable; construire cette courbe, la rectifier.*

II. Ox, Oy, Oz *étant trois axes de coordonnées rectangulaires, construire les projections sur les plans* xOz, yOz *de la courbe d'intersection du cône*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

avec le cylindre droit qui a pour base dans le plan xOy *la lemniscate représentée par l'équation*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

où a *désigne une longueur donnée.*

Calculer l'aire de la portion de surface du cône comprise à l'intérieur du cylindre.

Problèmes. — I. *Construire la courbe plane* (C) *représentée dans un système d'axes rectangulaires, par les équations*

$$x = t^2, \qquad y = -\frac{t^3}{3} + t,$$

où t désigne un paramètre variable; rectifier cette courbe, calculer l'aire de la portion de plan limitée par la boucle.

Former la relation qui existe entre les abscisses de deux points M, M' *de* (C) *où les tangentes sont parallèles.*

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x + e^{-x}.$$

Épreuve pratique. — I. *e désignant la base des logarithmes népériens, on considère la courbe* (C) *qui, rapportée à deux axes rectangulaires, a pour équation*

$$\text{(C)} \qquad y = e^x - ax^2 + 7x - 1.$$

1° *a variant, construire le lieu des points d'inflexion des courbes* (C).

2° *Construire la courbe* (C) *obtenue pour* $a = 5$.

3° *Soit* A *le point d'inflexion de la courbe précédente. Calculer l'aire de la portion du plan limitée par l'arc* OA *et la corde* OA.

II. *Un point* M *de masse* 1, *mobile sur une droite ox, est repoussé par le point o de cette droite proportionnel-*

lement à sa distance à ce point : à l'unité de distance, la force répulsive est égale à 1. *On suppose le point* M *placé à l'instant initial en* M_0, *à une distance* 2 *du point o, et lancé vers le point o avec une vitesse dont la valeur absolue est* 1. *Étudier le mouvement du point* M.

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — Question de cours (au choix). —

1° *Énoncer et démontrer le théorème des forces vives dans le cas d'un point matériel unique. Appliquer ce théorème au cas où la résultante des forces appliquées au point considéré dérive d'une fonction de forces, définir alors l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale du point matériel.*

2° *Travail des forces appliquées à un solide théorique indéformable.*

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *trouver et intégrer l'équation différentielle des courbes telles que la longueur du segment* MN *intercepté sur une normale quelconque par le pied* M *de cette normale et le point* N *d'intersection avec* Ox *soit dans un rapport constant donné avec la longueur du rayon vecteur* OM; *examiner en particulier le cas où les deux longueurs sont égales.*

II. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *construire la courbe* (C) *représentée par les équations*

$$y^2 - x^3 + 1, \qquad z = 0;$$

trouver le lieu géométrique du milieu des segments interceptés par cette courbe sur les droites issues du point $(0, 1, 0)$.

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par le plan xOy, $(0 \leqq x \leqq 1)$, *le cylindre droit qui a pour base la courbe* (C) *et la surface représentée par l'équation*

$$z = x^2 y^2.$$

Problème. — *Construire la courbe plane* (Γ) *représentée dans un système d'axes rectangulaires par l'équation*

$$y^2(x = 1) - x^3 = 0;$$

indiquer le nombre des points d'intersection de cette courbe avec une droite quelconque issue du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ *sur* Ox; *discuter.*

Calculer l'aire d'un trapèze curviligne limité par un arc AB *de* (Γ), *les parallèles à* Oy *menées par* A, B *et l'axe* Ox; *calculer également le volume engendré par ce trapèze en tournant autour de* Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Géométrie analytique. — *On considère la courbe* (C) *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *et qui a pour équation*

$$(\mathrm{C}) \qquad y = x^2 + x^3.$$

1° *Représenter la courbe* C *et les cercles de courbure aux points de rencontre* O *et* A *de la courbe* (C) *avec* OX.

2° *Démontrer que le cercle de courbure au point* O *ne rencontre* C *qu'en un seul point* B *autre que l'origine. Calculer les coordonnées du point* B.

3° *L'arc de courbe* C *limité aux points* O, B *partage en deux parties le cercle de courbure en* O. *Déterminer les aires de ces régions.*

Mécanique. — *Calculer les moments d'inertie du volume d'un cône de révolution homogène, dont le rayon de base est* R, *la hauteur* h *et la masse spécifique* μ : 1° *par rapport à l'axe de révolution;* 2° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le sommet;* 3° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le centre de gravité;* 4° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le centre de la base.*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — *Énoncer et démontrer le théorème des projections des quantités de mouvement d'un système matériel, ou du mouvement du centre de gravité, et le théorème des moments des quantités de mouvement.*

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à un système de coordonnées polaires de pôle* O, *construire la courbe* (C) *représentée par l'équation*

$$\rho = a \sin 2\omega,$$

où ω *et* ρ *désignent l'angle polaire et le rayon vecteur d'un point* M, a *étant une longueur donnée.*

Construire aussi la courbe engendrée par le point M′ *de la droite* OM *tel que* $\overline{\mathrm{OM}}$ *et* $\overline{\mathrm{OM'}}$ *satisfassent à l'égalité*

$$\overline{\mathrm{OM}}\,\overline{\mathrm{OM'}} = a^2.$$

Calculer l'aire d'une boucle de la courbe (C).

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère de centre O *et de rayon* a *et par le cylindre droit qui a* (C) *pour base.*

Trouver et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de la famille de courbes engendrée par (C) *quand* a *varie.*

II. 1° *Construire — les axes de coordonnées étant rectangulaires — la courbe plane représentée par l'équation*

$$y = x(\lambda + \mathrm{L}x),$$

λ *désignant un paramètre.*

Calculer les coordonnées du point de cette courbe où la tangente est parallèle à Ox; *indiquer la ligne décrite par ce point quand* λ *varie.*

Calculer l'aire du triangle curviligne limité par Ox, *la courbe donnée et une parallèle à* Oy.

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + y = x + \cos x.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Algèbre, Géométrie analytique, Calcul différentiel et intégral. — *Construire la courbe* C *représentée en coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho = \cos 3\omega.$$

On représentera par L *et* S *la longueur et l'aire d'une boucle.*

Soient L' *et* S' *la longueur et l'aire de la courbe* E

$$x^2 + q y^2 = 1.$$

Calculer S, S', *et le rapport* $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}$ (*ce rapport est un nombre rationnel*).

Mécanique (au choix). — I. *Un point matériel* M *de masse* 1 *mobile sur une droite est attiré par un point* O *de cette droite proportionnellement à la distance, la valeur absolue de l'attraction à l'unité de distance étant* α^2, *et repoussé par un autre point* A *de cette droite*

(OA = 2) *proportionnellement à la distance, la valeur absolue de répulsion à l'unité de distance étant* β^2.

Le point M *a-t-il une position d'équilibre? Montrer que*

l'attraction et la répulsion considérées peuvent être remplacées en général par une attraction ou une répulsion unique. Dans le cas où elles peuvent être remplacées par une attraction unique, quel est le mouvement du point M, *quelle est la période de ce mouvement? La position d'équilibre du point* M *est-elle stable ou instable? Quand le point* M *n'a pas de position d'équilibre, quel est son mouvement?*

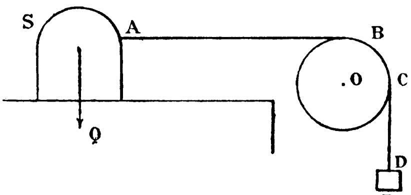
II. 1° *Calculer le travail à fournir pour faire passer* 10^{m^3} *d'eau d'un réservoir* A, *qui en contient* 25, *dans un réservoir* A', *qui est vide, sachant que :*

A *est un parallélépipède rectangle dont la base horizontale* B *a* $3^m,2$ *de long sur* $2^m,15$ *de large;*

A' *est un cylindre de révolution, dont la base horizontale* B', *placée à* $6^m,5$ *au-dessus de* B, *a* $2^m,2$ *de diamètre.*

2° *Trouver la condition de l'équilibre strict du système suivant :*

Un solide S, *de poids* Q, *repose par une face plane sur*



une table horizontale H, *sur laquelle il peut glisser avec frottement; il est soumis en* A *à un effort de traction exercé par une corde* ABCD, *qui s'enroule en* BC *sur la section droite d'un cylindre de révolution fixe* O, *sur lequel elle peut glisser avec frottement, et qui porte à son extrémité* D *un poids* P. *On supposera que le brin* AB *est horizontal et que son prolongement rencontre la verticale du centre de gravité* G *de* S.

Données. — *Poids*, $Q = 50^{kg}$; *coefficient de frottement de* S *sur* H, $f = 0,15$; *coefficient de frottement de la corde sur le tambour* O, $f' = 0,25$.

On rappelle que le nombre $e = 2,718$ *sensiblement.*

(Novembre 1912.)

Lyon.

Épreuve théorique. — I. *Principe des vitesses virtuelles. Principe de d'Alembert. Équations de Lagrange.*

II. *On considère la surface qui rapportée à trois axes rectangulaires a pour équation*

$$z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

1° *Montrer que sur cette surface il y a une infinité de droites.*

2° *Construire les courbes de niveau, sections de la surface par des plans parallèles à* xOy.

3° *Lignes de plus grande pente de la surface.*

4° *Volume compris entre le plan* $z = 0$, *la surface et les quatre plans :* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2° *Quelle relation y a-t-il entre les courbes intégrales de l'équation* (E) *et la courbe*

$$\text{(C)} \qquad y = \frac{-e^x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

3° *Construire la courbe* (C).

4° *La courbe* (C) *coupe-t-elle la droite*

$$y = -\frac{3}{2}.$$

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère la courbe* C *du plan* xOy *qui a pour équation en coordonnées polaires*

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2},$$

Ox *étant l'axe polaire.*

1° *Construire cette courbe.*

2° *Déterminer son degré.*

3° *On considère la surface cylindrique engendrée par des droites parallèles à* Oz *qui s'appuient sur la portion de courbe* C *décrite, lorsque* θ *varie de* 0 *à* π. *Volume du solide* S *limité par cette surface cylindrique, par le plan* $z = 0$ *et par le plan* $z = y$.

4° *Aires des différentes faces du solide* S.

II. *Établir l'équation différentielle du mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe donnée, quand on néglige le frottement. Appliquer au mouvement du pendule simple.*

Épreuve pratique. — 1° *Construire la courbe*

$$y = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

sans étudier la dérivée y'. *Position des branches de la courbe par rapport aux asymptotes.*

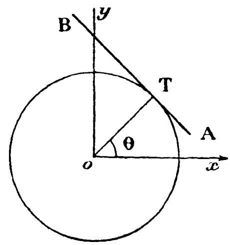
2° *Calculer* $\int_0^1 y\,dx$.

3° *Nombre de points d'intersection réels de la courbe et de la droite* $y = 1$. *Calculer à* $\frac{1}{10}$ *près les coordonnées de ces points d'intersection.* (Novembre 1912.)

Marseille.

Épreuve théorique. — I. *Un segment rectiligne* AB *de ongueur* πa *roule sans glisser sur un cercle fixe de centre* O *et de rayon* a, *de manière que le point de contact* T *du segment avec le cercle soit au début du* *mouvement à l'une des extrémités du segment et à la fin à l'autre.*

1° *Exprimer les coordonnées rectangulaires des points*



des trajectoires que décrivent les points A *et* B *en fonction de l'angle* $\theta = \widehat{\mathrm{TO}x}$ *qui est nul au début du mouvement.*

2° *Calculer la longueur de la trajectoire du point* A.

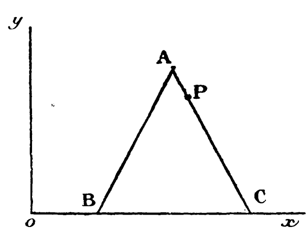
3° *Calculer l'aire comprise entre le cercle, la trajectoire de* A *et la position finale du segment* AB.

SOLUTION.

$$s = a\,\frac{\pi^2}{2}; \quad u = a^2\,\frac{\pi^2}{3}.$$

II. *Dans un plan vertical, sur une droite horizontale* Ox, *peut glisser sans frottement une plaque triangulaire* ABC *qui a la forme d'un triangle équilatéral de* 1^{m} *de côté.*

Sur le côté AC *on place un point pesant* P *qui a le même poids que la plaque. Ce point peut glisser sans frottement sur* AC.



A l'origine du temps, le système est sans vitesse et le point P *est en* A. *On abandonne le système à lui-même et* *l'on demande quel sera le déplacement de la plaque quand le point* P *sera arrivé en* C.

SOLUTION.

$x = -0^{m},25.$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Former par identification une série à coefficients constants*

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$$

qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ay,$$

où a *est une constante positive ou négative.*

2° *Vérifier les propriétés suivantes :*

La série obtenue est convergente pour toute valeur finie de x.

On peut prendre arbitrairement les coefficients λ_0 *et* λ_1.

On peut ranger les termes de la série y *de sorte qu'on ait*

$$y = \lambda_0 y_1 + \lambda_1 y_2$$

en représentant par y_1 *et par* y_2 *deux séries à coefficients numériques (*a *étant compté comme un nombre donné), l'une ne renfermant que des puissances paires de* x, *l'autre que des puissances impaires.*

Chacune des séries y_1 *et* y_2 *est une intégrale de l'équation différentielle.*

3° *Traiter successivement les cas où l'on a*

$$a = 2 \qquad \text{et} \qquad a = -3.$$

Nota. — *On peut vérifier les calculs en comparant les résultats obtenus avec ceux que donne l'intégration générale directe de l'équation différentielle.*

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *En imaginant un tore engendré par un cercle de* $0^{m},10$ *tournant autour d'un axe situé dans son plan à une distance de* 1^{m} *du centre de ce cercle,* *on demande de mesurer les courbures principales en l'un quelconque des points du tore situés à la distance de* $0^m,95$ *de l'axe.*

En prenant pour axe des z la normale à la surface au point considéré, pour axes des x et des y les traces des sections principales sur le plan tangent, donner une valeur approchée de z considérée comme fonction de x et y en négligeant les infiniment petits du troisième ordre. Indiquer la nature du paraboloïde correspondant qui représente approximativement l'élément de surface du tore dans le voisinage du point considéré.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 u}}$$

par la méthode de Simpson en subdivisant l'intervalle de 0 *à* $\frac{\pi}{2}$ *en six parties égales.*

Calculer la même intégrale par la méthode des trapèzes en utilisant les mêmes ordonnées que dans la méthode de Simpson.

On fera les calculs à cinq décimales.

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Mathématiques. — *Déterminer l'enveloppe des droites de la famille déterminée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + m \cot \alpha,$$

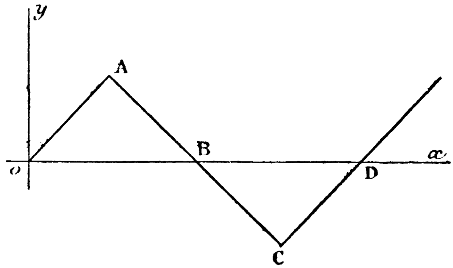
où m *représente une longueur donnée et* α *un paramètre variable. Calculer l'angle de l'axe des x et du bras de levier de la droite (perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite) et la longueur de ce bras de levier quand* α *est choisi.*

Longueur d'arc de la courbe enveloppe entre α *et* $\frac{\pi}{2}$.

II. Mécanique. — *Un mobile pesant* P *est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à la distance ; l'attraction à la distance d est égale au poids du point mobile* P.

Trouver le mouvement de P, *sachant qu'à l'origine du temps il est placé, sans vitesse initiale, sur l'horizontale du point* O *en un point* A_0 *tel que* $OA_0 = a$.

Épreuve pratique. — *On considère la fonction représentée par le graphique suivant :*



où les points A, B, C, D *ont pour coordonnées*

$$A\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad B\begin{cases} x = \pi, \\ y = 0; \end{cases} \quad C\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2}, \\ y = -\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad D\begin{cases} x = 2\pi, \\ y = 0. \end{cases}$$

Cette fonction a pour période 2π.

On demande de calculer les coefficients de la série trigonométrique

$$A_0 + A_2 \cos x + A_3 \cos 2x + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots$$

qui la représente.

On rappelle aux candidats les formules :

$A_0 =$ valeur moyenne de la fonction de o à $\lambda\pi$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos n\pi \, dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin nx \, dx.$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Étant donnés trois axes rectan-*

gulaires et une surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = f(z),$$

où $f(z)$ est une fonction qui s'annule pour $z = 0$ et qui prend des valeurs positives pour z positif, on peut considérer cette surface comme engendrée par une ellipse située dans un plan mobile parallèle au plan des xy et qui varie avec z, mais en restant semblable à elle-même. On peut, en outre, imaginer que cette surface, limitée par un plan quelconque parallèle au plan des xy, représente l'intérieur d'une coupe dont le fond est à l'origine des coordonnées et dont le bord est l'une des ellipses précédentes.

Cela posé, on place verticalement l'axe des z et l'on suppose qu'on remplisse d'eau cette coupe jusqu'à une hauteur z au moyen d'un robinet à débit constant donnant α unités de capacité pendant l'unité de temps, et l'on demande :

1° *Le volume d'eau jusqu'à la hauteur z;*

2° *L'expression de la vitesse d'accroissement de la hauteur z;*

3° *L'expression de la hauteur z en fonction du temps lorsque $f(z)$ est la dérivée d'une fonction connue* $F(z)$.

Applications numériques. — *En supposant un débit de* 3^l *à la minute.*

1. *On prend $a = b = 1^{dm}$ et $f(z).1^{dm} = 2z$;*

2. *On prend $a = b = 1^{dm}$ et $f(z).1^{dm^2} = z^2$, le décimètre étant pris pour unité de longueur.*

Vérifier que, pour une même hauteur z dans les cas 1 et 2, le carré de l'un des temps est proportionnel au cube de l'autre.

SOLUTION.

$$V_z = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_1 + S_z) = \frac{\pi abz}{6}\left[4f\left(\frac{z}{2}\right) + f(z)\right].$$

$\frac{dz}{dt} = \frac{\alpha}{S_z}$, ce qui montre que la vitesse d'accroissement de z est inversement proportionnelle à la section de niveau, comme on pouvait le prévoir.

On a

$$\alpha\, dt = \pi ab\, f(z)\, dz$$

et, en intégrant,

$$\alpha t = \pi ab\, \mathrm{F}(z) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{F}(0) = 0.$$

On a ensuite :

1° $S_z = 2\pi z$ en décimètres carrés,

$V_z = \pi z^2$ en décimètres cubes,

$t_1 = \frac{1}{3}\pi z^2$ en secondes;

2° $S_z = \pi z^2$ en décimètres carrés,

$V_z = \frac{1}{3}\pi z^3$ en décimètres cubes,

$t_2 = \frac{1}{9}\pi z^3$ en secondes.

Enfin, on a

$$\frac{t_1^3}{t_2^2}\, 3\pi.$$

Épreuve pratique. — *Sur une droite* Ox *inclinée à* 4 *se meut sans frottement un point pesant* M *qui est attiré par le point fixe* O *proportionnellement à la distance; l'attraction, à* 10$^{\text{m}}$ *de distance, est égale au poids du point* M.

1° *Trouver la position d'équilibre.*

2° *Trouver le mouvement du point* M *en supposant qu'à l'origine du temps il est placé sans vitesse au point* O.

3° *Trouver, à* $\frac{1}{10}$ *de seconde près, la durée de l'oscillation de* M.

SOLUTION.

A la distance x, l'attraction est kx; à la distance 10, on a $10k = mg$, d'où la valeur de k.

Il y a équilibre pour $\frac{mg}{10}x = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$, d'où $x = 7,07$.

Dans le mouvement, on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sqrt{\frac{2}{2}} - \frac{mg}{10}x,$$

d'où

$$x = s\sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{g}}{10}t\right).$$

Le point oscille entre $x = 0$ et $x = 14,14$.

La durée de l'oscillation simple est

$$\pi\sqrt{\frac{10}{g}} = 3^s,1.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$x^4 - 6x^2y^3 + y^4 = 1.$$

2° *Trouver le mouvement d'un point* A *de masse égale à l'unité attiré par un point fixe* O *dont l'attraction à la distance* ρ *est égale à*

$$\frac{6k^2a}{\rho^4} - \frac{6k^2a^2}{\rho^5}.$$

On suppose que la distance initiale du point A *au point* O *est* a, *et que la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur initial et est égale à* $\frac{k}{a}$.

On montrera que la trajectoire est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = a(2 + \cos\theta),$$

et l'on donnera la relation qui détermine θ *en fonction du temps.*

On montrera qu'à toute valeur du temps correspond une et une seule valeur de θ.

SOLUTION.

Théorème des aires

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt} = k.$$

Théorème des forces vives

$$\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{4k^2a}{\rho^3} - \frac{3k^2a^4}{\rho^4}.$$

En éliminant dt on a

$$\frac{1}{\rho^4}\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{4a}{\rho^3} - \frac{3a^2}{\rho^4},$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \frac{d\rho}{\sqrt{a^2-(\rho-2a)^2}}$$

et par suite

$$\rho = a(2+\cos\theta).$$

En remplaçant ρ par sa valeur dans l'équation des aires, on a

$$a^2\left(4+4\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta = k\,dt,$$

d'où

$$\frac{9}{2}\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{4}\sin2\theta = Ct.$$

La dérivée du premier membre étant toujours positive, il ne peut, pour une valeur donnée de t, y avoir plus d'une racine. D'ailleurs cette racine existe, car, pour $\theta = 0$, le premier nombre est nul, et, pour $\theta = \infty$, il est infini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = cx = \sin2\pi ft,$$

dans laquelle on a

$$b = 1,5,$$
$$c = 4,$$
$$f = 0,2547.$$

1° *Calculer une intégrale particulière de la forme*

$$A\sin(2\pi ft+\alpha);$$

2° *Calculer l'intégrale générale.*

Nota. — *Les valeurs numériques données provenant de* *mesures, on exécutera les calculs de manière à obtenir les résultats avec l'approximation strictement compatible avec les données.* (Juin 1913.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une courbe* C *a pour équation*

$$3ay^2 = x^3.$$

Par l'origine, on mène deux droites rectangulaires, de coefficients angulaires m *et* $\frac{-1}{m}$, *qui coupent la courbe en deux points* M *et* M'. *Les tangentes en ces points se coupent au point* P.

1° *Calculer les coordonnées de ce point* P, *et démontrer qu'il décrit la parabole*

$$4y^2 = 9a(x-a)$$

lorsque m *varie.*

2° *Montrer que cette parabole est tangente à la courbe* C, *en deux points symétriques* A *et* A'.

3° *Calculer l'aire comprise entre les arcs de la courbe* C *et de la parabole, limités aux trois points* O, A, A'.

4° *Calculer la longueur de l'arc* OA *de la courbe* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les intégrales*

$$\int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^6}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^\infty \frac{x+x^3}{1+x^6}\,dx;$$

que devient la première de ces intégrales, si l'on fait le changement de variable $x = \frac{1}{y}$.

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une courbe* C *est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho = a(1+\cos\omega).$$

Soit M *un point de la courbe, la droite* OM *coupe la courbe en un autre point* M'.

1° *Démontrer que la longueur* MM′ *est constante, et que les tangentes en* M *et en* M′ *sont perpendiculaires.*

2° *Les normales en* M *et en* M′ *se coupent en un point* A; *calculer les longuenrs* MA *et* M′A; *démontrer que* OA *est perpendiculaire sur* OM, *et trouver le lieu du point* A.

3° *Calculer les coordonnées,* x *et* y, *du point* A, *et du milieu* B *de* MM′; *former l'équation de la droite* AB, *et démontrer qu'elle passe par un point fixe.*

4° *Chercher l'enveloppe du cercle qui passe par les trois points* M, M′, A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'intersection des deux surfaces*

$$x^2+y^2+z^2+4a^2, \qquad y^2+z^2=3ax.$$

Évaluer le volume, et la surface totale, du solide limité par les portions de ces surfaces comprises entre la courbe d'intersection, et les points (0, 0, 0) *de la seconde,* ($2a$, 0, 0) *de la première.* (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\cos 2x.$$

Déterminer l'intégrale qui représente une courbe C *passant par l'origine, et tangente en ce point* O *à* Ox. *Montrer qu'il y a deux tangentes à la courbe* C, *qui passent par* O, *et qui ont une infinité de points de contact. Déterminer, en chacun de ces points de contact, le centre de courbure et le rayon de courbure; montrer que ces centres de courbure sont sur une hyperbole. Montrer que les aires des cercles de courbure, en ces points de contact, ont une somme finie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Quelles sont les surfaces représentées par les équations*

$$\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=2x,$$

$$\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+a)^2}{4a},$$

où a, b, c sont positifs. Montrer que leur intersection est formée de deux courbes planes. Calculer le volume limité par les parties des deux surfaces comprises entre ces deux courbes planes. (Novembre 1912.)

Nancy.

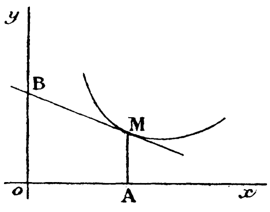
ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — *Établir la formule de Green*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Application à $\int_C (y\,dx - x\,dy)$.

Géométrie. — *Soit* C *une courbe tracée dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *La tangente en un point quelconque* M *de la courbe* C *rencontre* Oy *en un point* B *et la parallèle à* Oy *menée par* M *rencontre* Ox *en un point* A.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles l'aire du*



trapèze OAMB *a une valeur donnée* K^2, *lorsque* M *décrit la courbe.*

2° *Tracer les courbes* C *dont l'une est une hyperbole, soit* H. *Montrer que l'aire limitée par l'hyperbole* H, *une courbe* C *quelconque et la parallèle à* Oy *menée par le point de cette courbe* C *pour lequel la tangente est parallèle à* Ox, *a une valeur constante.*

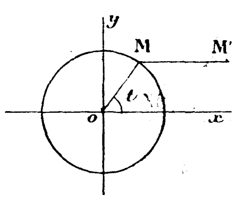
Géométrie et Mécanique. — *On considère le cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z et dont la base est la parabole du plan des xy représentée par* *l'équation*

$$y = \frac{x^2}{2a}.$$

Déterminer sur ce cylindre une courbe C, *passant par l'origine des coordonnées, et dont les tangentes font avec l'axe* Ox *un angle constant égal à* $\frac{\pi}{4}$. *On posera* $x = a \sin t$ *et l'on exprimera les coordonnées des points de la courbe au moyen du paramètre t.*

En supposant que t représente le temps et qu'un mobile, de masse m, entièrement libre, ait un mouvement défini par les expressions des coordonnées des points de la courbe C *en fonction du temps, déterminer la force qui le sollicite et le travail de cette force pour un déplacement du mobile.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première Partie. — *Un cercle étant rapporté à deux diamètres rectangulaires* Ox, Oy, *on définit un point* M *variable de ce cercle à l'aide de l'angle t que forme le rayon* OM *avec* Ox.



Sur la parallèle à Ox *menée par* M *on porte un vecteur* MM', *dont la mesure est une fonction déterminée* $f(t)$ *du paramètre t.*

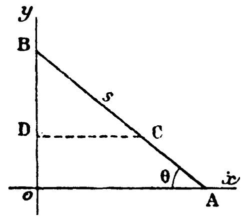
1° *Établir les formules donnant l'aire* S *balayée par le vecteur* MM' *et l'aire* Σ *balayée par le rayon vecteur* OM' *lorsque t varie de zéro à une valeur quelconque.* (*Pour trouver l'aire* Σ, *on utilisera les formules liant les coordonnées polaires du point* M' *à la variable t.*)

2° *Déterminer la fonction* $f(t)$ *de telle sorte que le rapport des aires* Σ *et* S *ait une valeur constante égale à* K.

Dans le cas où K *est égal à l'unité, achever l'intégration et tracer les courbes lieu du point* M′.

Deuxième Partie. — I. *Calcul du rayon de courbure d'une courbe gauche.*

II. *On considère une barre homogène* AB *de longueur* l



et dont la masse de l'unité de longueur est égale à μ. *Cette barre se déplace dans un plan horizontal de façon que ses extrémités* A *et* B *glissent sans frottement sur deux axes rectangulaires* Ox, Oy *de ce plan. Sa position est déterminée à chaque instant par l'angle* $BAO = \theta$, *et chacun de ses points* C *est déterminé par sa distance* $BC = S$ *au point* B.

Chaque élément de la barre, de longueur ds et de masse dm, entourant un point tel que C, *est soumis à une force attractive de la part de* Oy; *cette force est égale au produit de dm par la mesure du vecteur* CD *mené par le point* C *perpendiculairement à* Oy.

1° *Déterminer la grandeur et la position de la résultante des forces appliquées à la barre lorsque* θ *a une valeur donnée; quel est le travail de ces forces pour un déplacement de la barre?*

2° *Calculer, d'après le théorème de König, l'énergie cinétique de la barre.*

3° *Écrire l'équation du mouvement et achever l'intégration, lorsque les conditions initiales permettent à la barre d'atteindre la position* Ox *avec une vitesse nulle.*

(Octobre 1911.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=e^x-x-1.$$

Calculer l'intégrale y de cette équation qui s'annule pour $x=0$, ainsi que sa dérivée première. Reconnaître si la fonction y ainsi obtenue passe par un maximum ou par un minimum pour $x=0$.

II. *On considère l'intégrale curviligne.*

$$\int\frac{y(1-x^2+y^2)\,dx+x(1+x^2-y^2)\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Démontrer que la valeur de cette intégrale, supposée étendue à un arc de courbe AB, *ne dépend que de l'origine* A *et de l'extrémité* B *de cet arc de courbe, et non des points intermédiaires. Calculer l'intégrale, lorsque, le point* A *étant l'origine des coordonnées, le point* B *a des coordonnées données x_1, y_1.*

III. *Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires. Un point quelconque* M *d'une courbe* C *se projette sur Ox en* H *et la tangente en ce point rencontre Ox en* T.

1° *Déterminer toutes les courbes* C *telles que l'on ait*

$$\overline{\mathrm{HO}}\,\overline{\mathrm{HT}}=-1.$$

Construire celle de ces courbes (C_1) qui passe par le point $x=0$, $y=1$, et calculer à 0,01 près les coordonnées de ses points d'inflexion.

2° *On mène par* O *la parallèle à la droite symétrique de* MT *par rapport à Ox. Cette parallèle rencontre* MH *en m. Construire la courbe C_2, lieu de ce point m, quand* M *décrit C_1.*

3° *Évaluer l'aire comprise entre C_1 et C_2.*

Mécanique. — *On considère le système matériel suivant : Un fil inextensible, flexible et de poids négligeable,* *tout entier situé dans un plan vertical fixe, part d'un point fixe* O, *descend verticalement, passe sous le cercle de gorge d'une poulie mobile* (C) *et de poids* P, *remonte verticalement, passe sur le cercle de gorge d'une poulie* (C′) *mobile autour de son axe horizontal supposé fixe, redescend verticalement et supporte un poids solide* S *homogène, pesant, de poids* Q, *ayant la forme d'un cylindre de révolution dont l'axe est dans le prolongement du fil. A l'origine des temps, le système, étant supposé sans vitesse, est abandonné à lui-même.*

1° *Déterminer le mouvement du solide* S, *le mouvement de la poulie* (C) *et la tension du fil. Montrer que cette tension ne dépasse jamais* $\frac{P+Q}{3}$.

2° *On suppose que, dans le mouvement considéré, le solide* S *descende à l'instant* t_0, *on coupe le brin de fil qui porte ce solide; il s'écoule alors un nouvel intervalle de temps précisément égal à* t_0, *avant que la poulie* (C) *repasse par la position qu'elle occupait au début du mouvement. Calculer le rapport des poids* P *et* Q.

N. B. — *On supposera les poulies* (C) *et* (C′) *homogènes et leurs cercles de gorge parfaitement lisses.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Construire, sur une feuille de papier quadrillé, pour* x *variant de* 0 *à* 1, *la courbe*

$$y = \frac{1}{\log \frac{1}{x}}.$$

2° *Se servir de la courbe ainsi construite pour résoudre graphiquement l'équation*

$$(6x+1)\log\frac{1}{x} = 1.$$

3° *Calculer l'intégrale*

$$\int_{0,25}^{0,75} \frac{dx}{\log \frac{1}{x}}$$

au moyen de la formule de Simpson, l'intervalle d'inté-

gration étant partagé en dix parties égales. Comparer le résultat obtenu à celui que fournirait l'utilisation directe du quadrillage.

N. B. — *On prendra pour origine un des quatre sommets de la partie quadrillée de la feuille, et pour axe des x le plus petit côté. On choisira les unités d'abscisse et d'ordonnée, de manière que le sommet de la partie quadrillée de la feuille, opposé à l'origine, ait pour coordonnées* $x = 1$, $y = 10$. *On calculera directement les ordonnées de la courbe pour des abscisses variant de centimètre en centimètre et l'on inscrira les valeurs de ces ordonnées sur la feuille de papier quadrillé.*

Il n'est pas demandé une approximation plus grande que celle que comporte l'usage exclusif de la règle à calcul.

La rédaction contiendra des indications sommaires sur les procédés de calcul employés.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + t.$$

Déterminer la solution de ce système telle que pour $t = 0$ x *et* y *prennent la valeur* 0.

Si l'on regarde les fonctions x et y de t ainsi déterminées comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, ce point engendre, lorsque t varie, une certaine courbe (C). *Construire cette courbe.*

Calculer l'aire engendrée par la révolution autour de Oy *de l'arc de la courbe* (C) *obtenu en faisant varier t de* 0 *à* 2π.

II. *On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy. *On désigne par* M *un point quelconque d'une courbe* (C) *du plan, par* P *sa projection sur* Ox, *par* Q *le point d'intersection de* Oy *avec la tangente à la courbe* C *en* M.

Former l'équation différentielle des courbes (C) *qui* *jouissent de la propriété que l'aire du trapèze* OPMQ *est égale à une aire donnée* a^2. *Intégrer cette équation et construire celle des courbes* (C) *qui passe par le point dont les coordonnées sont* $x = a$, $y = a$.

Mécanique. — I. *On donne, dans un plan fixe, deux axes de coordonnées rectangulaires fixes* Ox *et* Oy. *Un point matériel* M, *de masse* m, *peut se mouvoir librement dans ce plan. Il se trouve que, sous l'action d'une certaine force parallèle à* Oy, *ce point admet comme trajectoire une circonférence* (C) *de centre* O *et de rayon* R. *On connaît la vitesse* v_0 *dont est animé le mobile au moment* $t = 0$ *où son abscisse est nulle.*

Calculer en fonction du temps les coordonnées du point M ; *calculer en fonction de l'ordonnée du point* M *la vitesse de ce point et la force qui produit son mouvement.*

II. *On considère un plan incliné rugueux faisant, avec le plan horizontal, un angle donné* α. *Le coefficient de frottement est* f. *Un point matériel pesant de poids* P *est placé sur ce plan incliné. On lui applique une force égale à son poids et dirigée suivant l'horizontale du plan incliné qui passe par le point. On demande à quelle condition doit satisfaire* f, *l'angle* α *étant supposé donné pour que le point soit en équilibre.*

Épreuve pratique. — *On considère, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *la chaînette dont l'équation est*

$$y = \operatorname{ch} x \quad \text{ou} \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Soit M *un point quelconque de la chaînette,* P *sa projection sur* Ox, A *le sommet de la chaînette. Déterminer le point* M *par la condition que l'on ait*

$$\text{OA} + \text{PM} = \text{OP} + \text{arc AM}.$$

On calculera les coordonnées du point cherché M *à* $\frac{1}{1000}$ *près.* (Octobre 1911.)

Épreuve théorique. — Analyse. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 4y - 5\sin t.$$

Déterminer une solution de ce système par la condition que x *et* y *s'annulent pour* $t = 0$, *et calculer le premier terme non nul dans les développements en séries entières en* t *des fonctions* x *et* y *ainsi obtenues.*

II. *Une courbe plane* (C) *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la tangente en un point quelconque* M *de la courbe* (C) *rencontre au point* T *l'axe* Oy.

Déterminer la courbe C, *de manière que l'angle* $\widehat{\mathrm{MFT}}$ *soit droit*, F *étant un point fixe situé sur* Ox, *à la distance* a *du point* O. *Discuter la nature de la courbe* (C) *obtenue suivant la valeur donnée à la constante d'intégration.*

III. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on demande de calculer le volume du solide limité par le cylindre* $y = \operatorname{ch} x$, *par la surface* $\frac{2}{y} = \operatorname{th} x$, *et par les plans* $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$. *On rappelle les formules :*

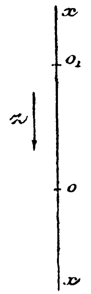
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Mécanique. — *Un point matériel pesant* M, *de masse* m, *se déplace dans un milieu qui lui oppose une résistance, dirigée en sens inverse de la vitesse de* M, *et d'intensité* $R = mg\frac{v^2}{K^2}$, *où* g *désigne l'accélération due à la pesanteur,* v *la valeur algébrique de la vitesse de* M *et* K, *un coefficient numérique. Soit* $x'Ox$ *un axe orienté, la direction positive* Ox *étant celle de la verticale descendante.*

1° *A l'instant initial* M *est lancé du point* O *avec une vitesse* $v_0 = -a$ $(a > 0)$ *dirigée suivant la verticale ascen-*

dante Ox'. *On demande l'abscisse* $x = -h\ (h > 0)$ *du point le plus haut* O_1 *atteint par* M, *ainsi que le temps* T *employé par* M *pour aller de* O *à* O_1.

2° *On prendra désormais* O, *comme nouvelle origine des abscisses* (*la direction positive des abscisses étant tou-*



jours celle de la verticale descendante), *et l'instant où* M *est en* O, *comme nouvelle origine des temps. Sous l'action de la pesanteur et de la résistance* R, *le point* M *va descendre suivant la verticale* O_1Ox. *Donner les expressions*

$$v = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad x = f(t)$$

de la vitesse et de l'abscisse de M *à un instant quelconque* t.

3° *On admet que* K *est très grand, de telle sorte qu'on puisse négliger dans les calculs les puissances de* $\frac{1}{K}$ *supérieures à* 2.

Montrer que l'approximation précédente permet d'écrire

$$\varphi(t) = gt - \frac{At^3}{K^2},$$

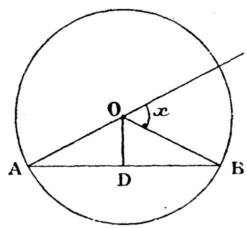
$$\psi(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{Bt^4}{K^2},$$

A *et* B *étant deux coefficients* (*ne dépendant que de* g) *que l'on calculera.*

Applications : $g = 980$; $K = 9,8 \times 10^5$; *calculer à l'instant* $t = 1$, $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *avec l'approximation permise au* 3°.

Épreuve pratique. — *Un récipient d'une contenance de* 10 *litres a la forme d'un cylindre de révolution limité par deux plans perpendiculaires à l'axe* (Δ) *du cylindre et situés à une distance de* 50^{cm} *l'un de l'autre. On verse* 2^{l} *de liquide à l'intérieur du récipient supposé placé de telle sorte que* (Δ) *soit horizontal.*

Soit (C) *la section du récipient par un plan* (P) *per-*



pendiculaire à (Δ), O *l'intersection de* (P) *avec* (Δ), AB *l'intersection de* (P) *avec la surface libre du liquide et* x *le supplément de l'angle* AOB.

1° *Former l'équation à laquelle satisfait* x.

2° *Résoudre cette équation avec la précision que comportent les Tables de logarithmes à cinq décimales.*

3° *Calculer en centimètres (avec la même précision) la distance* OD *de l'axe du récipient à la surface libre.*

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — Analyse. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \cos mx,$$

où m *désigne une constante donnée. Calculer l'intégrale qui, pour* $x = 0$, *s'annule, ainsi que sa dérivée première. Calculer, à l'origine des coordonnées, le rayon de courbure de la courbe qui représente la variation de cette intégrale.*

II. *Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *on considère dans ce plan un courbe* (C). *Soit* M *un point quelconque de cette courbe;*

soit I *le centre de courbure de la courbe en* M; *soit* P *la projection du point* I *sur la parallèle à* Ox *menée par* M; *soit* Q *la projection du point* P *sur la normale* MI.

Former et intégrer l'équation différentielle des courbes (C), *telles que la longueur* QI *soit égale à une longueur donnée a. Indiquer la forme des courbes* (C).

III. *Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x(x^2+y^2)=y^2.$$

Évaluer à $\frac{1}{1000}$ *près l'aire comprise entre cette courbe et la droite* $x=1$, *ainsi que l'abscisse du centre de gravité de cette aire.*

Mécanique. — *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *se meut un point matériel* M, *de masse égal à* 1, *de coordonnées* x *et* y. *Il est soumis à une force* F *dont les composantes, suivant les axes de coordonnées, sont* $X=-x$, $Y=-4y$.

1° *Chercher s'il existe une fonction de force* $U(x, y)$; *dans l'affirmative, déterminer* $U(x, y)$ *et construire les courbes de niveau* (S) *du champ* (H) *créé par la force* F.

2° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

3° M *étant abandonné sans vitesse initiale, à l'instant* $t=0$, *du point* A *de coordonnées* $x_0=1$, $y_0=1$, *donner les expressions*

$$x=f(t), \qquad y=g(t)$$

des coordonnées de M *à l'instant* t; *construire la trajectoire* (T) *correspondante et calculer la vitesse* v *à l'instant* t.

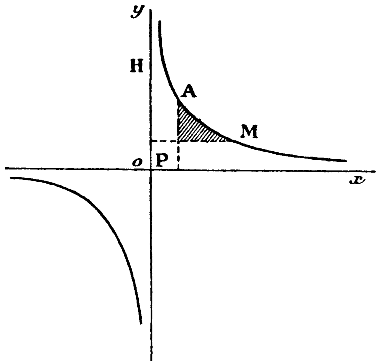
4° *Montrer qu'aux poins de* (T), *où la vitesse* v *est maximum ou minimum* (*sans être nulle*), *la trajectoire* (T) *est tangente à la courbe de niveau* (S) *passant par ces points.*

Épreuve pratique. — *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et l'hyperbole* (H) *d'équation*

$$xy=1.$$

Déterminer les coordonnées $x, y\,(x > 1, y < 1)$ *d'un point* M *de* (H) *satisfaisant à la condition suivante :*

Soit P *l'intersection de la parallèle à* Oy *menée par* M



avec la parallèle à Oy *menée par* A, A *étant le point de* (H) *d'abscisse* $x = 1$; *l'aire limitée par l'hyperbole* (H), *les droites* AP *et* PM, *doit être égale à* 1.

On calculera x *et* y *avec la précision que comportent les Tables de logarithmes à cinq décimales.*

N. B. — *On pourra d'abord calculer* y.

(Octobre 1912.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = 0$$

une équation différentielle linéaire à coefficients quelconques. Montrer comment, si l'on connaît une intégrale particulière, on peut ramener le calcul de l'intégrale générale à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre.

II. *On considère l'équation linéaire*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2y}{x^2} = \frac{2a}{x} \qquad (a > 0).$$

1° *Montrer qu'il existe une infinité de polynomes du second degré en x satisfaisant à cette équation.*

2° *Former l'intégrale générale de l'équation.*

3° *Construction des courbes intégrales et discussion suivant les valeurs des constantes d'intégration.*

4° *On considérera en particulier l'intégrale $Y_1(x)$ qui passe par les points $x=1$, $y=a$ et $x=-1$, $y=a$, et l'intégrale $Y_2(x)$ qui passe par l'origine et par le point $x=1$, $y=0$. L'aire comprise entre les deux courbes correspondantes dans l'angle des coordonnées positives a-t-elle une valeur finie? La différence entre les deux portions de cette aire situées de part et d'autre de la droite $x=\frac{1}{2}$ a-t-elle une valeur finie ?*

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Application des intégrales multiples à la détermination du centre de gravité d'un corps homogène.*

Exemples : 1° *Trouver les coordonnées du centre de gravité de la demi-sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$ située au-dessus du plan des xy.*

2° *Trouver, par la méthode des intégrales triples, les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets : l'origine des coordonnées O; le point A de l'axe des x qui a pour abscisse za; le point b de l'axe des y qui a pour ordonnée zb; le point C qui a pour coordonnées $x_0=a$, $y_0=b$, $z_0=c$ (on suppose a, b, c positifs).*

II. *Un fardeau, placé sur un plan rugueux incliné de 30° sur le plan horizontal, est soumis à une force F parallèle au plan incliné et dirigée vers le haut. On observe que le fardeau ne reste en équilibre que si F est compris entre certaines valeurs φ et Φ. Sachant que $\frac{\varphi}{\Phi}=0,2$, calculer le coefficient du frottement du fardeau sur le plan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système des équations* *différentielles*

$$\frac{dy}{dx} + 3y - 2z = e^x \sin x,$$

$$\frac{dz}{dx} - y + 4z = x.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Déterminer la valeur de la constante a de manière que l'équation*

$$(1) \qquad (y' - y^2)\sin^2 x + ay \sin x \cos x + 1 = 0$$

admette la solution

$$y = \cot x.$$

2° *a étant ainsi déterminée, montrer que la différence* $y - \cot x$ *satisfait à une équation de Bernoulli et déduire de là l'intégrale générale de l'équation* (1).

II. 1° *Théorie des enveloppes dans le plan.*

2° *Application.*

Déterminer l'enveloppe des ellipses dont les axes de symétrie sont deux droites rectangulaires données et dont la mesure de l'aire est un nombre donné A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une fonction égale à* 1 *dans l'intervalle* $\frac{\pi}{3}$ *à* $\frac{\pi}{2}$ *et égale à* $x^2 - x$ *dans l'intervalle* $\frac{\pi}{2}$ *à* $\frac{7\pi}{3}$. *On demande de développer la fonction en série trigonométrique dans l'intervalle où elle est définie*

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à deux variables indépendantes.*

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad py - qx = 0.$$

1° *Trouver la solution générale de cette équation.*

2° *Montrer qu'il existe une famille de solutions, ou sur* *faces intégrales, qui sont des cônes droits ayant pour base le cercle de rayon* 1 *du plan* xy *dont le centre est à l'origine.*

3° *Montrer qu'il existe, d'autre part, une famille de surfaces intégrales qui sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe des* z.

4° *Soient* (P) *celui de ces paraboloïdes qui a pour sommet l'origine et pour paramètre* 1 *et* (C) *l'un quelconque des cônes définis plus haut, ayant son sommet au-dessus du plan des* xy. *On évaluera le volume et la surface du solide fini délimité par les deux corps* (P) *et* (C) [*portion commune aux deux corps, entre le plan des* xy *et le sommet du cône*].

III. 1° *Déterminer l'enveloppe* E *des circonférences* S *dont l'équation en coordonnées rectangulaires est*

$$x^2 + y^2 + 2p\rho x - 2p\rho y = 0,$$

où p *est une constante et* ρ *un paramètre arbitraire.*

2° *Construire la courbe* E.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un enfant a fait tourner dans un plan vertical fixe une pierre de poids* P *attachée à l'extrémité* A *d'une ficelle de longueur* l *et de poids négligeable. Pour maintenir fixe l'autre extrémité* B, *sa main doit exercer une résistance* R. *On demande :*

1° *De montrer que le nombre* N *de tours de la pierre par unité de temps ne peut s'abaisser — sans que la ficelle cesse d'être tendue — au-dessous d'un certain minimum* n, *qu'on peut déterminer connaissant* l.

2° *De calculer la résistance* R *et d'étudier sa variation* (*en supposant* $N > n$) *quand la ficelle tourne.*

3° *De calculer le maximum* ε *de l'erreur relative* $\dfrac{R_0 - R}{R}$ *que l'on commettrait en prenant pour* R *la valeur* R_0 *de* R *quand la pierre passe au point le plus bas* (*en supposant toujours* $N > n$).

4° *De déterminer pour quelles valeurs de* $\dfrac{N}{n}$ *on aura* $\varepsilon < \frac{1}{10}$.

5° *De calculer* F_0 *en grammes-poids quand* $N = n$ *et* $l = 0^{m},50$.

(Juin 1913.)

Rennes.

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation de Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{-x^3}{k^2 y},$$

où k désigne une constante, et déterminer la solution particulière telle que, pour $x = a$, on a $y = 0$. Construire la courbe définie par l'équation

$$y^2 = \frac{x^2}{k^2}(a^2 - x^2),$$

où a et k sont des constantes, les axes étant supposés rectangulaires.

Calculer l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les droites $x = 0$, $x = a$.

Dans le cas particulier où $k = 2\sqrt{2}\,a$, calculer la longueur de l'arc s, comptée à partir de l'origine. [*On vérifiera que, si l'on pose*

$$x = a \sin t,$$

on trouve

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{2}}(2 + \cos 2t).]$$

Dans le même cas particulier, calculer le rayon de courbure en un point M *de la courbe, en fonction du paramètre t.*

Épreuve pratique. — *On considère la courbe définie en coordonnées par les formules :*

$$\begin{aligned} x &= t^2 f''(t) - 2t f'(t) = 2f(t), \\ y &= t\, f''(t) - f'(t), \\ z &= f'(t). \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de t, les cosinus directeurs de la tangente, la différentielle de l'arc, l'équation du plan osculateur et le rayon de courbure.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dans un plan vertical rapporté à deux axes rectangulaires,* Ox *(horizontal) et* Oy *(vertical dirigé vers le haut), on considère deux droites :*

$$(D) \qquad x = a,$$
$$(D') \qquad x = -a.$$

Un point M *de masse égale à l'unité, placé entre ces deux droites, est soumis à l'action de son poids* g *et attiré vers chacune des droites* (D), (D'), *perpendiculairement à ces droites, en raison inverse de la distance.*

L'intensité de chaque force d'attraction est représentée par $\frac{ag}{d}$, *d désignant la distance variable du point* M *à la droite considérée :*

1° *Trouver, en fonction de l'abscisse* x *du point* M, *la résultante* F *de ces trois forces.*

2° *Soit* α *l'angle que forme* F *avec* Ox; *calculer* $\tang \alpha$, *former l'équation du second degré correspondante en* $\tang \frac{\alpha}{2}$, *et montrer que l'une des racines de cette équation est égale à* $\frac{x-a}{x+a}$.

3° *Trouver les lignes de force du champ résultant. Calculer pour l'une quelconque d'entre elles, en fonction de l'abscisse, le rayon de courbure et la longueur d'arc, comptée à partir du point d'abscisse* x_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{[(R+a)t^2+(R-a)]\,dt}{[(R+a)^2t^2+(R-a)^2](1+t^2)}.$$

2° *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{(C)} \frac{(x-a)\,dy - y\,dx}{(x-a)^2+y^2}$$

prise le long d'un cercle (C) *ayant pour centre l'origine, et pour rayon* (R), *en supposant que* a *désigne une constante positive, et que les axes* Ox, Oy *sont rectangulaires.*

(*On devra distinguer deux cas :*

$$1^\circ\quad R > a, \qquad 2^\circ\quad R < a.)$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorème de Meusnier.*

II. *On considère une courbe* (C) *rapportée à des axes rectangulaires* Ox, Oy, *et pour laquelle l'abscisse* x *de chaque point* M *s'exprime en fonction de l'angle* α *que forme la tangente avec* Ox *par la relation*

$$(1)\qquad x = a(1 - \cos\alpha).$$

Démontrer que l'ordonnée y *vérifie l'équation différentielle*

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Déduire de l'équation (2) *l'expression explicite de* y *en fonction de* α *et déterminer la constante d'intégration de façon que* y *s'annule pour* $\alpha = 0$.

La courbe (C) *étant ainsi définie, on demande d'en étudier la forme, d'en construire l'asymptote, de calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure, et la longueur d'arc, comptée à partir de l'origine des coordonnées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + k^2 \operatorname{tang}^2\varphi},$$

k *désignant une constante positive.*

2° *Calculer l'intégrale*

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{[1 + x + k^2(1 - x)]} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne le système d'équations* *différentielles*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = \frac{\sin t}{\cos t}\frac{dx}{dt}, \\ &\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{x}{\sin^2 t} = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}. \end{aligned}\right.$$

1° *Former l'équation différentielle du premier ordre qui définit x en fonctions de t. Intégrer cette équation.*

2° *Vérifier que l'on a une solution du système donné* (1) *en prenant, pour les fonctions inconnues, x et y* :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t) + l\sin t, \\ y &= a(\sin t - t\cos t) - l\cos t, \end{aligned}\right.$$

l désignant une nouvelle constante.

Montrer que cette solution se déduit de la solution générale en y ajoutant la condition que, pour $t = \frac{\pi}{2}$, on doit avoir

$$x = \frac{a\pi}{2} + l \qquad \text{et} \qquad y = a.$$

3° *Les formules* (2) *où l'on regarde t comme un paramètre définissent une courbe* (C), *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Calculer pour un point variable* M *de la courbe* C :

L'arc s compté à partir du point $t = 0$;

L'angle de la tangente avec Ox;

Le rayon de courbure;

Les coordonnées du centre de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$\begin{aligned} x &= \sin^2 t - \cos^2 t, \\ y &= 2t - 2\sin t\cos t, \\ z &= 4\sin t. \end{aligned}$$

Calculer :

1° *Les cosinus directeurs de la tangente;*

2° *L'arc compté à partir du point $t = 0$;*

3° *Le rayon de courbure et les cosinus directeurs de la normale principale.*

(Juin 1913.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2203.

(1913, p. 48.)

Soient AB *un diamètre d'un cercle* O *et* M *un point de la circonférence. Il existe deux paraboles* P *et* Q *passant par* A *et* B *et tangentes en* M *au centre. Montrer que les axes de ces deux paraboles concourent au milieu* I *de* OM.

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

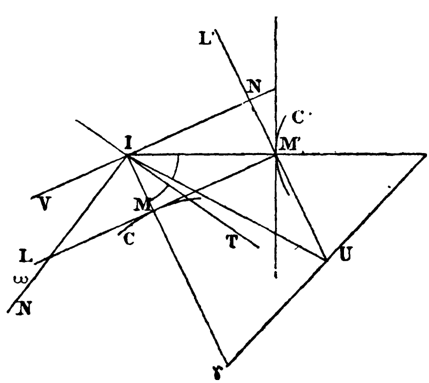
Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle-ci, bien connue d'ailleurs : « Le centre de gravité du quadrilatère ayant pour sommets les points d'intersection d'une parabole et d'un cercle est sur l'axe de la parabole. »

Autres solutions de MM. R. GOORMAGHTIGH, L. KLUG, T. ONO et PARROD.

2205.

(1913, p. 192.)

On donne, dans un même plan, deux courbes C *et* C'. *La*



tangente en un point M *de* C *rencontre* C' *au point* M' ; *les normales en* M *à* C *et en* M' *à* C' *se coupent au point* I.

Cela posé, construire la tangente et le centre de courbure en I *à la trajectoire de ce point.*

F. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par M. C. CLAPIER.

On peut envisager le point I comme le centre de rotation instantanée dans le mouvement d'un angle droit dont le sommet décrit la courbe C', tandis que l'un de ses côtés L glisse sur la courbe C.

Nous connaissons deux couples de profils conjugués : (C, $\overline{MM'}$), (C', point M'), et, pour construire la tangente IT commune aux deux roulettes, nous appliquerons le théorème d'Euler généralisé par Bobillier : Soient (γ, γ_1 à l'infini ; γ', γ'_1, au point M') les centres de courbure respectifs, les droites $\overline{\gamma\gamma'}$, $\overline{\gamma_1\gamma'_1}$ (qui n'est autre que le second côté de l'angle droit) vont se couper en un point u tel que l'angle $\widehat{\mathrm{TI}u}$ admet les mêmes bissectrices que $\widehat{\gamma\mathrm{I}\gamma'}$.

Pour obtenir le centre de courbure ω de la courbe lieu du point I, nous déterminerons le centre de courbure R de l'enveloppe du deuxième côté L' de l'angle droit mobile ; le point de contact N s'obtient en menant du centre I une normale à ce côté et la détermination de R résulte de l'application du théorème précédent qui nous a donné la tangente IT.

Cela posé, nous envisagerons le point I, non plus comme centre instantané de rotation, mais comme le sommet d'un angle droit MIN dont les côtés enveloppent les deux courbes développées P et Δ ; relativement à ce nouveau mouvement, nous connaissons deux couples de profils conjugués et nous pourrons construire le point K' qui permet de trouver tous les éléments des courbures (*cf.* KŒNIGS, *Cours de Cinématique*). Nous en déduirons le centre de courbure de la trajectoire du point I.

2207.

(1913, p. 288.)

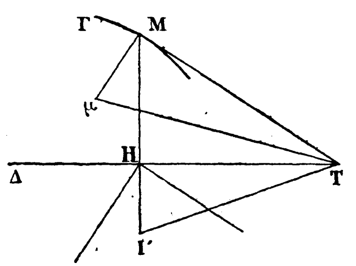
On considère l'angle droit mobile $\widehat{\mathrm{H}}$ *formé par les parallèles à la tangente et à la normale en* M *à la courbe* Γ, *menées par le pied* H *de la perpendiculaire abaissée de* M *sur une droite fixe* Δ. *Si* T *est le point où la tangente en* M *à la courbe* Γ *coupe la droite* Δ, μ *le centre de courbure de* Γ *répondant au point* M, *démontrer que le centre instantané* I *de l'angle droit* $\widehat{\mathrm{H}}$ *est à la rencontre de* MH *et du cercle circonscrit au triangle* MμT.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Plus généralement, soit F une figure mobile de grandeur invariable dont un point M a pour trajectoire une courbe Γ. Soit F' une seconde figure dont la position se déduit à chaque instant de celle de F, au moyen d'une translation de direction constante, telle que le point M' correspondant à M décrive une courbe Γ'. Soit I le centre instantané de rotation de la figure F.



Le point I appartient à la normale à C en M. Proposons-nous de trouver le centre instantané de rotation I' de la figure F'.

Ce point I' appartient à la normale à C' en M'. Soit T le point d'intersection des tangentes en M et en M' aux deux courbes C et C'.

Les déplacements infiniment petits simultanés des figures F et F' se réduisent à deux rotations, d'un même angle $d\varphi$, effectués respectivement autour des points I et I'. On a

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{IM}\, d\varphi,$$
$$d(\mathrm{M'}) = \mathrm{IM'}\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IM'}} = \frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{M'})} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{M'I}}.$$

On en conclut que les deux triangles rectangles MTI, M'TI' sont semblables (on peut ajouter, *directement* semblables, comme on le reconnaît par un examen plus approfondi que nous omettons pour abréger). Les angles $\widehat{\mathrm{MTI}}$, $\widehat{\mathrm{M'TI'}}$ sont donc égaux et de même signe, ce qui fournit une construction simple du point I'.

Dans le cas visé par l'énoncé, le point I se confond, comme l'on sait, avec le centre de courbure μ en M à la courbe Γ. On a, d'après ce qui précède,

$$\widehat{\mathrm{MT}\mu} = \widehat{\mathrm{HTI'}}, \qquad \text{d'où} \qquad \widehat{\mathrm{I'M}\mu} = \widehat{\mathrm{HTM}} = \widehat{\mathrm{I'T}\mu},$$

ce qui établit la proposition.

Autres solutions par MM. Balitrand, Bouvaist, Clapier, Guttenberg, Lemaire, Ono, Parrod, Sicard.

2208.

(1913, p. 288.)

Si M *est un point quelconque d'une conique dont* A *est un sommet,* α *étant le centre de courbure répondant à ce sommet, la tangente en* M *à la conique coupe la tangente en* A *sur la perpendiculaire menée de* α *à la corde* AM.

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. G. F.

L'hyperbole d'Apollonius relative au point α se compose de l'axe AA' et de la tangente en A. Si d'un point de cette tangente, on mène la perpendiculaire à la polaire AM de ce point, cette perpendiculaire passe en α, d'après le théorème bien connu qui fait de l'hyperbole d'Apollonius un lieu géométrique.

Autres solutions de MM. Bouvaist, Goormaghtigh, Guttenberg, Lemaire, Ono et Parrod.

2209.

(1913, p. 336.)

Démontrer géométriquement que :

1° *Si sur la tangente en* M *à un cercle passant par* O, *on considère le segment* MP, *qui est vu de* O *sous un angle droit, le lieu de* P, *lorsque* M *décrit le cercle, est une cissoïde de Diocles;*

2° *La normale en* P *à la cissoïde coupe la normale en* M *au cercle sur la perpendiculaire élevée à* OP *en son milieu.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient ω le centre du cercle considéré, O′ le point de ce cercle diamétralement opposé au point O, la droite O′M rencontre la tangente en O en P′, le quadrilatère OMPP′ est un rectangle; la droite PP′ enveloppe donc une parabole π, ayant pour foyer le point O′ et OP′ pour tangente au sommet; le lieu de P est donc la cissoïde droite, podaire de la parabole π par rapport à son sommet.

Les droites O′O, ωM étant également inclinées sur PP′, le point de contact de cette droite avec son enveloppe sera le point T, intersection de cette droite avec la parallèle à ωM, menée par O′; la droite ωM, et la perpendiculaire au milieu de OP se couperont au milieu μ de OT, et l'on sait par la construction classique de la tangente à une podaire que Pμ est la normale à la cissoïde en P.

Remarque. — La proposition précédente est un cas particulier de la suivante :

Si un triangle OMP *se déplace de telle sorte que le sommet* O *reste fixe, que le point* M *décrive un cercle passant par* O, *que le côté* MP *soit tangent à ce cercle en* M, *et que l'angle* $\widehat{MOP}$ *reste constant, le sommet* P *décrit une cissoïde de Diocles, et la normale en* P *à cette courbe passe par le point d'intersection de la normale en* M *au cercle donné et de la perpendiculaire élevée au milieu de* OP.

On démontre immédiatement cette proposition en remarquant que la perpendiculaire en P à la droite OP enveloppe une parabole ayant pour foyer le point D′ diamétralement opposé au point O sur le cercle donné.

Autres solutions de MM. BALITRAND, CLAPIER, FOURAGGÉ, GOORMAGHTIGH, GUTTENBERG, LEMAIRE, ONO, PARROD et SICARD.

2211.

(1913, p. 480.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux demi-diamètres conjugués,* F *et* F′ *les foyers d'une ellipse* E. *Les droites* M′F′, MF *se coupent en* P, *et les deux droites* M′F, MF′ *se rencontrent en* Q. *Montrer que, quels que soient les demi-diamètres* OM *et* OM′, *le quadrilatère* PMQM′ *est circonscriptible à un cercle de rayon constant (égal au demi petit axe).*

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Soient $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ les coordonnées de M; $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ sont celles de M′ et le sommet N du parallélogramme MOM′N a pour coordonnées $[a(\cos\theta - \sin\theta),\ b(\cos\theta + \sin\theta)]$, l'équation de MF est alors

$$bx\sin\theta - y(a\cos\theta - c) - bc\sin\theta = 0.$$

On voit que la distance de N à MF est égale à b. Il en est de même pour MF′, M′F, M′F′; donc, etc.

Autre solution de M. BOUVAIST.

2212.

(1913, p. 575.)

Si un rayon mobile OP *d'un cercle de centre* O *coupe ce cercle en* P *et la tangente en un point fixe* A *du cercle en* N, *le point de rencontre* M *des parallèles à* OA *et* AN *menées respectivement par* N *et* P *décrit une conchoïde de Külp* (*N. A.*, 1913, p. 193). *Le point* T *où la tangente en* M *à la conchoïde coupe la tangente fixe* AN *au cercle peut être obtenu comme suit :* U *étant le point où cette tangente fixe est rencontrée par la tangente en* P *au cercle, si l'on porte sur le rayon* OP *le vecteur* OV = PN, *la droite* OT *est parallèle à* UV.

M. D'OCAGNE.

Solution

Par M. T. Ono.

Prenons comme axe des x le rayon OA, comme axe des y le diamètre perpendiculaire. Si l'on désigne par φ l'angle AOP et par a le rayon OA, on a successivement les coordonnées des points ci-après :

$$(\mathrm{M}) \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\varphi; \end{cases}$$

$$(\mathrm{U}) \qquad \begin{cases} x = a, \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \dfrac{a(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases} x = a(1-\cos\varphi), \\ y = a(1-\cos\varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi; \end{cases}$$

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} x = a, \\ y = a\,\mathrm{tang}\,\varphi - \dfrac{a(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi\cos^2\varphi}; \end{cases}$$

et l'on voit facilement que la droite UV est parallèle à OT.

Autres solutions de MM. Barisien et Bouvaist.

2213.

(1913, p. 576.)

Soient c *et* C *une section droite et une section oblique d'un cylindre de révolution, tangentes entre elles en un point par lequel passe la génératrice* G *du cylindre. On sait que les droites rencontrant* G *à un angle droit, qui s'appuient d'autre part sur la conique* C, *engendrent un cylindroïde (ou conoïde de Plucker). Démontrer que le volume du tronc de cylindre limité aux plans des sections* c *et* C *est double du volume du tronc de cylindroïde limité à sa directrice* G *et au plan de la section* C.

M. d'Ocagne.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Prenons comme plan XOY la section C et soit $y^2 = ax - x^2$ l'équation du cercle c. Soit $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ l'équation du plan C, On obtient les résultats suivants :

Volume du tronc de cylindre :

$$\int_0^b dz \int_0^{a\left(1-\frac{z}{b}\right)} 2\sqrt{ax - x^2}\, dx = \frac{a^2 b \pi}{8};$$

Volume du tronc de cylindroïde :

$$\int_0^b \sqrt{a\left(1 - \frac{z}{b}\right)\frac{az}{b}} \cdot \frac{az}{b}\, dz = \frac{a^2 b \pi}{16}.$$

Donc, etc.

Autre solution de M. BOUVAIST.

QUESTIONS.

2229. Soit MNP le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse (E), issues d'un point A de cette ellipse. Démontrer que les six centres de courbure des coniques homofocales à (E), qui se croisent deux à deux en MNP, relatifs à ces points, sont sur la tangente en A à l'ellipse (E). F. BALITRAND.

2230. Déterminer les courbes planes (M), telles que les droites joignant les différents points de (M) aux centres de courbure correspondants de la développée, soient parallèles entre elles. F. BALITRAND.

[K9a]

SUR LES POLYGONES PODAIRES D'UN POLYGONE DONNÉ;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

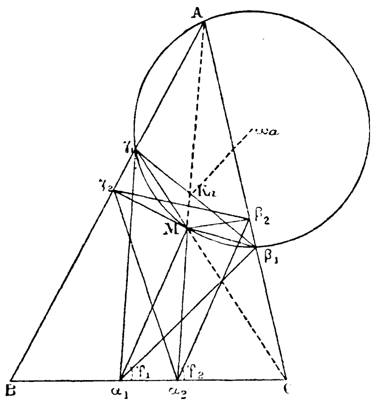
1. Considérons un polygone plan quelconque P de n côtés, un point M de son plan, et construisons de ce point les droites faisant avec les côtés du polygone, *dans le même sens de rotation*, un même angle aigu φ. Nous appellerons *polygone isopodaire de* M celui qui est obtenu en joignant les points où les précédentes droites rencontrent respectivement les côtés du polygone P. Dans le cas où $\varphi = 90^\circ$, le polygone ainsi obtenu est dit *orthopodaire* ou *podaire de* M.

LEMME. — *On considère un polygone quelconque* P *et un point* M *de son plan. On peut construire une infinité de polygones isopodaires de* M *par rapport à* P, *l'angle* φ *étant variable. Tous ces polygones isopodaires sont semblables entre eux.*

Nous démontrerons le cas où le polygone P est un triangle, les polygones isopodaires d'un point M, par rapport à un polygone quelconque, pouvant toujours être décomposés en un même nombre de triangles semblables, isopodaires de M par rapport aux triangles formés par les trois côtés correspondants de P.

Soient $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ les triangles isopodaires d'un point M du plan d'un triangle ABC, les angles de rotation étant respectivement φ_1 et φ_2 (*fig.* 1).

Les quadrilatères $C\alpha_1 M \beta_1$ et $C\alpha_2 M\beta_2$, par exemple, étant inscriptibles, les triangles $\alpha_1 M\beta_1$ et $\alpha_2 M\beta_2$ ont leurs angles égaux et sont semblables. Il en est de



même des triangles $\alpha_1 M\gamma_1$ et $\alpha_2 M\gamma_2$, $\gamma_1 M\beta_1$ et $\gamma_2 M\beta_2$ et par conséquent les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sont semblables quels que soient d'ailleurs les angles φ_1 et φ_2.

Leur rapport de similitude est tel que

$$\frac{\text{aire}\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\text{aire}\,\alpha_2\beta_2\gamma_2} = \left(\frac{M\alpha_1}{M\alpha_2}\right)^2 = \frac{\sin^2\varphi_2}{\sin^2\varphi_1}.$$

Si $\alpha\beta\gamma$ est le triangle orthopodaire de M, ce rapport devient

$$\frac{\text{aire}\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\text{aire}\,\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sin^2\varphi_1}.$$

Nous nous proposons d'utiliser ce lemme pour étendre au cas général, où l'angle φ est quelconque, des résultats connus. Nous nous étendrons particulièrement sur le cas $n = 4$ en donnant quelques résultats moins répandus.

2. *Le lieu géométrique des points* M *du plan d'un triangle* ABC *tels que leur triangle isopodaire* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *par rapport à ce triangle* (l'angle étant φ_1), *soit d'aire constante, est une circonférence* O *concentrique au cercle circonscrit au triangle* ABC.

Il importe tout d'abord, ici et pour ce qui va suivre, de considérer le cas où M est intérieur au cercle circonscrit à ABC ($\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *est de même sens que* ABC), et celui où M est extérieur à ce cercle ($\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *est de sens contraire à* ABC).

Posons

$$\text{const.} = \text{aire}\ \alpha_1\beta_1\gamma_1 = \text{aire}\ \text{ABC}\frac{k}{2\sin^2\varphi_1},$$

k étant une constante qui peut être positive ou négative suivant que $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est de même sens ou de sens contraire à ABC.

Le lieu de M, d'après ce qui précède, est celui des points du plan tels que leur *triangle podaire* par rapport à ABC soit d'aire constante :

$$\text{aire}\ \alpha_1\beta_1\gamma_1\sin^2\varphi_1 = \text{aire}\ \text{ABC}\frac{k}{2}.$$

Ce lieu, tel que

$$(1)\qquad \overline{\text{AM}}^2\sin 2\text{A} + \overline{\text{BM}}^2\sin 2\text{B} + \overline{\text{CM}}^2\sin 2\text{C} = 4\text{S}(1-k)$$

(S étant l'aire ABC), se compose comme l'on sait de deux circonférences concentriques au cercle circonscrit O à ABC. Les rayons de ces cercles sont donnés par la formule

$$(2)\qquad \left.\begin{matrix}\rho_1^2\\ \rho_2^2\end{matrix}\right\} = \text{R}^2(1 \pm 2k),$$

R étant le rayon du cercle O.

Cette relation montre que pour une valeur donnée de ρ_1, par exemple,

$$\text{const.} = R^2 - \rho_1^2 = 2kR^2,$$

et *pour un angle* φ_1 *donné, les triangles isopodaires de chacun des points d'une circonférence de rayon donné* ρ_1 *concentrique au cercle circonscrit à un triangle* ABC, *par rapport à ce triangle, ont une aire constante;* ou encore *si* α_1, β_1, γ_1 *sont les projections isogonales, dans un même sens de rotation, l'angle étant* φ_1, *d'un point* M *du plan d'un triangle* ABC *sur les côtés de ce triangle, on a*

$$\frac{\text{aire}\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\text{aire ABC}} = \frac{\mu}{4R^2\sin^2\varphi_1}, \tag{3}$$

μ *étant la valeur algébrique de la puissance de* M *par rapport au cercle circonscrit à* ABC.

La relation (2) a été établie directement, notamment pour $\varphi_1 = 90°$, donnant lieu à une suite de démonstrations élémentaires intéressantes ([1]).

La formule (1) donne

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 2R^2,$$

quel que soit k, et *la somme des carrés des rayons des circonférences lieux des points* M, *du plan d'un triangle, tels que leurs triangles isopodaires soient d'aire constante, égale le carré du rayon du cercle orthoptique relatif au cercle circonscrit au triangle.*

Si $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = R\sqrt{2}$ et $\dfrac{k}{2\sin^2\varphi_1}$ est maximum; ce rapport égale $\frac{1}{4}$ pour $\varphi_1 = 90°$.

([1]) *Proceedings of the Edinburg mathematical Society*. 1893-1894, p. 85; *Journal de Vuibert*, 1913-1914, p. 23, 61, 77.

Si $k = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = R$ et ce cas donne la propriété classique de la droite de Simson, ainsi que sa généralisation pour un angle φ_1 quelconque. Nous nous sommes servi de cette généralisation pour en obtenir d'autres relatives aux propriétés de la droite de Simson, notamment une généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne sur l'orthopôle (*Nouvelles Annales*, 1914 : *Généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne*).

3. *Le lieu géométrique des points* M *du plan d'un quadrilatère* ABCD *tels que leur quadrilatère isopodaire* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, *par rapport à ce quadrilatère* (l'angle étant φ_1), *soit d'aire constante, est en général une circonférence. Il peut être une droite parallèle à une direction fixe lorsque l'aire* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ *varie.*

Remarquons ici que l'expression algébrique de l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ peut être nulle sans que les points α_1, β_1, γ_1, δ_1 soient en ligne droite. Le quadrilatère $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ est alors *croisé* et ses deux parties, qui sont de sens inverse, ont des aires équivalentes en valeur absolue.

Comme précédemment, la question se ramène à trouver le lieu des points M du plan de ABCD tels que leur quadrilatère *orthopodaire* $\alpha\beta\gamma\delta$ soit d'aire constante, aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \times \sin^2\varphi_1$.

La relation (1) devient

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\overline{AM}^2 \sin 2A + \overline{BM}^2 \sin 2B \\ &\quad + \overline{CM}^2 \sin 2C + \overline{DM}^2 \sin 2D = \text{const.} \end{aligned}$$

et le lieu de M est un cercle en général; une droite lorsque

$$(5) \qquad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 2D = 0,$$

A, B, C, D étant les angles que font les droites DA, AB, BC, CD, deux à deux, ces droites étant prises dans le même ordre que les sommets des quadrilatères $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ et les angles étant comptés dans le même sens.

La condition (5) est réalisée lorsque le quadrilatère ABCD est un *trapèze* ou un *quadrilatère inscriptible*.

Remarquons en effet que

$$D = 2k\pi - (A + B + C),$$

d'où

$$\sin 2D = -\sin 2(A + B + C)$$

et

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 2D \\
&= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A + B + C) \\
&= 4\sin(A + B)\sin(B + C)\sin(A + C);
\end{aligned}$$

or ce produit est nul si deux angles soit adjacents, soit opposés du quadrilatère sont égaux.

Les centres et rayons du lieu, dans le cas général, s'obtiennent en envisageant la question comme il suit.

Quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, situées dans un même plan, se coupent deux à deux, Δ_1 et Δ_4 en A, Δ_1 et Δ_2 en B, Δ_2 et Δ_3 en C, Δ_3 et Δ_4 en D, Δ_1 et Δ_3 en E, Δ_2 et Δ_4 en F.

Ces droites déterminent ainsi un *quadrilatère convexe* ABCD, un *quadrilatère concave* AECF et un *quadrilatère croisé* BEDF. Soient O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par $\Delta_1\Delta_2\Delta_4$, $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, $\Delta_1\Delta_3\Delta_4$, $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, et R_1, R_2, R_3, R_4, S_1, S_2, S_3, S_4 les rayons respectifs de ces cercles et les surfaces de ces triangles.

Considérons d'abord le quadrilatère convexe ABCD, un point M de son plan et soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère orthopodaire de ce point par rapport au quadrilatère, α, β, γ, δ étant d'ailleurs dans l'ordre des côtés. On a

$$\begin{aligned}&\text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma\delta\\ &\quad = \text{valeur algébrique } \alpha\beta\delta + \text{valeur algébrique } \beta\gamma\delta.\end{aligned}$$

En appliquant la relation (3) (au cas où $\varphi_1 = 90^\circ$), aux triangles $\alpha\beta\delta$ et $\beta\gamma\delta$, on obtient pour équation du lieu

$$\begin{aligned}(6)\qquad S_1 R_4^2 \times \overline{MO}_1^2 - S_4 R_1^2 \times \overline{MO}_4^2 &= R_1^2 R_4^2 (\text{surf. ABCD} - 4 \text{ surf. } \alpha\beta\gamma\delta)\\ &= R_1^2 R_4^2 \times S(1-k),\end{aligned}$$

en posant

$$\text{surf. ABCD} = S, \qquad \text{et} \qquad \text{surf. } \alpha\beta\gamma\delta = \text{surf. ABCD}\,\frac{k}{4},$$

k désignant une constante positive ou négative, suivant que $\alpha\beta\gamma\delta$ et ABCD ont même sens de rotation ou des sens opposés.

On a de même, en remarquant que

$$\begin{aligned}&\text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma\delta\\ &\quad = \text{valeur algébrique } \alpha\beta\gamma + \text{valeur algébrique } \gamma\delta\alpha,\end{aligned}$$

$$S_3 R_2^2 \times \overline{MO}_3^2 - S_2 R_3^2 \times \overline{MO}_2^2 = R_2^2 R_3^2 \times S(1-k).$$

Le lieu de M est visiblement une circonférence dont le centre, situé à la fois sur O_1O_4 et O_2O_3, est à leur intersection Ω_1. Son rayon est, par exemple,

$$\rho_1^2 = \frac{R_1^2 R_4^2 \left[(S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2)\, S(1-k) + S_1 S_4 \overline{O_1 O_4}^2\right]}{(S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2)^2}.$$

Le lieu complet se compose évidemment de deux circonférences concentriques suivant que k est positif ou négatif.

On obtient des résultats analogues en remplaçant le quadrilatère convexe par les quadrilatères concave et croisé AECF et BEDF.

Dans le premier cas le lieu comprend deux circonférences concentriques de centre Ω_2, intersection de O_1O_2 et O_3O_4.

Dans le second cas le lieu est formé de deux circonférences concentriques de centre Ω_3, point commun à O_1O_3 et O_2O_4.

Ainsi le quadrilatère convexe $O_1O_2O_3O_4$ nous paraît remarquable :

Les points de rencontre de ses côtés opposés et de ses diagonales O_1O_2 *et* O_3O_4 *sont les centres des circonférences lieux des points* M, *du plan des trois quadrilatères formés par* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, *tels que leurs quadrilatères isopodaires par rapport à ces trois quadrilatères, soient d'aire constante.*

Ou bien encore :

Ces trois points Ω_1, Ω_2, Ω_3 *sont les centres des distances proportionnelles des sommets des quadrilatères correspondants affectés chacun des coefficients* $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$, $\sin 2D$, $\sin 2E$, $\sin 2F$, A, B, C, D, E, F *étant les angles, comptés dans le même sens et formés par les droites* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *deux à deux.*

Reprenons le quadrilatère convexe ABCD. Nous avons observé au début que l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, et par suite l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$, pouvait être nulle, bien que α_1, β_1, γ_1, δ_1 ne soient pas en ligne droite.

La relation (6) devient ici

$$S_1 R_4^2 \times \overline{MO}_1^2 - S_4 R_1^2 \times \overline{MO}_4^2 = R_1^2 R_4^2 \times S.$$

D'ailleurs trois points de ce cercle apparaissent immédiatement : K commun aux cercles O_1, O_2, O_3, O_4, foyer de la parabole tangente à Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, et les sommets E, F pour qui les triangles isopodaires $\alpha_1\beta_1\delta_1$ et $\beta_1\gamma_1\delta_1$ sont équivalents en valeur absolue, mais ont des sens de rotation différents.

Les points Ω_1, Ω_2, Ω_3 donnent évidemment la valeur maximum de l'aire du quadrilatère isopodaire, le sens de rotation étant d'ailleurs le même que celui du quadrilatère.

Remarque. — Le diamètre EO_3 du cercle AED, coupe AD en ε_3, et

$$\widehat{EO_3A} = 2\widehat{CDA}; \qquad \widehat{EO_3D} = 2\widehat{BAD};$$

d'où

$$\frac{\varepsilon_3 D}{\varepsilon_3 A} = -\frac{\sin 2D}{\sin 2A}.$$

La résultante des vecteurs parallèles appliqués en A et D et proportionnels à $\sin 2A$ et $\sin 2D$, est appliquée en ε_3. De même celle des vecteurs $\sin 2C$ et $\sin 2B$ est appliquée au point de rencontre ε_2 de EO_2 avec BC. Donc la droite $\varepsilon_3\varepsilon_2$ passe en Ω_1. Les cercles FBA et FCD donnent aussi leurs points ε_1 et ε_4 tels que $\varepsilon_1\varepsilon_4$ passe encore en Ω_1.

Cette détermination de Ω_1, qui est une conséquence du raisonnement trigonométrique du début de ce paragraphe, donne, avec les résultats obtenus ensuite géométriquement, cette propriété :

Dans un quadrilatère quelconque les droites précédentes $\varepsilon_1\varepsilon_4$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, O_1O_4 *et* O_2O_3, *sont concourantes.*

La relation (6) nous montre aussi que le lieu de M est une droite lorsque

$$S_1 R_4^2 - S_4 R_1^2 = 0,$$

condition remplie quand les triangles CDF et AFB sont semblables, c'est-à-dire lorsque le quadrilatère est un *trapèze* ou est *inscriptible*.

L'équation du lieu est alors

$$(7) \qquad \overline{MO}_1^2 - \overline{MO}_4^2 = \frac{R_1^2 \times S(1-k)}{S_1}.$$

Ce lieu se compose de deux droites perpendiculaires à $O_1 O_4$; ces droites sont confondues lorsque $k = 0$, c'est-à-dire quand l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$ est nulle.

Cas du trapèze. — AB et CD sont parallèles. Lorsque $k = 0$, F est un point du lieu qui est la perpendiculaire T à $O_1 O_4$ en F, c'est-à-dire la *tangente commune aux cercles* O_1 *et* O_4, qui se touchent en F.

Cas du quadrilatère inscriptible. — Dans ce cas $O_1 O_4$ et $O_2 O_3$ sont parallèles; Ω_1 est à l'infini, mais Ω_2 et Ω_3 restent réels.

Les cercles Ω_1 deviennent, pour $k \neq 0$, deux droites parfaitement déterminées en direction et position par l'équation (7). Quand $k = 0$, les points E et F appartiennent au lieu qui est la droite EF de concours des côtés opposés. Nous répondons ainsi à la question 4154 posée par M. E.-N. Barisien dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, janvier 1913, p. 2 :

On sait que le lieu des points pour lesquels l'aire du polygone podaire d'un autre polygone donné a une grandeur donnée, est un cercle dont le centre est fixe, quelle que soit la grandeur donnée. Dans *le cas d'un triangle, le centre fixe est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Quel est ce point fixe, lorsque le polygone est un quadrilatère inscriplible dans un cercle?

Nous déduisons de plus de ces résultats quelques propriétés relatives au quadrilatère inscriptible :

1° *Les lignes des centres des cercles circonscrits* O_1, O_2, O_3, O_4 *aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère inscrit pris trois à trois, forment un trapèze* $O_1O_2O_3O_4$, *dont les côtés* O_1O_4 *et* O_2O_3 *sout perpendiculaires à la diagonale* EF. *Les droites* O_1O_4 *et* O_2O_3 *sont parallèles à la droite* OP, *qui joint le centre du cercle circonscrit* O *au point de concours* P *des diagonales* AC *et* BD.

Le triangle EPF est, en effet, conjugué par rapport au cercle O; O est par suite orthocentre de ce triangle dans lequel OP est une hauteur.

2° *Le foyer* φ *de la parabole inscrite à un quadrilatère inscrit est situé sur la diagonale* EF; *c'est le point où* OP *rencontre cette diagonale.*

3° *On donne un cercle* O *et un point* P *intérieur à ce cercle. Il existe une infinité de quadrilatères* ABCD *inscrits à* O *et ayant* P *pour point de concours des diagonales. Les paraboles inscrites à ces quadrilatères ont pour foyer un point fixe* φ *tel que* $O\varphi = \frac{R^2}{OP}$, R *étant le rayon du cercle. De plus, les points* E *et* F *de ces quadrilatères décrivent une droite fixe* Δ *perpendiculaire à* OP *en* φ.

Enfin si, par deux points E, F en ligne droite avec le foyer φ d'une parabole, on mène les quatre tangentes à la courbe, *le quadrilatère formé par ces tangentes est inscriptible.*

4. L'expression (5) et notre raisonnement géométrique du précédent paragraphe peuvent être étendus de proche en proche à un polygone plan quelconque de n côtés.

On a par exemple

$$\Sigma\, \overline{AM}^2 \sin 2A = \text{const.} \tag{8}$$

En particulier, si le polygone est régulier, les coefficients dans les expressions (4) et (6) sont égaux et le centre du cercle lieu de M est celui des distances proportionnelles des sommets affectés du coefficient $\sin 2A$; c'est le centre du polygone donné.

Steiner a donné ces résultats dans leur forme générale (*Œuvres*, t. I, p. 159; *Crelle*, t. I, p. 38-52).

5. Les expressions (1), (4) et (8) nous donnent encore quelques formules intéressantes. Prenons-les dans le cas général envisagé, l'angle φ_1 étant quelconque.

Dans le triangle $M\beta_1\gamma_1$ considéré au lemme donné au début de cette Note, on obtient (*voir* la figure)

$$\beta_1\gamma_1 = \frac{AM \sin A}{\sin \varphi_1};$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\overline{\beta_1\gamma_1}^2 \cot A = \frac{\overline{AM}^2 \sin 2A}{\sin^2 \varphi_1};$$

c'est-à-dire, φ_1 étant donné,

$$\overline{\alpha_1\beta_1}^2 \cot C + \overline{\beta_1\gamma_1}^2 \cot A + \overline{\gamma_1\alpha_1}^2 \cot B = \text{const.},$$

et dans le cas général d'un polygone quelconque,

$$\Sigma\, \overline{\alpha_1\beta_1}^2 \cot C = \text{const.}$$

Soient ω_a le centre du cercle circonscrit au triangle $A\gamma_1\beta_1$ et K_a le milieu de $\gamma_1\beta_1$. Un calcul tout analogue au précédent donne

$$2\,\overline{\omega_a K_a}^2 \operatorname{tang} A = \overline{\beta_1\gamma_1}^2 \cot A\,;$$

d'où l'on déduit, dans le triangle,

$$\overline{\omega_a K_a}^2 \operatorname{tang} A + \overline{\omega_b K_b}^2 \operatorname{tang} B + \overline{\omega_c K_c}^2 \operatorname{tang} C = \text{const.}$$

et

$$\Sigma\, \overline{\omega_a K_a}^2 \operatorname{tang} A = \text{const},$$

dans le cas d'un polygone quelconque.

En particulier, dans un polygone régulier :

La somme des carrés des côtés du polygone isopodaire d'un point M *par rapport à un polygone donné* P, *est constante quand* M *décrit une circonférence donnée concentrique au polygone* P, *l'angle* φ_1 *étant donné.*

La somme des carrés des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés du polygone isopodaire respectivement avec les deux côtés correspondants du polygone P, *est constante*, M *décrivant une circonférence concentrique à* P, *l'angle* φ_1 *étant donné.*

Enfin, appelant ρ_a le rayon du cercle $A\gamma_1\beta_1$, les relations (1) et (4) peuvent être mises sous la forme

$$\rho_a^2 \sin 2A + \rho_b^2 \sin 2B - \rho_c^2 \sin 2C = \text{const.}$$

et

$$\Sigma\, \rho_a^2 \sin 2A = \text{coust.}\,;$$

et dans un polygone régulier donné P :

La somme des carrés des rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés du polygone isopodaire respectivement avec les deux côtés correspondants de P *est constante, lorsque* M *décrit une circonférence concentrique à* P, *l'angle* φ_1 *étant donné.*

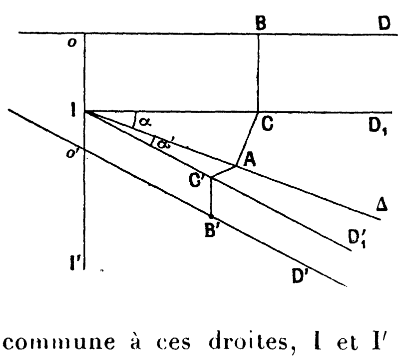
[K13a]

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

Par M. J. Lemaire,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Proposons-nous d'étudier le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites D et D', non en même plan, a une valeur donnée k, que nous pouvons supposer plus grande que l'unité : soient OO' la perpen-

Fig. 1.



diculaire commune à ces droites, I et I' les points de OO' tels que

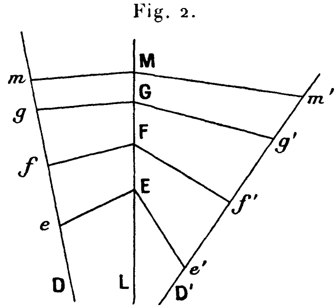
$$\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO'}} = \frac{\mathrm{I'O}}{\mathrm{I'O'}} = k \quad (\mathit{fig.}\ 1),$$

P et P′ les plans parallèles aux droites données et passant en I et I′, A un point de P tel que $\frac{AB}{AB'} = k$, AB et AB′ étant perpendiculaires à D et à D′. Menant AC et AC′ perpendiculaires aux parallèles ID_1 et ID'_1 à D et D′, et remarquant que CB et C′B′ sont perpendiculaires à D et D′, nous voyons que $\frac{CB}{C'B'} = k$, de sorte que les triangles rectangles ABC et AB′C′ sont semblables et donnent $\frac{AC}{AC'} = k$. Inversement, si pour un point A du plan P cette dernière relation est vérifiée, ce point fait partie du lieu.

Le lieu cherché, que nous appellerons la surface (S), est donc coupé par le plan P suivant deux droites $I\Delta$ et $I\Delta_1$ conjuguées harmoniques par rapport à D_1 et D'_1, l'une d'elles Δ faisant avec D_1 et D'_1 des angles α et α' liés par la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k$. Le plan P′ le coupe suivant les parallèles $I'\Delta'$ et $I'\Delta'_1$ aux droites précédentes.

Ceci posé, montrons que *si trois points du lieu* E, F, G, *appartiennent à une droite* L, *celle-ci fait*

Fig. 2.



partie du lieu : soient Ee, Ff, Gg et Ee', Ff', Gg' les distances de ces points à D et D′, de sorte que

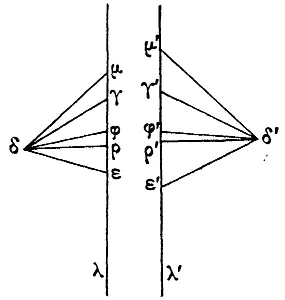
$$\frac{Ee}{Ee'} = \frac{Ff}{Ff'} = \frac{Gg}{Gg'} = k$$

avec

$$\frac{ef}{eg} = \frac{e'f'}{e'g'} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EG}} \quad (\textit{fig. } 2);$$

M étant un autre point quelconque de L, Mm et Mm'

Fig. 2 *bis*.

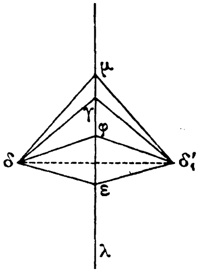


ses distances à D et D′, il s'agit de prouver que

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}m'} = k.$$

Projetons les droites D et L, et celles qui s'appuient

Fig. 2 *ter*.



sur elles, sur un plan perpendiculaire à D, suivant δ, λ, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$, $\delta\gamma$, $\delta\mu$; nous avons (*fig.* 2 *bis*)

$$\delta\varepsilon = e\mathrm{E}, \qquad \delta\varphi = f\mathrm{F}, \qquad \delta\gamma = g\mathrm{G}, \qquad \delta\mu = m\mathrm{M}.$$

Faisons une projection analogue sur un plan perpendiculaire à D', d'où la figure $\delta'\varepsilon'\varphi'\gamma'\mu'$; comme

$$\delta\varepsilon = e\mathrm{E}, \qquad \delta'\varepsilon' = e'\mathrm{E}, \qquad \ldots,$$

nous pouvons écrire à cause de l'hypothèse

$$(1) \qquad \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\delta\varphi}{\delta'\varphi'} = \frac{\delta\gamma}{\delta'\gamma'} = k.$$

Transformant homothétiquement la deuxième figure par rapport au point δ', nous pouvons supposer $\varepsilon'\varphi'\gamma'$ égal à $\varepsilon\varphi\gamma$; comme d'ailleurs

$$\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\varphi} = \frac{\varepsilon'\mu'}{\varepsilon'\varphi'} = \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EF}},$$

nous aurons alors $\varepsilon'\mu' = \varepsilon\mu$, et nous pourrons faire coïncider les divisions égales $\varepsilon'\varphi'\gamma'\mu'$ et $\varepsilon\varphi\gamma\mu$, δ' venant en δ'_1 de l'autre côté de δ par rapport à la droite λ; dans ces conditions, les relations (1) donnent (*fig.* 2 *ter*)

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta'_1\varepsilon} = \frac{\delta\varphi}{\delta'_1\varphi} = \frac{\delta\gamma}{\delta'_1\gamma}$$

égalités qui exigent que la droite $\varepsilon\varphi\gamma$ soit perpendiculaire à $\delta\delta'_1$ en son milieu, de sorte qu'alors $\delta\mu = \delta'_1\mu$.

On en conclut, en revenant à la figure primitive, que

$$\frac{\delta\mu}{\delta'\mu'} = \frac{\delta'_1\mu}{\delta'\mu'} = \frac{\delta'_1\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = k$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}m'} = k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

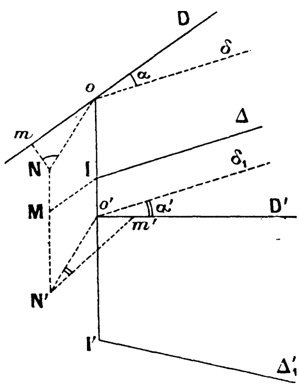
Il résulte de là que la droite qui passe par tout point de (S) et s'appuie sur Δ et Δ'_1, ou sur Δ_1 et Δ', appartient tout entière au lieu, qui est par suite une *surface réglée*. Soient L_1, L_2, L_3 trois pareilles droites s'appuyant sur Δ et Δ'_1, et par suite non en même plan deux à deux, M un point quelconque de (S); les droites Λ_1, Λ_2, Λ_3 passant par M et rencontrant respectivement deux des trois premières, font partie du lieu.

Si Λ_1 et Λ_2, qui coupent L_3, différaient, toute droite de leur plan, coupant trois droites de (S), ferait partie de cette surface, le plan (M, L_3) appartiendrait tout entier au lieu, ce qui est absurde; par conséquent Λ_1, Λ_2, Λ_3 se confondent nécessairement suivant une droite qui s'appuie sur L_1, L_2, L_3, et *le lieu est la quadrique définie par ces trois dernières.*

Nous allons en donner une génération simple :

Soient M un point du lieu contenu dans le plan Π

Fig. 3.



perpendiculaire en I à Δ, Mm et Mm' ses distances à D et D' :

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}m'} = k \ (\mathit{fig.}\ 3).$$

La parallèle menée par M à OO' coupe en N et N' les plans parallèles R et R' qui contiennent respectivement D et D'; Nm et N'm' sont perpendiculaires à D et D'; comme $\widehat{\mathrm{MI}\Delta}$ est droit, $\widehat{\mathrm{NO}\delta}$ et $\widehat{\mathrm{N'O'}\delta_1}$ le sont, δ et δ_1 étant les projections de Δ sur les plans R et R', et l'on a

$$\widehat{\mathrm{ON}m} = \alpha, \qquad \widehat{\mathrm{O'N'}m'} = \alpha';$$

d'où, puisque $\mathrm{ON} = \mathrm{O'N'}$,

$$\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O'}m'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k.$$

Les triangles rectangles $\mathrm{M}m\mathrm{O}$, $\mathrm{M}m'\mathrm{O'}$, ayant leurs côtés de l'angle droit proportionnels, sont semblables et donnent

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MO'}} = k.$$

M est donc sur la sphère de diamètre II', et (S) contient le cercle Γ de diamètre II' situé dans le plan Π; cette surface contient aussi le cercle de même diamètre situé dans le plan Π' perpendiculaire en I' à Δ'_1 : (S) *est donc l'hyperboloïde passant par* Δ *et* Δ'_1 *et ayant ses plans de sections circulaires perpendiculaires à ces droites;* son ellipse de gorge a II' pour axe focal; Δ et Δ_1, Δ' et Δ'_1 sont les génératrices aux extrémités de cet axe.

On peut considérer cet hyperboloïde comme engendré par la droite s'appuyant sur Δ et Δ'_1 et passant par le point M qui décrit le cercle Γ : la droite I'M du plan Π est orthogonale à Δ; d'ailleurs $\widehat{\mathrm{IMI'}}$ étant droit, I'M est perpendiculaire au plan $\mathrm{MI}\Delta$, et les deux plans $\mathrm{MI}\Delta$ et $\mathrm{MI'}\Delta'_1$ sont rectangulaires; mais leur intersection n'est autre que la génératrice de (S) qui passe en M, donc (S) *est le lieu des arêtes des dièdres droits dont les faces passent respectivement par* Δ *et* Δ'_1.

On voit ainsi que le lieu des arêtes des dièdres droits dont les faces contiennent respectivement deux droites fixes est l'hyperboloïde ayant ces droites pour génératrices, leur plus courte distance pour axe focal de l'ellipse de gorge, et ses plans cycliques perpendiculaires aux deux droites (Chasles).

Il est aisé de se rendre compte que tout hyperboloïde (H) dont les plans cycliques sont perpendiculaires à deux génératrices est susceptible de ce dernier mode de génération, d'où il suit qu'il peut, d'une infinité de manières, être considéré comme lieu des points dont le rapport des distances à deux droites a une valeur constante.

Considérons en effet les plans cycliques passant au centre de (H), leur intersection est perpendiculaire à la fois aux deux génératrices Δ et Δ'_1, qui sont par suite des génératrices passant par deux sommets opposés, de sorte que leur perpendiculaire commune II' est le diamètre commun aux sections circulaires centrales de l'hyperboloïde (H).

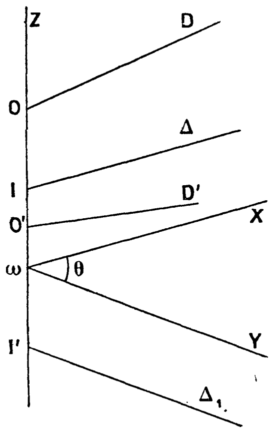
Si M est un point de la section perpendiculaire à Δ, MI' étant orthogonal à Δ et à MI est perpendiculaire au plan MIΔ; les plans MIΔ et MI'Δ'_1 sont perpendiculaires, la génératrice de (H) qui passe en M, et s'appuie sur Δ et Δ'_1, est l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement ces droites.

Soient maintenant O et O' deux points divisant harmoniquement II', OD et O'D' deux droites perpendiculaires à II' et dont les directions forment, avec celles des génératrices Δ et Δ'_1 de l'hyperboloïde (H) considéré, un faisceau harmonique, Δ faisant avec OD et O'D' des angles α et α' tels que

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO'}} \quad (\textit{fig. } 4).$$

D'après ce qui a été vu, le lieu des points dont le rapport des distances aux droites D et D′ est égal à $\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO}'}$, est un hyperboloïde passant par Δ, Δ'_1 et ayant ses

Fig. 4.



sections circulaires perpendiculaires à ces deux dernières droites, c'est-à-dire précisément l'hyperboloïde (H), qui peut être ainsi considéré, d'une infinité de manières, comme lieu des points dont le rapport des distances à deux droites a une même valeur.

Cherchons le *lieu des droites* D *et* D′ correspondant à un hyperboloïde donné (H) : prenons pour axes de coordonnées les parallèles ωX, ωY menées à Δ et Δ'_1 par le milieu ω de II′, et cette perpendiculaire commune pour ωZ; soient θ l'angle de Δ et Δ'_1, $2a$ leur distance II′, z l'ordonnée de D; nous avons (*fig.* 4)

$$k = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO}'} = \frac{\mathrm{I'O}}{\mathrm{I'O'}} = \frac{\mathrm{IO} + \mathrm{I'O}}{\mathrm{IO'} + \mathrm{I'O'}} = \frac{2\mathrm{O}\omega}{\mathrm{II'}} = \frac{|z|}{a}.$$

Projetons les diverses droites sur le plan $X\omega Y$, et soient d et d' les projections de D et D' : d fait avec ωX un angle α, et si $y = mx$ est son équation, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m \sin\theta}{1 + m\cos\theta};$$

l'équation de d' est alors $y = -mx$, et l'angle α' que fait cette droite avec ωX est tel que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{-m\sin\theta}{1 - m\cos\theta};$$

par suite,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'} = \frac{1 - 2m\cos\theta + m^2}{1 + 2m\cos\theta + m^2}.$$

Ecrivant que $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'} = k^2$, et observant que $m = \dfrac{y}{x}$, $k = \dfrac{|z|}{a}$, en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de D, nous obtenons le lieu suivant de D, et par suite aussi de D',

$$\frac{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = \frac{z^2}{a^2}.$$

C'est un *conoïde droit du quatrième ordre*, ayant pour axe l'axe focal de l'ellipse de gorge de (H), et pour directrice la courbe d'intersection des surfaces

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta = z^2,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = a^2,$$

c'est-à-dire la courbe du cône représentée par la première équation qui se projette sur le plan $X\omega Y$ suivant le cercle de centre ω et de rayon a.

Remarque. — Revenons aux figures 2, 2 *bis* et 2 *ter*: la deuxième et la troisième sont semblables, et si $\delta\rho$, $\delta'\rho'$ sont perpendiculaires à λ et λ', leurs pieds ρ et ρ' sont des points homologues des divisions semblables $\varepsilon\varphi\gamma, \ldots$, $\varepsilon'\varphi'\gamma', \ldots$; ρ et ρ' correspondent donc au même point de L, et l'on a

$$\frac{\delta\rho}{\delta'\rho'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{E}e'} = k,$$

d'où cette propriété :

Les perpendiculaires communes à toute droite L *du lieu* (S), *et aux droites* D *et* D' *respectivement, ont le même pied sur* L, *et le rapport des distances de* L *à* D *et* D' *est égal au rapport donné* k.

Cette dernière condition, prise isolément, définit un complexe de droites; si nous lui ajoutons la première condition, les droites qui les vérifient forment une congruence et peuvent être ainsi définies : k, D, D' étant donnés, et déterminant l'hyperboloïde (S), par tout point de cette surface menons la perpendiculaire au plan déterminé par les perpendiculaires issues de ce point à D et D', nous obtenons une droite de la congruence; en particulier, les génératrices de (S) qui s'appuient sur Δ et Δ', appartiennent à cette congruence. Quelle est la troisième condition à laquelle sont astreintes ces génératrices? Les figures semblables donnent

$$\frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon'\varphi'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{E}e'} = k ;$$

mais, ψ et ψ' désignant les angles de L avec D et D', on a

$$\varepsilon\varphi = \mathrm{EF}\sin\psi, \qquad \varepsilon'\varphi' = \mathrm{EF}\sin\psi',$$

par conséquent,

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = k.$$

Le rapport des sinus des angles de L *avec* D *et* D' *est égal au rapport donné* k.

Cas où $k = 1$. — Pour toute valeur de k différente de l'unité, Δ, faisant avec les directions des droites données D et D′ des angles α et α' liés par la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k$, diffère des bissectrices de l'angle de ces directions; Δ et Δ'_1 ne sont donc pas perpendiculaires; un hyperboloïde susceptible de la génération étudiée ne peut donc avoir ses génératrices Δ et Δ'_1 orthogonales, ce qui est d'ailleurs manifeste *a priori*.

Dans le cas particulier où $k = 1$, le point I vient au milieu de OO′, I′ est rejeté à l'infini sur OO′, (S) est un paraboloïde équilatère de sommet I, d'axe OO′, ayant ses plans directeurs également inclinés sur les droites données D et D′; les génératrices de l'un des systèmes font avec D et D′ des angles égaux, sont également distantes de ces droites, et les perpendiculaires communes à chacune de ces génératrices et aux deux droites D et D′, respectivement, ont le même pied sur la génératrice.

Inversement, tout paraboloïde équilatère peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des points équidistants de deux droites perpendiculaires à l'axe, équidistantes du sommet, et symétriques en direction par rapport aux plans directeurs; si le paraboloïde a pour équation

$$yz - ax = 0,$$

on trouve aisément, pour le lieu de ces droites, la surface

$$x(y^2 + z^2) + ayz = 0,$$

conoïde de Plücker ayant pour directrices l'axe du paraboloïde et l'ellipse du plan $x = y$, qui se projette sur le plan yOz suivant le cercle

$$y^2 + z^2 + az = 0.$$

[K2b, c]

SUR LE POINT DE FEUERBACH;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je voudrais, dans les quelques lignes qui vont suivre, énoncer et démontrer rapidement, quelques propriétés peut-être nouvelles du point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points d'un triangle. Je désignerai par A, B, C les sommets du triangle, a, b, c les milieux des côtés, D, E, F les points de contact des côtés et du cercle inscrit, G le centre de gravité, I le centre du cercle inscrit.

1° *Construction d'Hamilton.* — Considérons deux coniques Σ et Σ' touchant les côtés du triangle ABC en α, β, γ, α', β', γ', les diagonales d'un quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit correspondant se coupant au même point. Si l'on désigne par u l'intersection de $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, les droites Bu, Cu rencontrent AC, BA en Q et R, QR est la quatrième tangente commune à Σ et Σ', αU et α'U coupent QR en δ et δ' qui sont les contacts de cette droite avec Σ et Σ'.

Si Σ est le cercle inscrit, Σ' la conique touchant les côtés en a, b, c, on a immédiatement la construction classique d'Hamilton et l'on voit qu'on peut, dans cette construction, remplacer Σ' par une conique quelconque du faisceau tangentiel $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$.

Le lieu des centres des coniques de ce faisceau est la droite IG; soit O un point de cette droite, les droites aO, bO, cO coupent bc, ca, ab en O_1, O_2, O_3;

les droites AO_1, BO_2, CO_3 rencontrent BC, CA, AB en L, M, N et se coupent en un point ω. La conique de centre O inscrite dans le triangle ABC touche les côtés en L, M, N, car le lieu des centres des coniques inscrites dans ABC et touchant BC en L est la droite aO, Les parallèles aO, bO, cO menées par A, B, C se coupent en ω' et rencontrent BC, CA, AB en L′, M′, N′, les deux triangles ABC, abc étant homothétiques par rapport à G dans le rapport 2, les points O, G, ω' sont en ligne droite, $2\,OG = \omega' G$, et les points L, L′, M, M′, N, N′ sont symétriques par rapport à a, b, c. Si O décrit la droite IG, ω' décrit aussi IG et ω une conique circonscrite à ABC. On a donc la proposition suivante :

Soient ABC *un triangle,* I *le centre du cercle inscrit,* G *le centre de gravité;* D, E, F *les contacts du cercle inscrit avec* BC, CA, AB; O *un point quelconque de* IG; *les droites* AO, BO, CO *rencontrent* BC, CA, AB *en* L, M, N; *soient* L′, M′, N′ *les symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés de* ABC, *les droites* M′N′, EF, N′L′, FD, L′M′, DE *se coupent en* U, V, W; *les droites* DU, EV, FW *passent par le point de Feuerbach du triangle* ABC.

2° Nous allons indiquer maintenant une seconde extension de la construction d'Hamilton.

Théorème. — *Si* C_1, C_2, C_3 *sont trois coniques touchant les côtés d'un triangle en* $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, *les droites* $b_2 c_2$, BC, $c_2 a_2$, CA, $a_2 b_2$, AB *se coupent en* α_2, β_2, γ_2, *si* $a_1 a_3$, $b_1 b_3$, $c_1 c_3$ *sont conjugués harmoniques par rapport à* $a_2 \alpha_2$, $b_2 \beta_2$, $c_2 \gamma_2$, *les tangentes communes* Δ_{12}, Δ_{32} *à* $C_1 C_2$, $C_2 C_3$ *se coupen un point* φ *qui est commun à* C_1 *et* C_3, ou corrélativement :

C_1, C_2, C_3 *étant trois coniques circonscrites à un triangle* ABC, *si les tangentes à* C_1 *et* C_3 *en un sommet quelconque* A *forment faisceau harmonique avec la tangente à* C_2 *en* A *et la droite joignant ce point au pôle de* BC *par rapport à* C_2, *la droite joignant les quatrièmes points d'intersection de* C_1C_2, C_2C_3 *est une tangente commune à* C_1 *et* C_3.

Si aux deux points B et C nous faisons correspondre les points cycliques, C_1, C_2, C_3 deviennent trois cercles O_1, O_2, O_3, passant par un même point A; les droites AO_1, AO_3 sont également inclinées sur la tangente à O_2 en A, et deux droites isotropes parallèles issues de O_1 et O_3 rencontrent la tangente à O_2 en A en des points formant division harmonique avec les points d'intersection de cette tangente avec les droites isotropes issues de O_2.

En désignant par R_1, R_2, R_3 les rayons des trois cercles, par α l'angle des droites AO_1, AO_2 avec la tangente en A à O_2, cette dernière condition s'exprime par l'égalité $R_1(-\cos\alpha + i\sin\alpha)R_3(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -R_2^2$ ou $R_1R_3 = R_2^2$.

Une inversion de centre A transforme enfin la proposition à démontrer en la suivante : Étant donné un triangle isoscèle $\alpha\beta\gamma$ ($\alpha\beta = \alpha\gamma$), si les distances $A\alpha'$, $A\beta'$, $A\gamma'$ d'un point A aux côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont liées par la relation $\overline{A\alpha'}^2 = A\beta'.A\gamma'$, le point A est sur le cercle tangent à $\alpha\beta$ en β et à $\alpha\gamma$ en γ.

Or la relation $\overline{A\alpha'}^2 = A\beta'.A\gamma'$ entraîne la similitude des triangles $\alpha'A\beta'$, $\alpha'A\gamma'$ dont les angles en A sont égaux, et de cette similitude il résulte immédiatement que l'angle $\widehat{\beta A\gamma} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\beta\alpha\gamma}$, ce qui démontre la proposition. Le théorème énoncé au début du paragraphe est donc démontré; on en déduit immédiatement que :

O *étant un point quelconque de la droite joignant le centre de gravité d'un triangle* ABC *au centre du cercle inscrit, les droites* AO, BO, CO *coupent* BC, CA, AB *en* L, M, N; L', M', N' *étant les symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés, les droites* M'N', N'L', L'M' *coupent* BC, CA, AB *en* U, V, W, *si* D', E', F' *sont les conjugués harmoniques des points de contact* D, E, F *du cercle inscrit avec les côtés* BC, CA, AB, *par rapport aux points* UL', VM', WN' :

1° *La conique inscrite dans le triangle* ABC *aux points* D', E', F' *passe par le point de Feuerbach;*

2° *Les droites* M'N', N'L', L'M' *rencontrent les droites* EF, FD, DE *en* U_1, V_1, W_1, *les droites* E'F', F'D', D'E' *en* U_2, V_2, W_2, *les six droites* DU_1, EV_1, FW_1, $D'U_2$, $E'V_2$, $F'W_2$ *passent par le point de Feuerbach.*

De cette propriété générale découle un grand nombre de propriétés particulières, analogues à la suivante :

Si a, b, c sont les milieux des côtés d'un triangle ABC, P, Q, R *les points de contacts de* BC, CA, AB *avec les cercles exinscrits dans les angles* A, B, C :

1° *La conique tangente à* BC, CA, AB *en* P, Q, R *passe par le point de Feuerbach;*

2° *Les droites* QR, RP, PQ *coupant bc, ca, ab en* α, β, γ, *les droites* $P\alpha$, $Q\beta$, $R\gamma$ *passent par le point de Feuerbach.*

[C1f]

SUR UN PROBLÈME DE MINIMUM;

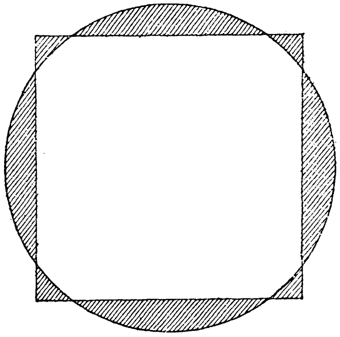
PAR M. L. KOLLROS.

Une question posée par un ingénieur m'a conduit au problème suivant :

Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre ; trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures.

On trouve un résultat inattendu au premier abord ; ce minimum est différent suivant que le cercle ou le carré varie. Il suffit évidemment de considérer la deuxième figure, qui est le huitième de la précédente.

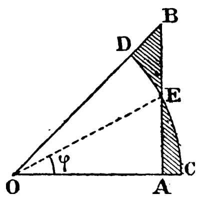
Fig. 1.



Si OA = AB est fixe et si l'on donne un accroissement au rayon du cercle, on voit que l'accroissement de la surface ACEDB est nul, aux infiniment petits du second ordre près, lorsque E est le milieu de l'arc CD. On enlève alors à l'un des triangles ACE ou BDE ce qu'on ajoute à l'autre. Il y a donc *minimum lorsque le carré fixe divise la circonférence en huit parties égales.*

Si, au contraire, le cercle est fixe, un accroissement donné à OA montre que le minimum a lieu quand E est le milieu de AB. En d'autres termes, il y a *mini-*

Fig. 2.



mum, cette fois, *lorsque le cercle fixe divise le pourtour du carré en huit parties égales.*

Il est très simple de vérifier ces résultats par l'analyse. Si l'on prend, la première fois, le demi-côté du carré fixe comme unité et l'angle $EOC = \varphi$ comme variable indépendante, on a à étudier la variation de la fonction

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} - \operatorname{tang}\varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{8}\right)(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$

qui présente bien un minimum pour $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Dans le second problème, si l'on prend le rayon du cercle fixe comme unité, c'est la fonction

$$F(\varphi) = \varphi - \frac{\pi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{2}$$

qui exprime l'aire variable; elle a un minimum pour $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.

Mathématiques.

GROUPE I.

I.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = xy + x^3$$

et la droite (D) *définie par les équations*

$$y = b, \qquad z = c,$$

où b *et* c *sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit, cette droite* (D) *restera fixe.*

1° *Montrer que la surface* (S) *est réglée et trouver ses génératrices.*

2° *A chaque génératrice rectiligne* (G) *de la surface* (S) *on fait correspondre le plan* (P) *mené par la droite* (D) *et parallèle à la symétrique de* (G) *par rapport au plan* xOy. *Déterminer le lieu du point d'intersection de* (G) *et de* (P), *quand la droite* (G) *décrit la surface* (S).

Montrer que ce lieu est une courbe (C) *située sur une quadrique* (Q) *et déterminer cette quadrique.*

3° *Former l'équation du quatrième degré don-*

nant les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) *avec un plan donné par son équation*

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. *En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, x_4, *de quatre points de la courbe* (C) *pour que ces quatre points soient dans un même plan.*

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° *Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, *de trois points de la courbe* (C) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). *Montrer que les droites qui coupent* (C) *en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique* (Q).

5° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe* (C) *en trois points donnés se coupent sur la courbe* (C) *est que ces trois points soient en ligne droite.*

6° *Par un point quelconque* M *de la courbe* (C) *il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe* (C) *au point* M *et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient* M′ *et* M″ *les seconds points de contact de ces deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe* (C) *en* M′ *et* M″.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses *de trois points* M, M', M'' *de la courbe* (C) *pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe* (C)?

7° *Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points* M, M', M'', *de la courbe* (C) *satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse* ξ *du quatrième point d'intersection* μ *de la courbe* (C) *avec le plan* (Π) *déterminé par les points* M, M', M''.

Calculer, en fonction de ξ, *les coefficients de l'équation du plan* (Π) *et les coordonnées du point de concours* A *des tangentes à la courbe* (C) *aux points* M, M', M''. *Ce point* A *sera dit « le point associé au point* μ *de la courbe* (C) ».

8° *Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de* b *et de* c, *par rapport auxquelles le point* A *est le pôle du plan* (Π); *déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique* (Q) *déjà considérée.*

Déterminer le lieu (Γ) *du point* A, *ainsi que l'enveloppe du plan* (Π), *quand le point* μ *décrit la courbe* (C).

9° *A trois points quelconques en ligne droite* μ_1, μ_2, μ_3, *pris sur la courbe* (C), *sont associés les trois sommets* A_1, A_2, A_3, *d'un triangle inscrit dans la courbe* (Γ). *Déterminer, en supposant* $b = 0$, *l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite* $\mu_1\mu_2\mu_3$ *varie. Montrer que, dans la même hypothèse* $b = 0$, *le cercle circonscrit au triangle* $A_1A_2A_3$ *passe par deux points fixes.*

(**Durée : 6 heures.**)

II.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales* C, *dont l'équation est de la forme* $y^2 = f(x)$, $f(x)$ *désignant un polynome en* x. *Écrire l'équation générale des courbes* C; *montrer que, par tout point du plan, il passe soit une, soit trois courbes* C, *et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes* C *qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point* A$(x = 0{,}5\,;\, y = 0)$. *Soit* P *celle des courbes* C *qui passe par* A *et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe* Ox; *soit* B *le point de la courbe* P *qui a pour ordonnée* $\sqrt{6}$. *Soit* Q *celle des courbes* C *passant par* B *et qui tourne sa concavité vers les* x *négatifs; soit enfin* A′ *le point où cette courbe coupe l'axe* Ox. *Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes* AB, BA′, *et l'axe* Ox.

3° *Un point mobile, partant de* A, *parcourt successivement l'arc* AB *de* P, *puis l'arc* BA′ *de* Q. *Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à* 1; *au point* B *on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à* 0,1 *près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc* ABA′.

4° *Au point* B, *l'accélération du mobile subit une discontinuité. Calculer, par ses projections sur les deux axes de coordonnées, la variation géométrique du vecteur-accélération au point* B.

(Durée : 4 heures.)

Solutions par M. R. BOUVAIST.

I.

1° L'équation aux ρ des points d'intersection de la surface (S) et de la droite

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}=\rho$$

est

$$\begin{aligned}&\alpha^3\rho^3+(3x_0\alpha^2+\alpha\beta)\rho^2\\&\quad+(3\alpha x_0^2+\beta x_0+\alpha y_0-\gamma)\rho-z_0+x_0y_0+x_0^3=0;\end{aligned}$$

pour que cette droite soit une génératrice de la surface (S) il faut et il suffit que

$$\alpha=0,$$
$$\beta x_0-\gamma=0,$$
$$z_0=x_0y_0+x_0^3.$$

Une génératrice G de (S) aura pour équations

$$x=t,\qquad z=ty+t^3.$$

2° Le plan (P) a pour équation

$$z-c+t(y-b)=0;$$

les équations de la courbe (C) seront

$$z-c+t(y-b)=0,$$
$$x=t,$$
$$z=ty+t^3$$

ou

$$x = t,$$
$$y = \frac{-t^3 + tb + c}{2t},$$
$$z = \frac{t^3 + tb + c}{2};$$

cette courbe est sur la quadrique (Q),

$$x(y - b) + z - c = 0.$$

3° L'équation aux t du point d'intersection du plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

et de la courbe (C) est

$$wt^4 - vt^3 + t^2(2u + bw) + t(bv + cw + 2s) + cv = 0;$$

si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines de cette équation,

$$\Sigma t_i = \frac{v}{w}, \qquad \Sigma t_i t_j = \frac{2u + bw}{w},$$
$$\Sigma t_i t_j t_k = -\frac{bv + cw + 2s}{w}, \qquad t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{cv}{w}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de (C) soient dans un même plan est que leurs abscisses soient liées par la relation

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{c}. \tag{1}$$

4° La relation (1) nous donne

$$x_4 = \frac{c(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 x_2 x_3 - c};$$

si les points d'abscisses x_1, x_2, x_3 sont en ligne droite, x_4 est indéterminé et l'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 x_2 x_3 - c = 0.$$

Les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C) seront les racines de l'équation générale

$$X^3 + \lambda X - c = 0.$$

Les deux systèmes de génératrices de la quadrique Q sont

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} x = \mu_1, \\ (y - b)\mu_1 + z - c = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}\ \begin{cases} y = \mu_2, \\ x(\mu_2 - b) + z - c = 0. \end{cases}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection des génératrices du système (I) avec la surface (S) est

$$x^3 + x(2y - b) - c = 0;$$

ces génératrices rencontrent par suite (C) en trois points en ligne droite.

5° Le plan osculateur en un point x_1 de (C) rencontre la courbe au point x_1^1, tel que

$$x_1^1 = \frac{3cx_1}{x_1^3 - c},$$

d'où

$$x_1^3 - \frac{3c}{x_1^1} x_1 - c = 0;$$

cette équation est l'équation aux abscisses des points d'osculation des plans osculateurs à (C) menés par un point x_1^1 de la courbe; sa forme montre que les trois points d'oscultation sont en ligne droite.

6° Un plan tangent à (C) en x_1 rencontrera la courbe en deux points dont les abscisses sont liées par la relation

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1^2 x_2 x_3} = \frac{1}{c};$$

par x_1 passent donc deux plans bitangents à la courbe; les abscisses des seconds points de contact sont les racines de l'équation

$$x_1^2 x^2 - 2cx - 2cx_1 = 0;$$

si x' et x'' sont les racines de cette équation, on a

$$x' + x'' = \frac{2c}{x_1^2},$$

$$x'x'' = -\frac{2c}{x_1},$$

d'où

$$\frac{2(x' + x'')}{x'^2 x''^2} = \frac{1}{c},$$

relation qui montre que x' et x'' sont les contacts d'un plan bitangent à (C).

Si M, M', M'' sont trois points de (C), tels que deux quelconques d'entre eux sont les contacts d'un plan bitangent, leurs abscisses seront liées par les relations

$$\frac{2(x_1 + x_2)}{x_1^2 x_2^2} = \frac{2(x_1 + x_3)}{x_1^2 x_3^2} = \frac{2(x_2 + x_3)}{x_2^2 x_3^2} = \frac{1}{c},$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2(x_2 + x_3) = x_2^2(x_1 + x_3) = x_3^2(x_1 + x_2) = 2c,$$

d'où

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 0,$$

$$x_1 x_2 x_3 = -2c.$$

7° L'équation générale donnant les abscisses des trois points M, M', M'' est donc

$$x^3 - \lambda x^2 + 2c = 0;$$

nous avons

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \xi}{x_1 x_2 x_3 \xi} = \frac{1}{c} \quad \text{d'où} \quad \lambda + 3\xi = 0$$

et l'équation devient

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0.$$

Si le plan Π a pour équation

$$ux + vy + wz + s = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \xi = -2\xi = \frac{v}{w},$$

$$\Sigma x_i x_j + \xi \Sigma x_i = -3\xi^2 = \frac{2u + bw}{w},$$

$$x_1 x_2 x_3 + \xi \Sigma x_i x_j = -2c = -\frac{bv + cw + 2s}{w};$$

l'équation du plan Π sera donc

$$x(3\xi^2 + b) + 4\xi y - 2z - (c + 2b\xi) = 0.$$

La projection de la courbe (C) sur xOz a pour équations

$$x = t,$$

$$z = \frac{t^3 + bt + c}{2};$$

l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes à cette courbe issues du point x_0, z_0 est

$$x^3 - \frac{3}{2} x_0^1 x^2 + 2z_0 - bx_0 - c = 0.$$

Identifions cette équation à l'équation

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0,$$

nous aurons,

$$x_0 = -2\xi,$$

$$z_0 = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

La même méthode appliquée à la projection de (C) sur xOz donne

$$y_0 = \frac{b - 3\xi^2}{2}.$$

Les coordonnées de μ sont donc

$$x_\mu = -2\xi,$$
$$y_\mu = \frac{b - 3\xi^2}{2},$$
$$z_\mu = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

8° Considérons la quadrique $f(xyz) = 0$, le plan polaire de μ par rapport à cette quadrique est

$$xf'_{x\mu} + yf'_{y\mu} + zf'_{z\mu} + tf'_{t\mu};$$

ce plan polaire doit coïncider avec le plan Π quel que soit ξ; on doit donc avoir

$$f'_{x\mu} = \lambda(3\xi^2 + b), \qquad f'_{y\mu} = 4\lambda\xi,$$
$$f'_{z\mu} = -2\lambda, \qquad f'_{t\mu} = -\lambda(c + 2b\xi);$$

quel que soit ξ, ces équations déterminent les coefficients de $f(xyz) = 0$, linéairement en fonction de deux d'entre eux, et l'on trouve sans peine

$$f(xyz) = (bx - 2z + 5c)^2 + \lambda[x(y - b) + z - c] = 0.$$

Les quadriques considérées sont donc de raccordement avec la quadrique (Q), le long de l'intersection de cette quadrique avec le plan polaire du point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$, par rapport à elle.

L'enveloppe de Π est le cône

$$(2y - b)^2 - 3(bx - 2z - c) = 0,$$

ayant pour sommet le point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$.

Le lieu Γ du point A est la conique

$$x = -2\xi,$$
$$y = \frac{b - 3\xi^2}{2},$$
$$z = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

9° Si $b = 0$, la courbe Γ devient la parabole

$$x = -2\xi,$$
$$y = -\frac{3\xi^2}{2},$$
$$z = \frac{5c}{2}.$$

Si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les abscisses des points μ_1, μ_2, μ_3 qui par hypothèse sont en ligne droite, nous aurons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_1\xi_2\xi_3 &= c. \end{aligned} \right.$$

La corde A_1A_2 a pour équations

$$3x(\xi_1 + \xi_2) - 4y + 6\xi_1\xi_2 = 0,$$
$$z = \frac{5c}{2},$$

ou

$$3x\xi_3^2 + 4\lambda - 6c = 0;$$

elle enveloppe la parabole

$$2y^2 - 9cx = 0,$$
$$z = \frac{5c}{2}.$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$z = \frac{3c}{2},$$

le cercle $A_1A_2A_3$; l'équation aux ξ des points d'intersection de ce cercle et de Γ est

$$9\xi^4 + 2\xi^2(3\beta + 4) + 8\alpha\xi + 2\gamma = 0;$$

si ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont les racines de cette équation, on a

$$\Sigma\xi_i = 0, \qquad \Sigma\xi_i\xi_j\xi_k = -\frac{8\alpha}{9},$$

d'où, en ayant égard aux relations (1),

$$\xi_4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma = 0, \qquad \alpha = -\frac{9c}{8};$$

le cercle $A_1A_2A_3$ passe donc par le sommet de la parabole Γ, et son centre décrit une perpendiculaire à l'axe de Γ; il passe donc par deux points fixes.

II.

1° L'équation

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y}{y'} - 2x + y^2y'^2 = 0,$$

d'où, par dérivation,

$$\left(2yy' - \frac{1}{y'^2}\right)(y'^2 + yy'') = 0.$$

L'équation

$$y'^2 + yy'' = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} + \frac{y''}{y'} = 0;$$

son intégrale est

$$y^2 = Cx + C'.$$

Considérons maintenant l'équation

$$2yy' - \frac{1}{y'^2} = 0;$$

en posant $y' = p$, on a

$$y = \frac{1}{2p^3}$$

et

$$dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{p^5},$$

d'où

$$x = \frac{3}{8}\frac{1}{p^4} + C.$$

On voit d'ailleurs facilement que, pour que la fonction

$$y^2 = Cx + C'$$

vérifie l'équation différentielle donnée, il faut prendre

$$C = 2\lambda, \qquad C' = -\lambda^3.$$

L'équation générale des courbes (C) est donc

$$y^2 = 2\lambda x - \lambda^3.$$

Par un point du plan passent trois courbes (C), elles sont toutes trois réelles si l'on a

$$27y^4 - 32x^3 < 0,$$

c'est-à-dire dans la portion du plan situé entre l'axe Ox et la courbe

$$27y^4 - 32x^3 = 0.$$

En un point de cette portion du plan, les coefficients angulaires des tangentes aux courbes (C) passant par ce point sont $\frac{\lambda_1}{y}, \frac{\lambda_2}{y}, \frac{\lambda_3}{y}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les racines de l'équation

$$\lambda^3 - 2\lambda x + y^2 = 0.$$

Si deux de ces courbes (C) sont rectangulaires,

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{y^2} = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_3 = 1;$$

le lieu des points du plan par où passent deux courbes (C) orthogonales est donc la parabole

$$y^2 - 2x + 1 = 0.$$

2° Par le point $A(x = 0,5, y = 0)$ passent les trois courbes (C)

$$y^2 = 0,$$
$$y^2 = 2x - 1,$$
$$y^2 = -2x + 1;$$

la courbe (P) est la courbe

$$y^2 = 2x - 1.$$

Par le point situé sur cette courbe ayant pour ordonnées $\sqrt{6}$, passent outre la courbe (P) les deux courbes (C),

$$y^2 = 4x - 8,$$
$$y^2 = -6x + 27.$$

La courbe (Q) est la parabole $y^2 = -6x + 27$; elle coupe Ox au point $A'\left(x = \frac{9}{2}, y = 0\right)$.

L'aire comprise entre la courbe (P), Ox et la perpendiculaire à Ox menée par le point d'ordonnée $\sqrt{6}$ est $\int^{\sqrt{6}} y^2\,dy$; l'expression analogue relative à la courbe (Q) est $\int_0^{\sqrt{6}} \frac{y^2\,dy}{3}$; l'aire cherchée est donc

$$\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{6}} y^2\,dy = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

3° L'accélération tangentielle étant égale à la vitesse, on a

$$\frac{dv}{dt} = v,$$

d'où

$$v = e^{t+k},$$

pour

$$t = 0, \qquad v = 1;$$

donc $k = 0$ et l'on a

$$v = e^t.$$

L'équation donnant le temps t cherché sera donc

$$e^t = \text{arc AB} + \text{arc BA}';$$

$$\text{arc AB} = \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left| L\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + y\sqrt{1+y^2}\right|_0^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{L\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{42}}{2};$$

$$\text{arc BA}' = \int_0^{\sqrt{6}} dy\sqrt{1+\frac{y^2}{9}}$$

$$= \frac{3}{2}\left| L\,\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{3} + \frac{y\sqrt{y^2+9}}{9}\right|_0^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(L\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9}\right),$$

d'où

$$e^t = \frac{L\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{42}}{2} + \frac{3}{2}\left(L\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9}\right),$$

d'où

$$t = \frac{1}{2(\log e)^2}\left[\log\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right) + 3\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}\right] + \frac{3\sqrt{42}+\sqrt{90}}{6\log e},$$

d'où

$$t = 12{,}707 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

4° Soit φ l'angle aigu de la normale et de la tangente à la courbe (P) en B, θ l'angle correspondant de la courbe (Q) en B; les projections sur les axes de l'accélération du mobile au point B de (P) sont

$$\gamma_x = \frac{dv}{dt}\cos\varphi + \frac{v^2}{\rho_1}\sin\varphi,$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{dt}\sin\varphi - \frac{v^2}{\rho_1}\cos\varphi;$$

or

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\rho_1 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 7\sqrt{7},$$

d'où

$$\gamma_x = e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} + \frac{e^t}{49}\right),$$

$$\gamma_y = e^t\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{e^t\sqrt{6}}{49}\right).$$

On a de même pour la courbe (Q)

$$\gamma'_x = \quad \frac{dv}{dt}\cos\theta - \frac{v^2}{\rho_2}\sin\theta,$$

$$\gamma'_y = -\left(\frac{dv}{dt}\sin\theta + \frac{v^2}{\rho_2}\cos\theta\right);$$

or

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{3}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}, \qquad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{15}},$$

$$\rho_2 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{15\sqrt{15}}{9},$$

d'où

$$\gamma'_x = \quad e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{3e^t}{25}\right),$$

$$\gamma'_y = -e^t\left(\frac{3}{\sqrt{15}} + \frac{2^t\sqrt{6}}{25}\right).$$

Les projections de la variation géométrique du vecteur accélération en B sont donc

$$\Gamma_x = e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\right) + e^{2t}\left(\frac{1}{49} + \frac{3}{25}\right),$$

$$\Gamma_y = e^t\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{15}}\right) - e^{2t}\left(\frac{\sqrt{6}}{49} - \frac{\sqrt{6}}{25}\right).$$

GROUPE II.

I.

On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. *Un point matériel* M, *de masse égale à un, est mobile dans un plan sous l'action d'une force* (F) *dont les projections* X *et* Y *sur les axes sont*

$$X = x, \qquad Y = y - 4x,$$

x *et* y *désignant les coordonnées du point* M :

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

2° *Déterminer le mouvement de* M *en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont* $(\alpha, 0)$ *et que sa vitesse a pour projections sur les axes* $(-\alpha, 2\alpha)$. *Construire la trajectoire* (T) *correspondant à ce mouvement.*

3° *Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque* M *de sa trajectoire* (T) *au point* M′, *où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur* OM.

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire* (T) *et calculer à* 0,01 *près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire* (T) *passe par le point* O. *Évaluer, en fonction de l'abscisse du point* M, *l'aire limitée par l'arc de courbe* OM *et la corde* OM, *ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de* Oy.

II.

Évaluer à 0,01 *près les intégrales*

$$\int^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}.$$

I.

1° On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y - 4x$$

l'intégrale générale de $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ est

$$x = C\left[\frac{e^{(t+k)} + e^{-(t+k)}}{2}\right];$$

l'intégrale générale de $\dfrac{d^2y}{dt^2} = y - 4x$ est de la forme

$$y = Ct[\lambda e^{t+k} + \mu e^{-(t+k)}].$$

Pour que cette fonction satisfasse à l'équation différentielle donnée il faut prendre, comme on le voit aisément, $\lambda = -1$, $\mu = 1$; on aura donc

$$x = C\frac{e^{t+k} + e^{-(t+k)}}{2} = C\operatorname{ch}(t+k),$$

$$y = -Ct[e^{t+k} - e^{-(t+k)}] = -2Ct\operatorname{sh}(t+k).$$

2° Les conditions initiales donnent

$$C\operatorname{ch}k = \alpha, \qquad Ce^k + Ce^{-k} = 2\alpha,$$

$$C\operatorname{sh}k = -\alpha, \qquad Ce^k - Ce^{-k} = -2\alpha;$$

d'où

$$Ce^k = 0,$$

$$Ce^{-k} = 2\alpha;$$

les équations de (T) sont donc

$$x = \alpha e^{-t},$$

$$y = 2\alpha t e^{-t};$$

(T) serait d'une construction facile.

3° La tangente en M′ a pour coefficient angulaire $2(t'-1)$; le coefficient angulaire de OM est $2t$.

Si la tangente en M′ est parallèle à OM,

$$2(t'-1) = 2t, \qquad t'-t = 1;$$

le temps mis par le mobile pour aller de M en M′ est donc constant et égal à 1.

4° L'hodographe a pour équations

$$x = -\alpha e^{-t},$$
$$y = 2\alpha(1-t)e^{-t};$$

soit sur (T) un point de coordonnées x_1 et y_1 correspondant au temps t, sur l'hodographe un point de coordonnées x_2 et y_2 correspondant au temps $t+1$; on a

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = -e;$$

les deux courbes sont donc homothétiques, le centre d'homothétie est l'origine, et le rapport d'homothétie

$$-e = -2,71 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

5° L'aire cherchée est

$$\int_{t_1}^{+\infty} + 2\alpha^2 te^{-2t}\,dt - \alpha^2 te^{-2t},$$

$$2\alpha^2 \int_{t_1}^{\infty} te^{-2t}\,dt = \alpha^2 t_1 e^{-2t_1} + \frac{\alpha^2}{2}\, e^{-2t_1},$$

d'où

$$\text{aire} = \frac{\alpha^2}{2}\, e^{-2t_1} = \frac{x_1^2}{2},$$

x_1 étant l'abscisse de M.

On a de même, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées de M :

$$\text{Volume cherché} = \frac{\pi}{3} x_1^2 y_1 - \int_{+\infty}^{t_1} \pi x^2 dy$$

$$= \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \int_{+\infty}^{t_1} e^{-3t} dt - t_1 e^{-3t} dt;$$

$$\text{Volume cherché} = \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \left(\frac{t_1 e^{-3t_1}}{3} - \frac{2 e^{-3t_1}}{9} \right)$$

$$= \frac{4\pi\alpha^3}{9} e^{-3t_1},$$

$$\text{Volume cherché} = \frac{4\pi x_1^3}{9}.$$

II.

Posons

$$\tan g \frac{x}{2} = t,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{t^2}{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left| \text{arc tang} \frac{t}{\sqrt{5}} \right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{5}} = 1,404,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt(1 + t^2)}{(t^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 5} + \frac{4}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2\,dt}{(t^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2 + 5} - \left| \frac{4t}{5(t^2 + 5)} \right|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{3\pi}{5\sqrt{5}} = 0,842.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1914).

Géométrie analytique et Mécanique (¹).

SOLUTION PAR M. CLAPIER.

I. Soit V l'angle constant sous lequel la spirale logarithmique C coupe chacun de ses rayons vecteurs. Nous avons

$$(1) \qquad \frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} V = \frac{1}{m}$$

et, pour un arc infinitésimal $MM' = ds$ qui se projette sur le rayon vecteur MQ,

$$(2) \qquad M'Q = MM' \sin V \qquad \text{ou} \qquad r\,d\theta = ds \sin V.$$

On déduit de ces expressions

$$(3) \qquad \text{arc } MOM = s = \left(\frac{ae^{m\theta}}{m \sin V}\right)_{M_0}^{M} = \frac{r - r_0}{\cos V}.$$

1° Soient ξ et η les coordonnées du centre de gravité G de l'arc fixe $\widehat{M_0 M_1}$, de longueur l; nous avons les formules

$$l\xi = \int_{M_0}^{M_1} ds\, x, \qquad l\eta = \int_{0}^{M_1} ds\, y \qquad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

et si l'on pose

$$I = \int r^2 \cos\theta\, d\theta, \qquad J = \int r^2 \sin\theta\, d\theta,$$

$$(4) \qquad \xi = \frac{I_{M_0}^{M_1}}{l \sin V}, \qquad \eta = \frac{J_{M_0}^{M_1}}{l \sin V};$$

(¹) *Voir* l'énoncé, p. 380.

nous aurons les intégrales I et J, en intégrant par parties, ce qui nous donne les égalités

$$I = ry - 2mJ, \qquad J = -rx + 2mI;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} I(1+4m^2) &= r(y+2mx),\\ J(1+4m^2) &= r(-x+2my). \end{aligned}$$

Finalement, en portant ces valeurs dans les expressions (4) et tenant compte de (1) et (3), il vient

$$\xi = \frac{m}{r_1 - r_0}\, I_{M_0}^{M_1}$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{m}{1+4m^2}\,\dfrac{(ry)_{M_0}^{M_1} + 2m(rx)_{M_0}^{M_1}}{r - r_0}, \\[2ex] \eta = \dfrac{m}{1+4m^2}\,\dfrac{(-rx)_{M_0}^{M_1} + 2m(ry)_{M_0}^{M_1}}{r_1 - r_0}. \end{cases}$$

Ces expressions (5) donnent la position du centre de gravité G de l'arc M_0M_1, connaissant les extrémités M_0 et M_1 de cet arc.

2° Supposons que le point M_0 tende vers le pôle O; ses coordonnées deviennent nulles et la position limite du point G, correspondant à l'arc de spirale OM, est donnée par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{m}{1+4m^2}(y+2mx), \\[2ex] \eta = \dfrac{m}{1+4m^2}(-x+2my). \end{cases}$$

II. Supposons que le point M se meuve sur la courbe C, de manière que son angle polaire augmente avec une vitesse d'un radian par seconde,

$$d\theta = n\,dt, \qquad n = \frac{180}{\pi}.$$

Le point G dont les coordonnées sont données par les expressions (6) décrit une courbe Γ qui est une spirale logarithmique.

En effet, désignons par ρ et ω les coordonnées polaires du point G; nous avons

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{m^2}{1+4m^2}(x^2+y^2), \qquad \rho = \frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$$

et

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2my-x}{2mx+y} = \frac{2m\operatorname{tang}\theta - 1}{2m+\operatorname{tang}\theta}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}V,$$

nous aurons

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}(\theta-\varphi), \qquad \omega = \theta - \varphi.$$

Il résulte, des valeurs de ρ et ω ainsi trouvées, que la courbe Γ s'obtiendra en prenant la spirale logarithmique G, obtenue en réduisant les rayons vecteurs de C dans le rapport $\frac{m}{\sqrt{1+4m^2}}$, et la faisant tourner autour du point O dans le sens inverse, d'un angle fixe φ.

2° Désignons par ξ' et η' les composantes de la vitesse du point G; pour les obtenir, en se servant des formules (6), nous devons calculer

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad y' = \frac{dy}{dt};$$

or, nous avons

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad dx = -y\,d\theta + \cos\theta\,dr,$$

$$y = r\sin\theta \quad \text{et} \quad dy = x\,d\theta + \sin\theta\,dr,$$

et, d'après la relation (1) qui donne dr,

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = (-y + mx)n \\ y' = (x + my)n \end{cases} \qquad \left(n = \frac{d\theta}{dt}\right).$$

Formons $y' + 2mx'$ et $-x' + 2my'$, nous obtenons

$$\xi' = \frac{m_1}{1 + 4m^2}[(1 + 2m^2)x - my]$$

$$\eta' = \frac{m_1}{1 + 4m^2}[mx + (1 + 2m^2)y]$$

$$(m_1 = n \cot V);$$

nous aurons une détermination facile de la vitesse V de composantes ξ' et η', en remarquant que celles-ci peuvent s'écrire

$$(8) \qquad \xi' = m_1(x - \xi), \qquad \eta' = m_1(y - \eta).$$

La direction de cette vitesse est GM et sa grandeur

$$V = m_1 \overline{GM}$$

est proportionnelle à la distance des deux points M et G qui se correspondent sur les courbes C et Γ.

Quant à l'accélération du point G, nous avons, d'après ces formules (8), les composantes

$$\xi'' = m_1(x' - \xi'), \qquad \eta'' = m_1(y' - \eta').$$

Ces expressions montrent que pour la construire, il suffit de composer la vitesse GV_1, équipollente à la vitesse du point M, avec la vitesse GV_2 égale et contraire à la vitesse du point G, puis multiplier par le facteur m_1 le vecteur ainsi obtenu.

III. Au lieu d'un arc de spirale, considérons une courbe quelconque C sur laquelle nous prenons une origine M_0 et sur laquelle un mobile M se meut suivant une loi déterminée, de sorte que l'on connaît la longueur de l'arc MOM en fonction du temps, ainsi que ses deux premières dérivées l' et l''.

Construisons le centre de gravité $G(\xi, \eta, \zeta)$ de cet arc et cherchons à déterminer sa vitesse V et son accélération A. Nous avons

$$l\xi = \int_{M_0}^{M} x\, ds,$$

que l'on peut écrire

$$l\xi = \int_{t_0}^{t} x \frac{ds}{dt}\, dt,$$

et d'après la définition même de l'intégrale définie, nous devrons avoir

$$\frac{d(l\xi)}{dt} = \left(x \frac{ds}{dt}\right)^{M}$$

ou bien

$$d\frac{l\xi}{dt} = x \frac{dl}{dt},$$

x étant l'abscisse de M. On a donc

$$l \frac{d\xi}{dt} = (x - \xi) \frac{dl}{dt}$$

ou encore

$$(9) \qquad l\xi' = (x - \xi) l'.$$

On calculerait de même les autres composantes η et ζ' de la vitesse V. L'égalité (9) montre que cette vitesse est dirigée suivant GM et sa grandeur est précisément $\frac{l'}{l} \times \overline{GM}$.

En dérivant les deux membres de cette égalité, nous obtenons pour la composante de l'accélération A

$$(10) \qquad l\xi'' = (x - \xi) l'' + l'(x' - 2\xi').$$

Pour la construire, il suffit de composer le vecteur $\frac{l''}{l}\,\overline{\mathrm{GM}}$ avec le vecteur $\frac{l'}{l}\,\overline{\mathrm{GV}_1}$, V_1 étant le vecteur résultant de la vitesse du point M et de la vitesse égale et contraire à 2 fois la vitesse équipollente du point G.

Dans le cas où C est une spirale logarithmique, $l' = ml$, M_0 étant au pôle O.

IV. Supposons que la ligne C soit formée de deux segments rectilignes M_0O et OM; désignons par m_0 et m les milieux de ces segments. Le centre de gravité G est situé sur le segment m_0m et sa position est telle qu'on ait

$$\frac{\mathrm{G}m_0}{\mathrm{G}m} = \frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m_0};$$

il est donc situé sur la droite symétrique de la bissectrice $\mathrm{O}\mu$ par rapport à la médiane du triangle $m_0\mathrm{O}m$. OM_0 étant pris pour axe des x et $\mathrm{O}m$ pour axe des y, nous avons, pour déterminer les coordonnées x et y du point G, les relations

$$\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m_0} = \frac{a-x}{x} = \frac{y}{\mathrm{O}m - y} \qquad (\mathrm{O}m_0 = a).$$

On en déduit

$$\mathrm{O}m = \frac{a(a-x)}{x} = \frac{xy}{a-x} + y$$

et le lieu γ du point G, quand le segment OM prend toutes les valeurs possibles, est donné par l'équation

$$xy - (a-x)^2 = 0.$$

C'est une hyperbole tangente en m_0 au segment OM_0. Si le segment OM pivote autour du point O, dans un plan donné Π, cette hyperbole décrit une surface dont les directions asymptotiques sont : 1° toutes les droites issues de O et situées dans le plan Π; 2° les droites du cône engendré par les bissectrices $O\mu$ de l'angle $\widehat{mOm_0}$. Lorsque le segment OM est fixe, le rapport $\frac{m_0 G}{m_0 m}$ est aussi fixé et le point G décrit un cercle dans un plan parallèle au plan Π; un tel plan est donc un plan de section circulaire pour la surface Γ.

Si l'on prend pour axes fixes deux droites rectangulaires OY et OZ du plan Π, nous avons $y = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ et la surface Γ a pour équation

$$x^2(Y^2 + Z^2) - (a - x)^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré et la bissectrice $O\mu$ décrit un cône du deuxième degré,

$$Y^2 + Z^2 - x^2 = 0.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS DE 1914. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. J. LEMAIRE,

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 *les quatre sommets d'un tétraèdre* T. *Représentons par* a_{ij} *la longueur de l'arête* A_iA_j *et par* O_{ij} *le milieu de cette arête. Représentons aussi par* (A, B) *la sphère décrite sur un segment quelconque* AB *comme diamètre.*

I. *Calculer l'un des produits géométriques* (1) *de*

(1) On rappelle que le produit géométrique de deux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ est le produit des longueurs de ces secteurs et du cosinus de leur angle.

deux arêtes opposées de T *en fonction des longueurs des arêtes de ce tétraèdre. Trouver la relation qui existe entre les produits relatifs aux trois couples d'arêtes opposées.*

II. *Trouver la relation qui doit exister entre les longueurs des arêtes de* T *pour que les deux droites* $O_{12}O_{34}$ *et* $O_{13}O_{24}$ *soient rectangulaires.*

III. *Soit* d *la distance des plans radicaux de chacune des sphères* (A_1, A_2), (A_3, A_4) *et de la sphère* (O_{12}, O_{34}). *Soient* d' *et* d'' *les distances analogues correspondantes aux deux autres couples d'arêtes opposées du tétraèdre. On demande de trouver les relations qui doivent exister entre les longueurs de ces arêtes pour qu'on ait* $d = d' = d''$. *Trois sommets d'un pareil tétraèdre étant donnés, on demande de trouver le lieu géométrique du quatrième sommet. Discuter.*

IV. *Étant donné un point quelconque* M, *on mène les deux bissectrices de l'angle* $\widehat{A_iMA_j}$. *Soit* ω_{ij} *le milieu du segment découpé par ces bissectrices sur la droite* A_iA_j; *il y a six points* ω_{ij}. *Démontrer que ces six points sont dans un même plan* Π *qu'on peut associer au point* M. *Inversement, un plan* Π *quelconque étant donné, on peut lui faire correspondre de cette façon deux points* M *et* M' *qui sont eux-mêmes associés. Quelle position faut-il donner au plan* Π *pour que les deux points* M *et* M' *correspondants soient confondus? Comment se déplace le plan* Π *lorsqu'un point* M *correspondant décrit un cercle dont le plan passe par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre?*

V. *Un tétraèdre* T *étant donné, construire un point* M_0 *confondu avec son associé et situé à la même distance des trois sommets* A_1, A_2, A_3. *Trouver la surface* S *lieu du sommet* A_4 *lorsque* T *se déforme,* A_1, A_2, A_3 *restant fixes et le rapport* $\frac{M_0A_4}{M_0A_1}$ *conservant une valeur constante* k. *Soit* D *une droite quelconque passant par* A_1. *Construire les points de rencontre de* D *et de* S. *Trouver le lieu des droites* D *tangentes à* S, *et le lieu du point de contact.*

I. Nous emploierons la notation suivante qui nous paraît plus commode que celle de l'énoncé : nous appellerons ABCD le tétraèdre T; b, c, d les longueurs des arêtes AB, AC, AD issues de A, et β, γ, δ celles des arêtes opposées. Construisons le parallélogramme BD'CD, dont les diagonales se coupent en I, nous pouvons écrire

$$\overline{AD'}^2 + d^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{ID}^2,$$

$$2\overline{AI}^2 + \frac{\delta^2}{2} = b^2 + c^2,$$

$$2\overline{ID}^2 + \frac{\delta^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2;$$

d'où, par addition,

$$\overline{AD'}^2 + d^2 + \delta^2 = b^2 + c^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

ou

$$b^2 + \beta^2 - 2b\beta\cos\left(\widehat{AB, CD}\right) + d^2 + \delta^2 = b^2 + c^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

d'où

$$b\beta\cos\left(\widehat{AB, CD}\right) = \frac{1}{2}(d^2 + \delta^2 - c^2 - \gamma^2).$$

On aurait de même,

$$c\gamma \cos\left(\widehat{\text{AC}, \text{DB}}\right) = \frac{1}{2}(b^2 + \beta^2 - d^2 - \delta^2),$$

$$d\delta \cos\left(\widehat{\text{AD}, \text{BC}}\right) = \frac{1}{2}(c^2 + \gamma^2 - b^2 - \beta^2).$$

Par conséquent

$$b\beta \cos\left(\widehat{\text{AB}, \text{CD}}\right) + c\gamma \cos\left(\widehat{\text{AC}, \text{DB}}\right) + d\delta \cos\left(\widehat{\text{AD}, \text{BC}}\right) = 0.$$

Ainsi *la somme des produits géométriques relatifs aux trois couples d'arêtes opposées est nulle.* On conclut aussi de ces relations les propriétés suivantes :

1° *Pour que deux arêtes opposées d'un tétraèdre soient orthogonales, il faut et il suffit que la somme des carrés soit la même pour les deux autres couples d'arêtes opposées;*

2° *Si les arêtes de deux groupes d'arêtes opposées sont orthogonales, il en est de même des arêtes du troisième groupe;*

3° *Dans un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales, on a*

$$b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 = d^2 + \delta^2,$$

et réciproquement.

II. Appelons O_b, O_c, O_d les milieux des arêtes AB, AC, AD et O'_b, O'_c, O'_d ceux des arêtes opposées CD, DB, BC. Pour que $O_bO'_b$ et $O_cO'_c$ soient rectangulaires, il faut et il suffit que le parallélogramme $O_bO_cO'_bO'_c$ soit un losange, c'est-à-dire que $O_bO_c = O'_bO_c$, ou $\frac{\text{BC}}{2} = \frac{\text{AD}}{2}$, ou $d = \delta$. Ainsi, pour que les droites joignant les milieux des arêtes opposées de deux couples de telles arêtes soient rectangulaires, il faut et il suffit *que les arêtes du troisième couple soient égales.*

Donc *si les arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales deux à deux, l'octaèdre qui a pour sommets les points* O_b, ..., O'_d *a ses diagonales rectangulaires deux à deux;* la réciproque est vraie.

III. Les sphères (A, B), (C, D), (O_b, O'_b) ont leurs centres O_b, O'_b, ω, en ligne droite; appelons l la distance des plans radicaux de la troisième associée successivement à chacune des deux autres, nous pouvons écrire

$$l = O_b O'_b - \frac{b^2 + \beta^2}{4 O_b O'_b}.$$

Mais le triangle $O_b O_c O'_b$ donne

$$\begin{aligned}\overline{O_b O'_b}^2 &= \overline{O_b O_c}^2 + \overline{O'_b O_c}^2 - 2 O_b O_c . O'_b O_c \cos\left(\widehat{O_b O_c, O'_b O_c}\right)\\ &= \frac{\delta^2 + d^2}{4} - \frac{d\delta}{2}\cos\left(\widehat{BC, DA}\right)\end{aligned}$$

et, en appliquant une formule obtenue plus haut,

$$\begin{aligned}\overline{O_b O'_b}^2 &= \frac{\delta^2 + d^2}{4} - \frac{d\delta}{2}\,\frac{b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2}{2 d\delta}\\ &= \frac{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2}{4},\end{aligned}$$

d'où

$$l = \frac{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2b^2 - 2\beta^2}{2\sqrt{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2}}.$$

Posant $k^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, nous avons

$$l^2 = \frac{[k^2 - 3(b^2 + \beta^2)]^2}{4[k^2 - 2(b^2 + \beta^2)]};$$

l'^2 et l''^2 auraient des expressions analogues; si nous écrivons que $l^2 = l'^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&[k^2 - 3(b^2 + \beta^2)]^2[k^2 - 2(c^2 + \gamma^2)]\\ &\quad - [k^2 - 3(c^2 + \gamma^2)]^2[k^2 - 2(b^2 + \beta^2)] = 0\end{aligned}$$

ou

$$(b^2+\beta^2-c^2-\gamma^2)[4k^4-9(b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2)k^2 \\ +18(b^2+\beta^2)(c^2+\gamma^2)]=0.$$

Les conditions $l'^2=l''^2$, $l''^2=l^2$ donneraient de même

$$(c^2+\gamma^2-d^2-\delta^2)[4k^4-9(c^2+\gamma^2+d^2+\delta^2)k^2 \\ +18(c^2+\gamma^2)(d^2+\delta^2)]=0,$$
$$(d^2+\delta^2-b^2-\beta^2)[4k^4-9(d^2+\delta^2+b^2+\beta^2)k^2 \\ +18(d^2+\delta^2)(b^2+\beta^2)]=0.$$

Appelant Δ, Δ', B, B', Γ, Γ' les facteurs des premiers membres de ces conditions, qui se réduisent à deux distinctes, nous les écrirons

$$\Delta\Delta'=0, \tag{1}$$
$$BB'=0, \tag{2}$$
$$\Gamma\Gamma'=0. \tag{3}$$

Les deux premières sont vérifiées dans les quatre hypothèses :

$$(4)\quad \begin{cases}\Delta=0,\\ B=0;\end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases}\Delta=0,\\ B'=0;\end{cases}$$
$$(6)\quad \begin{cases}\Delta'=0,\\ B=0;\end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases}\Delta'=0,\\ B'=0.\end{cases}$$

Les égalités (4) entraînent $\Gamma=0$, puisque

$$B+\Gamma+\Delta\equiv 0.$$

Les égalités (5) entraînent $\Gamma'=0$, car

$$B'-\Gamma'\equiv 9\Delta(b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2-d^2-\delta^2).$$

Les égalités (6) entraînent de même $\Gamma'=0$, à cause de

$$\Gamma'-\Delta'\equiv 9B(c^2+\gamma^2+d^2+\delta^2-b^2-\beta^2).$$

Enfin, les égalités (7) entraînent $\Gamma=0$, à cause de

$$\Delta'-B'\equiv 9\Gamma(d^2+\delta^2+b^2+\beta^2-c^2-\gamma^2)$$

et de l'inégalité

$$d^2 + \delta^2 + b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 > 0,$$

vraie pour un quadrilatère plan autre qu'un parallélogramme, et à plus forte raison pour un quadrilatère gauche de côtés d, δ, b, β, et de diagonales c et γ.

Nous constatons bien que (3) est une conséquence de (1) et de (2).

Les relations (4) qui s'écrivent

$$b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 = d^2 + \delta^2,$$

sont satisfaites quand le tétraèdre est orthocentrique, et seulement dans ce cas.

Considérons les conditions (5), qui ont pour conséquence $\Gamma' = 0$; la condition $B' = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}4(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2)^2 \\ - 9(c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2)(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2) \\ + 18(c^2 + \gamma^2)(d^2 + \delta^2) = 0\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de $\Delta \equiv b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 = 0$,

$$-2(c^2 + \gamma^2)^2 - 5(d^2 + \delta^2)^2 + 7(c^2 + \gamma^2)(d^2 + \delta^2) = 0$$

ou

$$(8) \quad (c^2 + \gamma^2 - d^2 - \delta^2)[2(c^2 + \gamma^2) - 5(d^2 + \delta^2)] = 0.$$

Si le premier facteur B est nul, on a

$$\Delta = B = \Gamma = 0;$$

le tétraèdre est orthocentrique.

Pour un tel tétraèdre, les distances l, l', l'' sont nulles, *les sphères ayant pour diamètres les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales et réciproquement.*

Trois des sommets B, C, D étant fixes, le lieu du quatrième est la perpendiculaire menée au plan des trois premiers par l'orthocentre du triangle qu'ils forment.

Annulant le second facteur du premier membre de (8), nous voyons que les conditions (5) sont encore satisfaites lorsque

$$b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$2(c^2 + \gamma^2) - 5(d^2 + \delta^2) = 0.$$

Les sommets B, C, D restant fixes, et par suite β, γ, δ étant constants, la première condition définit le plan perpendiculaire au plan BCD et passant par la hauteur du triangle issue de D, la seconde définit une sphère ayant son centre sur CD et dont on aurait aisément les éléments; le lieu correspondant du quatrième sommet est le cercle commun à ce plan et à cette sphère.

La considération des conditions (6) et (7) conduirait à deux cercles analogues.

IV. M étant un point quelconque de l'espace, soit ω_{ab} le milieu de la distance des traces sur AB des bissectrices de $\widehat{AMB}$; on établit très facilement que $\omega_{ab}M$ est tangent au cercle MAB, de sorte que

$$\overline{\omega_{ab}M}^2 = \omega_{ab}A \times \omega_{ab}B,$$

égalité qui exprime que ω_{ab} a même puissance par rapport à la sphère-point M et à la sphère, de centre Ω, circonscrite au tétraèdre T; par suite, *les six points tels que ω_{ab} sont dans un même plan* Π *qui est le plan radical de ces deux sphères*, plan équidistant de M et du plan polaire de M par rapport à la sphère Ω; ils sont les sommets d'un quadrilatère complet.

A tout point M correspond ainsi un plan Π, unique et bien déterminé; à deux points M et M′ inverses par rapport à la sphère, correspond le même plan Π perpendiculaire à MM′ en son milieu.

Inversement, un plan Π quelconque étant donné, on peut lui faire correspondre deux points M et M′, qui sont les points-limites du faisceau de sphères défini par la sphère Ω et le plan Π.

Pour que les points associés M et M′ coïncident, il faut et il suffit qu'ils soient sur la sphère, c'est-à-dire que le plan Π soit *tangent à cette sphère* Ω.

Si M décrit une figure, courbe ou surface, M′ décrit la figure inverse par rapport à la sphère. Supposons en particulier que M décrive un cercle S dans un plan contenant le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre T, M′ décrit le cercle S′ ou la droite inverse de S par rapport à Ω, la puissance d'inversion étant le carré R^2 du rayon de la sphère.

Si Ω est *extérieur au cercle* S, ce point est le centre d'homothétie directe des cercles S et S′, les droites joignant aux centres deux points associés M et M′ ont un point commun P placé de la même manière à la fois, sur ces droites, par rapport aux rayons SM et S′M′; le triangle PMM′ est isoscèle, et la *différence* des longueurs PS et PS′ est égale à celle des rayons des cercles S et S′, et réciproquement. Par conséquent, le lieu de P est, dans l'hypothèse actuelle, l'*hyperbole* de foyers S et S′ qui passe aux points à distance finie communs aux deux cercles.

La trace du plan Π sur le plan du cercle donné, étant perpendiculaire à MM′ en son milieu, est tangente en P à l'hyperbole; *l'enveloppe de ce plan* Π *est donc le cylindre droit ayant cette hyperbole pour directrice.*

Si Ω est *intérieur au cercle* S, ce point est le centre d'homothétie inverse des cercles S et S', le point P commun aux droites SM et S'M' appartient à l'un des rayons et au prolongement de l'autre; le triangle PMM' est isoscèle, la *somme* des longueurs PS et PS' est égale à celle des rayons des cercles S et S', et réciproquement. Par conséquent, le lieu de P est alors l'*ellipse* de foyers S et S' qui passe aux points à distance finie communs aux deux cercles.

La trace du plan Π sur le plan du cercle donné est tangente en P à l'ellipse, et l'*enveloppe de ce plan* Π *est dans ce cas le cylindre droit ayant cette ellipse pour directrice.*

Si enfin Ω est *sur le cercle* S, le lieu de M' est une droite S' perpendiculaire à ΩS, du même côté que S par rapport à Ω, la droite SM rencontre en P la perpendiculaire en M' à S', le triangle PMM' est isoscèle et a pour base MM' comme dans les cas précédents, le lieu de P est la *parabole* de foyer S dont la directrice est la parallèle S'' à S' à une distance de cette droite égale au rayon du cercle S, Ω et S'' étant de part et d'autre de S'.

La trace de Π sur le plan du cercle donné est tangente en P à la parabole, et *l'enveloppe de ce plan est dans ce cas particulier le cylindre droit ayant cette parabole pour directrice.*

V. Un tétraèdre T, ABCD, étant donné, pour qu'un point M_0 coïncide avec son associé et soit équidistant de trois sommets A, B, C, il faut et il suffit que ce point soit confondu avec l'un ou l'autre des points où l'axe du cercle ABC coupe la sphère circonscrite à T, points qui sont les pôles de ce cercle sur cette sphère.

Le lieu géométrique du quatrième sommet D, quand T se déforme, A, B, C, et par suite le cercle passant par ces points, restant fixes, et le rapport $\frac{M_0 D}{M_0 A}$ conservant une valeur constante k, est de révolution autour de l'axe $z'z$ du cercle, et sa méridienne peut être définie comme il suit : un cercle variable passe par deux points fixes A et A' symétriques par rapport à une droite $z'z$, M_0 est l'un des points communs à ce cercle et à cette droite, la méridienne de la surface cherchée S est le lieu du point D du cercle tel que

$$M_0 D = k . M_0 A.$$

Posons $AA' = 2a$, et supposons d'abord $k > 1$, M_0 et D sont de part et d'autre de AA' et le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère $AM_0A'D$ donne

$$M_0 A . DA' + M_0 A' . DA = M_0 D . AA'$$

ou, en remplaçant $M_0 D$ par $k . M_0 A$, et observant que $M_0 A = M_0 A'$,

$$DA + DA' = 2ka.$$

La méridienne de S est donc une ellipse de foyers A et A', et d'axe focal $2ka$; la surface S est un ellipsoïde de révolution aplati.

Si $k < 1$, M_0 et D sont du même côté par rapport à AA', et le théorème de Ptolémée donne

$$M_0 A . DA' - M_0 A' . DA = \pm M_0 D . AA'$$

ou

$$DA' - DA = \pm 2ka.$$

La méridienne est alors une hyperbole de foyers A et A', d'axe focal $2ka$, et la surface S est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

La recherche des points de rencontre de S et d'une droite quelconque est une question traitée dans les cours de Géométrie descriptive, que la surface soit un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution.

Il n'existe de droites D tangentes à S et passant par A que dans le deuxième cas : A étant un foyer de S, le lieu des tangentes issues de ce point est un cône de révolution, et le lieu du point de contact est l'hyperbole intersection de S et du plan perpendiculaire à celui du cercle de gorge mené par la polaire de A par rapport à ce cercle.

Ces résultats peuvent être établis d'une façon élémentaire (*fig.* 1) : soient (H) l'hyperbole méridienne de S de foyers A et A', O son centre, EE' le diamètre du cercle de gorge perpendiculaire à AA', OL une asymptote de (H), EL' la parallèle menée par E à cette asymptote; L, L' et O' les points où ces droites et l'axe sont coupés par un plan perpendiculaire à cet axe zz' : le triangle rectangle O'LL' donne

$$\overline{O'L'}^2 - \overline{O'L}^2 = \overline{LL'}^2 = \overline{OE}^2.$$

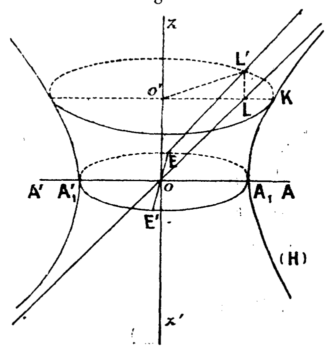
D'autre part, si O'K est le rayon du parallèle de S appartenant au plan considéré, une propriété connue de l'hyperbole permet d'écrire

$$\overline{O'K}^2 - \overline{O'L}^2 = \overline{OA_1}^2,$$

$A_1 A'_1$ étant l'axe transverse de (H); comme $OE = OA_1$, on a $O'L' = O'K$, d'où il résulte que S peut être engendrée par la révolution autour de zz' de la parallèle menée par E à l'une ou l'autre des asymptotes de (H).

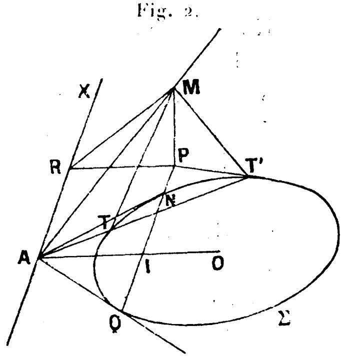
Ceci posé, soient Σ (*fig.* 2) le cercle de gorge de S, M le point de contact d'une tangente à S issue de A; T et T' les points où les génératrices de S passant en M rencontrent Σ; TT', trace sur le plan de Σ du plan tangent en M, passe en A; si P est la projection de M sur ce plan, PT et PT′ sont tangentes à Σ, de sorte que P

Fig. 1.



appartient à la polaire de A par rapport au cercle de gorge. Menons la parallèle AX à cette droite, et la

Fig. 2.



perpendiculaire MR à AX; PR est aussi perpendiculaire à AX. Si α désigne l'angle $\widehat{AOL}$, nous pouvons écrire

$$\widehat{MTP} = \widehat{ANI} = \alpha,$$

N et Q étant les points de contact des tangentes menées de A à Σ, et I le milieu de la corde NQ; la figure donne alors

$$\overline{MR}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{PT}^2 \operatorname{tang}^2\alpha + \overline{AI}^2$$
$$= \left(\overline{PI}^2 - \overline{IN}^2\right)\operatorname{tang}^2\alpha + \overline{AI}^2 = \overline{PI}^2 \operatorname{tang}^2\alpha = \overline{AR}^2 \operatorname{tang}^2\alpha.$$

L'angle $\widehat{MAX}$ est donc égal à α, et le lieu de AM est le cône de révolution ayant AX pour axe, et α pour demi-angle au sommet.

D'ailleurs, la relation

$$\overline{MP}^2 = \overline{PT}^2 \operatorname{tang}^2\alpha = PN.PQ \operatorname{tang}^2\alpha$$

montre que le lieu du point de contact M est une hyperbole, semblable à (H), de sommets N et Q, et située dans un plan perpendiculaire au plan de Σ.

Remarque. — Nous avons vu que, si les arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales, les droites qui joignent les milieux de ces arêtes sont deux à deux rectangulaires, et réciproquement. Voici d'autres propriétés de ces tétraèdres que nous appellerons les tétraèdres Θ:

Dans un tétraèdre Θ, les faces sont des triangles égaux, les trièdres sont égaux, les hauteurs sont égales, les dièdres opposés sont égaux, les médianes sont égales, ainsi que les droites joignant les sommets aux orthocentres des faces opposées.

Chacune des trois droites joignant les milieux de deux arêtes opposées est un axe de symétrie pour Θ, et la perpendiculaire commune aux arêtes correspondantes.

Ces droites ont le même milieu O, qui est à la fois le centre de gravité et le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, de la sphère inscrite, de l'hyperboloïde des hauteurs.

La somme algébrique des coordonnées de tout point de l'espace rapporté au tétraèdre est égale à la hauteur h du tétraèdre.

Le rayon de la sphère inscrite est égal à $\frac{h}{4}$; les sphères ex-inscrites sont égales, leur rayon vaut $\frac{h}{2}$, leurs centres sont les points de la sphère circonscrite diamétralement opposés aux sommets du tétraèdre; chacune d'elles touche la face correspondante en son orthocentre.

Il n'existe pas, dans les combles constitués par les plans qui forment le tétraèdre, de sphères tangentes à ces plans.

Si le centre de gravité d'un tétraèdre et le centre de la sphère circonscrite coïncident, les arêtes opposées sont égales.

Le centre de gravité O d'un tétraèdre Θ est équidistant des hauteurs.

Le volume d'un tel tétraèdre a pour carré

$$\frac{1}{72}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2).$$

Les angles des faces sont tous aigus.

La somme des cosinus des dièdres différents est égale à l'unité.

Le plan bissecteur d'un dièdre passe au milieu de l'arête opposée à celle du dièdre.

Les angles que font deux arêtes opposées avec les plans des faces qu'elles joignent sont égaux.

Si deux faces sont rabattues sur un même plan, de part et d'autre de leur arête commune, elles forment un parallélogramme; deux sommets quelconques se projettent sur l'arête qui joint les deux autres à égale distance du milieu de cette arête; le pied de la hauteur issue d'un sommet et l'orthocentre de la face opposée à ce sommet sont symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit à cette face.

L'hyperboloïde des hauteurs est coupé par les plans des faces suivant des hyperboles équilatères égales.

Si sur les hauteurs, à partir des sommets, et vers les faces opposées, on porte des longueurs égales $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ est un tétraèdre Θ et a même centre de gravité O que ABCD; cela s'applique en particulier au tétraèdre ayant pour sommets les pieds des hauteurs, ou les seconds points de rencontre des hauteurs avec la sphère circonscrite, ou les projections de O sur les hauteurs, d'où il résulte que l'hyperboloïde des hauteurs n'est pas de révolution.

Le tétraèdre ayant pour sommets les orthocentres des faces a ses arêtes opposées égales, et admet O pour centre de gravité.

Toute droite joignant les milieux des deux arêtes opposées fait des angles égaux avec deux arêtes opposées n'ayant pas leurs milieux sur elles, et aussi avec deux hauteurs issues des sommets d'une des deux premières arêtes.

Toute droite pareille est un axe de l'hyperboloïde des hauteurs.

Les vecteurs formés par les hauteurs (AA'), (BB'), (CC'), (DD') forment un système nul.

Les hyperboloïdes lieux des arêtes des dièdres droits dont les faces contiennent deux arêtes opposées ont mêmes axes que l'hyperboloïde des hauteurs, et passent par une même biquadratique gauche.

Le paraboloïde défini par le quadrilatère gauche que forment deux groupes d'arêtes opposées est équilatère, et a pour axe la droite qui joint les milieux des deux autres arêtes; O est le sommet commun aux trois pareils paraboloïdes.

Si l'on prolonge chaque hauteur d'une longueur égale à sa moitié au delà de son pied, on obtient un point de la sphère circonscrite.

Les droites qui joignent les milieux des hauteurs et les orthocentres des faces correspondantes sont égales, et ont leur milieu en O, qui est ainsi le centre d'une sphère contenant les orthocentres des faces, les pieds des hauteurs et leurs milieux.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Toulouse.

Épreuve théorique. — I. *On considère un cercle de centre* O *et de rayon fixe* a; AOB *est un diamètre fixe,* M *un point mobile sur le cercle. On projette* M *en* P *sur* AB, *puis* P *en* Q *sur* OM. *Lieu du point* Q *en coordonnées polaires et rectilignes. Aire comprise dans l'une des boucles de la courbe.*

II. *On considère la cycloïde ayant comme cercle générateur un cercle de rayon* R *et, plus particulièrement, la branche de la courbe limitée à deux points de rebroussement. Étendre à cette branche l'intégrale*

$$\int x\,dy - y\,dx,$$

l'axe Ox *étant, comme d'ordinaire, la droite qui joint les points de rebroussement de la cycloïde; l'origine est un de ces points.*

Épreuve pratique. — *Intégrer*

$$y'' - 6y' + 25y = 625x + 102\cos x.$$

Est-il possible de déterminer une courbe intégrale passant par l'origine et tangente en ce point à Ox?

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère un trapèze* isoscèle *de grande base 2π, de petite base $2a$, de hauteur h. La grande base servira d'axe Ox, la perpendiculaire en son milieu d'axe Oy.*

Le long de Ox, on construit une infinité de trapèzes identiques, les grandes bases se plaçant bout à bout et toutes les petites bases venant se placer sur la droite $y = h$. On a ainsi un chapelet rectiligne de trapèzes qui, si l'on fait abstraction des grandes bases, *est l'image d'une certaine fonction continue et périodique.*

On demande de représenter cette fonction par une équation $y = f(x)$, $f(x)$ étant une série trigonométrique.

Comme il est évident géométriquement que l'équation $y = f(x)$ doit se réduire à $y = h$ si a croît jusqu'à π, on établira ce fait analytiquement en faisant $a = \pi$ dans le résultat général. Ce sera d'ailleurs une vérification partielle de celui-ci.

II. *Sur une courbe, on peut imaginer un point fixe* A, *un point mobile* M, *l'arc* $AM = s$ *et le rayon de courbure ρ en* M. *Trouver toutes les courbes telles que*

$$\rho^2 - s^2 = a^2,$$

a étant une constante.

On s'attachera de préférence à déterminer ces courbes en donnant les coordonnées ordinaires x et y d'un de leurs points en fonction d'un paramètre qui pourra être l'angle α de la tangente et de l'axe Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un calculateur fait une table de logarithmes népériens. Il est déjà arrivé à* 100 *et sait par suite que*

$$\log \text{nép}\ 100 = 4,6052.$$

On demande de continuer le travail en calculant les logarithmes népériens de 101 *et* 102.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *D'un point* M *d'une courbe plane, rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on abaisse sur* Ox *l'ordonnée* MP. *On projette* P *en* Q *sur la tangente, puis* Q *en* R *sur* Ox.

Quelles sont les courbes pour lesquelles RP = const. = $\frac{a}{2}$.

Déterminer l'aire comprise entre l'axe Ox, *l'une de ces courbes et les deux parallèles à* Oy *menées par les points de la courbe d'ordonnées* y_0 *et* y_1.

II. *On considère la courbe*

$$\frac{y}{k} = \cos\frac{x}{l} \qquad (b \text{ et } l \text{ sont des constantes})$$

et plus particulièrement l'arc obtenu en faisant varier x *de zéro à* $\frac{\pi l}{2}$.

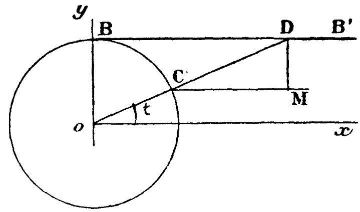
Rectification de cet arc par identification avec le quadrant d'une certaine ellipse dont on donnera les demi-axes a et b en fonction de k et l.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{x^6}{x^4-1}\,dx.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *un cercle de centre* O *et de rayon* R *et une tangente* BB′ *à ce cercle au point* B *où il coupe la partie*



positive de Oy. *Une demi-droite de direction variable et issue de* O *coupe le cercle en* C *et* BB′ *en* D. *Par* C, *on mène une parallèle à* Ox *et par* D *une parallèle à* Oy.

Ces deux dernières droites se coupent en un point M *dont on demande le lieu.*

On construira la courbe et l'on précisera la position des points d'inflexion.

Soit A *l'aire limitée par les axes* Ox, Oy, *la courbe, et l'ordonnée d'abscisse* x. *Montrer que*

$$\frac{2x}{R} = e^{\frac{A}{R^2}} - e^{-\frac{A}{R^2}}.$$

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 2x}{y + x}.$$

Épreuve pratique. — *Volume engendré par la cycloïde tournant autour de l'axe qui porte les points de rebroussement de la courbe.*

(Novembre 1912.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

Épreuve écrite. — 1° *Une surface étant rapportée à ses lignes de courbure* $u =$ const., $v =$ const., *établir les relations qui existent entre les courbures principales et les coefficients du* ds^2.

2° *Démontrer que les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, de même que les trois cosinus directeurs de la normale, satisfont à une même équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

et que, réciproquement, si une équation de cette forme admet trois solutions satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} + \frac{\partial \theta_3}{\partial u}\frac{\partial \theta_3}{\partial v} = 0,$$

on a les équations d'une surface rapportée à ses lignes de courbure en égalant ces trois solutions, soit aux coordonnées d'un point quelconque, soit aux cosinus directeurs de la normale.

3° *Conditions pour que la surface soit divisée en carrés par ses lignes de courbure.*

4° *Déterminer toutes les surfaces isothermiques telles que la courbure moyenne soit fonction d'une seule des deux variables u, v.* (Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère un élément de la forme*

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(Au + Bv + C)^2}, \tag{1}$$

A, B, C *étant trois fonctions d'un paramètre t qui est lui-même relié aux coordonnées u, v par la relation*

$$A'u + B'v + C' = 0. \tag{2}$$

Démontrer les propositions suivantes :

1° *Les courbures géodésiques des lignes coordonnées sont fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles satisfont à une équation de la forme*

$$F\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) = 0;$$

2° *Réciproquement tout réseau orthogonal et isotherme dont les courbures géodésiques sont fonctions l'une de l'autre permet de mettre le ds^2 sous la forme précédente.*

3° *Les lignes $t =$ const. sont des cercles géodésiques, dont chacun coupe les lignes coordonnées sous un angle constant.*

4° *Pour qu'une surface admette deux familles de lignes isométriques dont les courbures géodésiques soient dans un rapport constant, il faut et il suffit qu'elle soit applicable à une surface de révolution; il y a alors une infinité de systèmes de lignes répondant à la question; toutes ces lignes sont des loxodromies et l'inclinaison sur les méridiens reste la même pour toutes les loxodromies d'une même famille.* (Novembre 1912.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *On considère la quartique qui est représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(x^2 - 4a^2)^2 + 16y^2(y^2 - 2ay + 2a^2) = 0.$$

1° *Construire cette courbe.*

2° *Déterminer sa classe, son genre, le nombre de ses points d'inflexion, le nombre de ses tangentes doubles.*

3° *Exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de la courbe en fonction rationnelle d'un paramètre t et de la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en t; expliquer la manière dont le point décrit la courbe quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.*

4° *Déterminer la relation qui existe entre les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 de quatre points de la quartique pour que ces quatre points soient en ligne droite avec l'origine.*

5° *Former l'équation qui a pour racines les paramètres des points de contact des tangentes menées de l'origine à la courbe, puis, cette équation étant supposée résolue, calculer les paramètres des deux autres points d'intersection de chacune de ces tangentes avec la quartique.*

(Octobre 1910.)

Épreuve écrite. — I. *Soient* S_1 *et* S_2 *deux surfaces minima, chacune d'elles étant rapportée au réseau de ses courbes minima. On désigne par* M_1 *et* M_2 *les points de contact de deux plans tangents parallèles menés à ces surfaces et par* (Γ) *la congruence des droites* $M_1 M_2$.

1° *Quels sont les réseaux conjugués découpés sur* S_1 *et* S_2 *par les développables de la congruence* (Γ)?

2° *Déterminer l'une des nappes focales* (F) *de la congruence* (Γ) *et montrer qu'en désignant par* M *le point focal correspondant, le rapport* $\dfrac{MM_1}{M_1M_2}$ $\left(\text{ou } \dfrac{MM_1}{MM_2}\right)$ *reste constant quand* M_1M_2 *décrit une développable de la congruence circonscrite à la nappe* (F).

3° *La nappe focale* (F) *étant rapportée au réseau conjugué découpé par les développables de la congruence* (Γ), *les coordonnées rectangulaires de l'un quelconque de ses points sont trois solutions d'une équation aux dérivées partielles de Laplace. Former et intégrer cette équation. De quelles intégrations dépendra la recherche des surfaces découpées par les développables de la congruence* (Γ) *suivant un réseau conjugué?*

II. *On donne la surface définie par les équations*

$$x = a\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \qquad y = a\frac{\sin\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \qquad z = c\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}},$$

x, y, z *désignant les coordonnées rectilignes d'un de ses points,* u *et* v *ses coordonnées curvilignes. Quelle est cette surface et que sont les lignes coordonnées*

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}?$$

On considère le trièdre trirectangle habituel (T) *d'arêtes* Mx_1, My_1, Mz_1, *dont le sommet est un point* M *de la surface,* Mz_1 *étant normale à la surface,* Mx_1 *et* My_1 *suivant les bissectrices de l'angle des lignes* $u =$ const., $v =$ const. *qui passent au point* M.

Calculer les quatre translations ξ, η, ξ_1, η_1, *et les six rotations* p, q, r, p_1, q_1, r_1. *Former la condition pour que deux directions soient conjuguées et l'équation différentielle des lignes de courbure. Calculer les rayons de courbure principaux et trouver le lieu des points de la surface où la courbure totale a une valeur donnée* $-\frac{1}{k^2}$. *Rapporter enfin la surface à ses lignes de courbure.*

(Juin 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Problème. — *On considère deux surfaces minima* S_1 *et* S_2, *chacune d'elles étant rapportée au réseau des courbes minima.*

On fait correspondre à tout point M_1 *de* S_1 *le point* M_2 *de* S_2 *qui a mêmes coordonnées curvilignes, soient* u, v.

On désigne par M *le point de* M_1M_2 *tel que le rap-*

port $\frac{MM_1}{M_1M_2}$ *soit une fonction donnée* $\psi(u)$ *de* u *seulement, et par* S *la surface engendrée par* M.

1° *Démontrer que pour* $u =$ const. *ou* $v =$ const. *la droite* M_1M_2 *engendre une surface développable.*

2° *Ces deux familles de développables découpent sur la surface* S *un réseau conjugué, et l'une des familles de courbes de ce réseau est minima.*

3° *Comment doit-on choisir* S_1 *et* S_2 *et la fonction* $\psi(u)$ *pour que la surface* S *soit une surface minima non développable.*

On rappelle que l'on peut représenter une surface minima par les formules :

$$x = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u),$$

$$y = i\left[\frac{1+u^2}{2} f''(u) - uf'(u) + f(u)\right],$$

$$z = uf''(u) - f'(u).$$

II. Question des cours. — *Démontrer que toute surface hélicoïdale est applicable sur une surface de révolution. Cas de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

(Octobre 1913.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule*

$$ds^2 = \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{a}\right)(du^2 + u^2\,dv^2),$$

où a *désigne une constante positive.*

1° *On demande de déterminer explicitement les lignes géodésiques de la surface.*

2° *Si l'on fait correspondre au point de coordonnées* u, v *de la surface le point du plan qui a pour coordonnées polaires*

$$\rho = u, \qquad \omega = v,$$

quelles sont les courbes du plan qui correspondent aux géodésiques de la surface?

3° *On demande de déterminer la ou les lignes géodésiques passant par les deux points* (u, v) *et* (u_0, v_0).

4° *On demande l'enveloppe de toutes les lignes géodésiques passant par un point déterminé* $A(u_0, v_0)$ *de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — Solide commun à une sphère et à un conoïde.

Sphère. — *Son rayon vaut* 5^{cm}; *la ligne de rappel du centre est à* 10^{cm} *à gauche du petit axe de la feuille.*

Les projections du centre sont symétriques par rapport au grand axe et distantes de cet axe de 7^{cm}.

Conoïde. — *Son plan directeur est horizontal. Il a pour directrices la verticale du centre de la sphère et une ellipse de bout qui se projette horizontalement suivant un cercle; le centre de l'ellipse est le point le plus à gauche de la sphère; un sommet du grand axe est le point le plus bas de la sphère.*

1° *Construire la projection de l'intersection des deux surfaces, et représenter la partie de la sphère située du côté de la surface du conoïde qui contient le centre de l'ellipse, l'autre partie étant supprimée.*

2° *Déterminer la perspective de ce solide sur le plan horizontal, le point de vue étant à l'infini dans une direction de front inclinée à 45° sur le plan horizontal. Transporter cette perspective parallèlement à la ligne de terre à* 10^{cm} *vers la droite.*

La ligne de terre coïncide avec le grand axe de la feuille.

Nota. — *On divisera le demi-grand cercle de front de la sphère* en *huit parties égales et l'on construira les sections horizontales du solide menées par les points de division, tant sur les projections orthogonales que sur la perspective (sur cette dernière ne figureront que les parties vues de ces sections).*

Mettre en rouge les constructions qui donnent la tangente en un point quelconque, ainsi que les tangentes remarquables, sur chaque figure.

Expliquer brièvement l'épure. (Mars 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considére tous les cercles tangents à deux droites parallèles* (D), (D') :

1° *On demande de trouver les trajectoires orthogonales de ces cercles et de démontrer que toutes les trajectoires orthogonales sont des courbes égales.*

2° *On considère la surface de révolution engendrée par la rotation d'une de ces trajectoires autour de la droite* (D'') *lieu des points à égale distance de* (D) *et de* (D').

3° *Déterminer les lignes asymptotiques et les lignes géodésiques de cette surface de révolution.*

4° *Construire toutes les géodésiques passant par deux points donnés de la surface et déterminer la plus courte de ces lignes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle de front* (C) *d'éloignement* 7^{cm} *et de* 5^{cm} *de rayon est tangent au plan horizontal sur le grand axe de la feuille.*

Une verticale D, *d'éloignement* 11^{cm}, *se projette à* 9^{cm} *à gauche du grand axe de la feuille. Elle sert de directrice à un conoïde dont les génératrices sont horizontales et s'appuient sur le cercle* C.

On demande de représenter la portion de volume de ce conoïde qui est intérieure à la sphère dont le cercle C *est un grand cercle ainsi que l'ombre portée par ce solide sur les plans de projection. Les rayons lumineux sont à* 45°.

Figurer au trait rouge les constructions qui donnent un point quelconque et les points remarquables des lignes d'intersection et d'ombre, ainsi que les tangentes de ces points.

Donner sur la feuille définie, sous forme de légende, une explication très sommaire des constructions effectuées.

(Octobre 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Déterminer toutes les surfaces dont les deux familles de lignes asymptotiques se projettent sur le plan des* xy *suivant un réseau de courbes rectangulaires ;*

2° *Déterminer pour ces surfaces les deux familles de lignes asymptotiques et montrer qu'elles se projettent suivant un réseau isotherme, qui peut être choisi arbitrairement sur le plan des* xy ;

3° *Déterminer celles de ces surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques se projettent aussi suivant un réseau de courbes rectangulaires sur le plan des xz.*

(*On suppose bien entendu les axes rectangulaires.*)

(Octobre 1913.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Toute surface* (S) *dont les sections planes par des plans pivotant autour de* Oz *constituent un premier système de lignes de courbure admet pour second système de lignes de courbure les courbes de contact des cônes circonscrits dont le sommet est sur* Oz. *Réciproque.*

Ces courbes de contact sont sphériques. La surface S *est coupée par chaque plan* P *passant par* Oz *suivant un angle constant* V (*variable d'un plan* P *à un autre*).

II. *On sait que l'équation*

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{(1+p_0^2)\,dx+p_0q_0\,dy}{r_0\,dx+s_0\,dy}=\frac{p_0q_0\,dx+(1+q_0^2)\,dy}{s_0\,dx+t_0\,dy}$$

fournit au point M (x_0, y_0, z_0) *les deux directions principales de la surface en ce point;* p_0, q_0, i_0, s_0, t_0, *désignent les valeurs prises en* M *par les dérivées premières et secondes de* z *considéré comme fonction de* x *et* y.

En comparant l'équation (A) *à l'équation* (B),

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{(1+p^2)x+pqy}{rx+sy}=\frac{pqx+(1+q^2)y}{sx+ty},$$

on vérifiera aisément que, toute surface satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (B), *est une surface* (S) *du premier paragraphe.*

III. *En se servant des résultats du premier paragraphe, on prouvera que l'équation* (B), *admet comme intégrale première l'équation* (C),

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{py+qx}{\sqrt{1+p^2+q^2}\,\sqrt{(x^2+y^2)}}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où f est une fonction arbitraire.

Donner, en se servant de la première partie, l'interprétation géométrique de l'équation (C).

Inversement, montrer que de l'équation (C) *on peut déduire l'équation* (B) *par élimination de la fonction* f.

IV. *Pour intégrer l'équation* (C) *où* f *est supposée donnée, prendre les coordonnées semi-polaires* ρ, θ, z, *poser*

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial \rho}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

et montrer qu'en posant

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \cos V,$$

on obtient l'équation

$$(C') \quad \rho^2(1 + p_1^2) - q_1^2 \operatorname{tang}^2 V = 0 \qquad (V \text{ fonction de } \theta \text{ seul}).$$

En posant

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{F'(\theta)},$$

où la fonction F′ *est la dérivée d'une fonction* F (θ), *arbitraire au même titre que* f, *les caractéristiques sont données par les équations*

$$\rho^2(1 + p_1^2) = \lambda^2, \qquad q_1 \operatorname{tang} V = \lambda,$$
$$p_1\rho - z = \mu, \qquad \frac{\lambda}{\rho} = \operatorname{ch}[F(\theta) + \nu],$$

λ, μ, ν, *désignant trois constantes arbitraires.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la surface :*

$$\frac{x}{a} = \frac{uv - 1}{uv + 1},$$
$$\frac{y}{b} = \frac{u + v}{uv + 1},$$
$$\frac{z}{c} = \frac{u - v}{uv + 1}.$$

1° *Lignes asymptotiques.*

2° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure. Calculer les rayons principaux de courbure.*

(Novembre 1912.)

Composition écrite. — *Un point m de coordonnées x, y, z décrit une courbe gauche (γ) dont on appelle s l'arc, r le rayon de courbure, t le rayon de torsion; a, b, c les cosinus directeurs de la tangente; a' b' c' les cosinus directeurs de la normale principale; a'', b'' c'' les cosinus directeurs de la binormale. On considère la courbe dite* adjointe (γ_0) *décrite par le point m_0*

$$x_0 = \int a'' \, ds, \qquad y_0 = \int b'' \, ds, \qquad z_0 = \int c'' \, ds$$

et les courbes dites associées (Γ) *définies par les équations*

$$(\Gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= x \cos\theta + x_0 \sin\theta, \\ Y &= y \cos\theta + y_0 \sin\theta, \\ Z &= z \cos\theta + z_0 \sin\theta, \end{aligned} \right.$$

où θ est une constante.

On désigne par les grandes lettres, S, R, T, A, A', ..., C'' *les éléments de la courbe* (Γ) *analogues aux éléments de la courbe* (γ) *représentés par la même petite lettre.*

1° *Trouver le trièdre de Serret-Frenet relatif à la courbe associée. Dispositions de ce trièdre par rapport au trièdre de la courbe donnée. Longueur des arcs correspondants sur* (γ) *et* (Γ).

2° *Rayon de courbure et rayon de torsion de la courbe* (Γ).

3° *Montrer que si* (Γ) *est une courbe associée à* (γ), *inversement* (γ) *est l'une des courbes associées à* (Γ).

4° *Pour $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, la courbe* (Γ) *se réduit à* (γ) *ou à* (γ_0).

Montrer que si (γ) *a son rayon de courbure constant,* (γ_0) *a son rayon de torsion constant. Dans ce cas les courbes* (Γ) *sont dites* courbes de Bertrand $\left(\textit{relation linéaire entre les deux courbures } \frac{1}{R} \textit{ et } \frac{1}{T}\right)$.

Épreuve pratique. — *Soient c, c', c'' les coordonnées d'un point μ qui décrit une courbe* (γ) *sphérique arbitraire sur la sphère de centre O et de rayon 1 en axes rectangu-*

laires. Les formules

$$x = \tau \int c'' \, dc' - c' \, dc'',$$

$$y = \tau \int c \, dc'' - c'' \, dc,$$

$$z = \tau \int c' \, dc - c \, dc',$$

définissent une courbe C, *telle que la tangente* MT *en* M, *à cette courbe, soit perpendiculaire au plan* O$\mu\theta$ *déterminé par le rayon* Oμ *et la tangente* $\mu\theta$ *en* μ *à la courbe sphérique.*

Inversement la droite Oμ *est perpendiculaire au plan osculateur en* M *à la courbe* C, *de sorte que* γ *est l'indicatrice des torsions de* C; *et la formule*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tau^2(dc^2 + dc'^2 + dc''^2)$$

montre que la torsion de C *est constante et égale à* τ.

Soient donc

$$c = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\mu t - \sqrt{\mu}\cos\lambda t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}},$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}\sin\mu t + \sqrt{\mu}\sin\lambda t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}},$$

$$c'' = \frac{2\sqrt[4]{\lambda\mu}\cos\frac{\lambda+\mu}{2}t}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}}$$

(λ, μ *constantes,* t *paramètre variable*), *les équations paramétriques d'une courbe sphérique* γ *particulière.*

Déterminer la courbe C *correspondante. Montrer que si le rapport* $\frac{\lambda}{\mu}$ *est commensurable, on peut, en effectuant au préalable la substitution* $t = k\mathrm{T}$, *où* k *est une certaine constante, supposer* λ *et* μ *entiers et premiers entre eux et déduire de là que dans ce cas la courbe* C *est algébrique et unicursale.*

(Juin 1913.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Établir les relations qui lient les deux formes quadratiques fondamentales*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad da\, dx + db\, dy + dc\, dz$$

attachées à une surface quand on la suppose rapportée à ses lignes de longueur nulle.

Appliquer les formules à la détermination des surfaces pour lesquelles ces lignes forment un réseau conjugué et « qui possèdent un élément linéaire donné ».

Indiquer les cas où cet élément linéaire peut convenir à des surfaces de révolution et déterminer alors les lignes géodésiques de la surface.

II. *Étudier la transformation de contact, dite* transformation apsidale, *pour laquelle les coordonnées cartésiennes respectives* x, y, z *et* X, Y, Z *des points correspondants, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *sont liées par les relations*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Appliquer cette transformation aux quadriques admettant l'origine O *pour centre.*

Épreuve pratique. — *Établir les équations générales des cercles qui coupent à angle droit le plan des xy et la surface* (S) *ayant pour équation*

$$z = f(x, y).$$

Vérifier que ces cercles sont toujours normaux à une famille de surfaces Σ.

Si l'on appelle A *et* B *les deux points où l'un des cercles coupe le plan des xy,* M *le point où il rencontre* S, P *le point où il rencontre l'une des surfaces* Σ, *le rapport anharmonique des quatre points* A, M, B, P *est constant.*

La transformation qui change les coordonnées (x, y, z, p, q) *de l'élément de contact en* M *en coordonnées* (X, Y, Z, P, Q)

de l'élément de contact en P *est une transformation de contact.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère une surface* S, *lieu du point* (x, y, z), *pour laquelle*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2\, dv^2.$$

1° *Montrer que les tangentes aux lignes* $v =$ const. *sont normales à une famille de surfaces. Déterminer l'une d'elles* Σ *et ses rayons de courbure principaux* R et R'.

2° *A quelle condition* R' *est-il fonction de* R? *Calculer dans ce cas l'élément linéaire de la seconde nappe* S_1 *de la surface focale de la congruence des normales à* Σ.

3° *Trouver toutes les formes de la relation entre* R *et* R' *qui conduisent pour* S *ou pour* S_1 *à une surface à courbure constante négative.*

4° *Déterminer les hélicoïdes sur* S *ou sur* S_1 *et « leurs lignes géodésiques ».*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère les surfaces* (S) *représentées en coordonnées cartésiennes rectangulaires par les formules*

$$x = A(u-a)^m(v-a)^n,$$
$$y = B(u-b)^m(v-b)^{n'},$$
$$z = C(u-c)^m(v-c)^{n'},$$

et l'on demande :

1° *De montrer que les lignes* $v =$ const. *sont conjuguées ;*

2° *De former l'équation différentielle de leurs lignes asymptotiques, et d'indiquer comment elle s'intègre. Y a-t-il des cas où l'intégrale est algébrique en* u *et* v ?

3° *En laissant* a, b, c *arbitraires, de déterminer* tous les cas *où les lignes* $u =$ const. *sont des lignes de courbure de* (S). *Quelle est alors la nature de ces surfaces* (S)?

4° *De trouver la seconde nappe de la surface focale de la congruence de droites formée par les tangentes aux lignes* $u =$ const. *de l'une des surfaces* (S).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver la masse de la partie de* *l'espace comprise entre deux sphères concentriques de rayons respectifs r et R sachant que la densité en un point M est inversement proportionnelle à sa distance MP à un point fixe P.*

Examiner les divers cas possibles suivant la position du point P.

(Novembre 1912.)

SUJETS D'EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL PROPOSÉS AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION.

I.

1° *Déterminer les asymptotiques de la surface* (S) *représentée par les équations paramétriques*

$$x = a \sin u \times \operatorname{ch} v + bu,$$
$$y = b \cos u \times \operatorname{sh} v + av,$$
$$z = \sin u \times \operatorname{sh} v.$$

dans lesquelles a et b sont deux constantes. Quelles sont les génératrices de cette surface? Pour des valeurs convenables des constantes a et b, peut-elle être une surface réglée?

2° *Les axes coordonnés étant supposés rectangulaires, montrer qu'il est possible de choisir les constantes a et b de manière que la surface* (S) *soit rapportée à un réseau orthogonal* (u, v); (S) *est alors une surface minima dépendant de l'argument α de fonctions hyperboliques qui peuvent servir à exprimer simplement les constantes a et b. Quelles sont les lignes de courbure de cette surface minima* (S)?

3° *Rectifier une asymptotique de la surface minima* (S). *Montrer que toute asymptotique est une hélice tracée sur un cylindre du second degré dont on précisera la nature et les éléments.*

4° *Sur la surface minima* (S), *on envisage les lignes* (C) *le long desquelles les rayons de courbure principaux sont constants, calculer la torsion des asymptotiques pour les divers points d'une ligne* (C) *et, de ce calcul, déduire une nouvelle définition géométrique des lignes* (C).

Sur la surface minima (S), *déterminer les trajectoires orthogonales des lignes* (C).

5° *La surface minima* (S) *est représentée conformément sur le plan* (u, v); *le rectangle curviligne formé sur* (S) *par quatre asymptotiques est figuré, sur la carte, par un rectangle* (R), *rectiligne, fixe lorsque* α *varie.*

On se donne en position le rectangle (R) *de la carte; à toute valeur de* α, *on associe la valeur* S_α *de l'aire de la surface correspondante* (S) *qui est figurée sur la carte par le rectangle* (R) : *on propose de déterminer, en fonction des quatre nombres qui repèrent les côtés du rectangle, l'argument* α *de manière que l'aire associée* S_α *soit minimum; calculer le minimum correspondant* S_0.

Ce minimum S_0 *peut-il, pour un choix convenable du rectangle* (R), *être égal à l'aire de ce même rectangle* (R)?

II.

a, b, c, A, B, C *sont six fonctions d'un même paramètre* t, *dont les dérivées respectives sont désignées par* a', b', c', A', B' *et* C'. *L'équation*

$$ax + by + c = \sin(Ax + By + C)$$

représente une famille de courbes (S).

1° *Déterminer les points d'inflexion de la courbe* (S_0) *qui correspond à une valeur particulière* t_0 *du paramètre* t. *Quels sont les lieux des points d'inflexion des courbes* (S) *lorsque* t *varie? Examiner le cas particulier pour lequel*

$$\frac{a}{A'} = \frac{b}{B'} = \frac{c}{C'}.$$

2° *Soit* I_1 *l'un des points d'inflexion et soit* (Γ_1) *le lieu de ce point* I_1. *Sous quelle condition la courbe* (Γ_1) *appartiendra-t-elle à l'enveloppe des courbes* (S), *le point de contact entre l'enveloppe et cette partie de l'enveloppe étant toujours un point d'inflexion* I_1 *de l'enveloppe* (S)?

3° *Les points d'inflexion de* (S) *étant supposés numérotés dans leur ordre de succession sur* (S), *montrer qu'ils se répartissent en deux groupes, le groupe des points de numéros pairs et le groupe des points de numéros impairs, qui jouissent chacun de la propriété suivante : si les lieux* (Γ_i) *et* (Γ_j) *de deux points d'inflexion d'un même groupe appartiennent à l'enveloppe, il en est de même de tous les points d'inflexion du même groupe. Donner des expressions générales, indépendantes de tout signe de quadrature, des six fonctions* a, ..., C, *lorsque cette circonstance se produit pour* un *groupe.*

4° *Les conditions précédentes sont supposées remplies; peut-on choisir convenablement les six fonctions pour que le lieu de l'un (ou les lieux de plusieurs) des points d'inflexion de l'autre groupe appartienne (ou appartiennent) aussi à l'enveloppe?*

Plus particulièrement encore, est-il possible de prendre pour les six fonctions a, b, c, A, B *et* C *des expressions d'un paramètre* t *telles que, tous les lieux des points d'inflexion des deux groupes étant supposés appartenir à l'enveloppe des courbes correspondantes* (S), *celle-ci soit uniquement constituée par ces différents lieux?*

III.

Les axes coordonnés Oxyz *sont rectangulaires.*

I. *Étant donnée une surface* (S), *montrer qu'il existe* en général *un système de courbes* (C), *conjuguées sur la surface* (S), *et qui sont orthogonales en projection sur le plan* Oxy. *Il y a cependant exception pour certaines surfaces particulières* (S_0) *que l'on caractérisera. — Déterminer ce système de courbes conjuguées lorsque la surface* (S) *est une quadrique admettant le plan* Oxy *pour plan principal de symétrie.*

II. *Soient* M *un point quelconque de la surface* (S), m *sa projection sur* Oxy, d *la parallèle menée par* m *à la normale en* M *à la surface* (S). *A toute surface* (S) *donnée qui n'est pas une surface* (S_0), *est ainsi associée une certaine congruence de droites* [d]. *Démontrer qu'il y a équivalence entre la détermination des courbes* (C) *sur* (S) *et la détermination des développables de la congruence* [d].

III. *Déterminer les surfaces* (S) *associées ainsi à des congruences de normales, déterminer alors les surfaces qui sont orthogonales aux droites d'une telle congruence de normales et, sur une de ces dernières surfaces, déterminer ses lignes de courbure; sur une surface* (S) *correspondante, définir géométriquement les courbes* (C).

Vérifier que, dans ce cas, la surface (S) *est intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et qui dépend d'une fonction arbitraire; sur l'intégrale* (S), *les courbes caractéristiques de cette équation sont des courbes* (C). *A quel caractère reconnaîtra-t-on, d'une façon générale, qu'étant donnée une équation de premier ordre, les caractéristiques sur une intégrale générale sont toujours des courbes* (C) *de cette surface?*

IV. *En revenant au cas général, former l'équation des points focaux sur chaque rayon de la congruence. Quelle est l'équation générale des surfaces* (S) *associées à une congruence* [d] *pour chaque rayon de laquelle un point focal est à l'infini ou dans un plan parallèle à* Oxy *donné?*

Quelles sont les surfaces (S) *à des congruences* [d] *qui admettent le plan* Oxy *pour surface centrale (lieu du milieu du segment focal)? Démontrer que la surface générale* (S_1) *ainsi obtenue est la surface la plus générale dont les lignes asymptotiques se projettent sur* Oxy *suivant un réseau orthogonal; sur une surface* (S_1), *déterminer les asymptotiques et les courbes* (C).

V. *Étudier le cas où* (S_1) *est une surface d'équations :*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = A r^k \sin K\theta$$

(A *et* K *sont deux constantes*). *Lorsque* A *varie, déterminer les courbes et les surfaces trajectoires orthogonales de* (S_1); *parmi ces surfaces trajectoires, il existe une infinité de quadriques que l'on définira géométriquement. Est-il possible ou non de déterminer un système triple-orthogonal de surfaces qui comprenne les surfaces précédentes* (S_1)? (Poitiers 1912.)

NÉCROLOGIE.

Georges LERY.

Les lecteurs des *Nouvelles Annales* apprendront avec une douloureuse émotion la mort de Georges Lery, tué à l'ennemi le 10 septembre, à l'âge de 34 ans.

Ses anciens condisciples du Collège Rollin, où je l'ai connu comme élève, ses camarades de l'École Normale, ses élèves du Lycée de Lille, du Lycée de Reims, du Lycée Carnot ressentiront vivement sa perte. C'était un esprit fin, un caractère aimable, un cœur excellent. De tous les jeunes gens que j'ai connus dans une longue carrière, Georges Lery est l'un de ceux que j'ai le plus aimés.

De 1902 à 1905, il a publié plusieurs articles dans les *Nouvelles Annales*, spécialement une étude sur la surface de Kummer et une démonstration intéressante du théorème de d'Alembert. Il a donné plusieurs Communications à l'Académie des Sciences : *Sur l'équation de Laplace à deux variables; Sur la fonction de Green pour un domaine plan dont le bord est algébrique*. Ce dernier sujet devait faire l'objet d'une Thèse de doctorat, que les soucis de l'enseignement ont seuls retardée; les résultats élégants auxquels il était parvenu seront publiés ailleurs.

Après avoir consacré sa vie au culte de la Vérité, il est mort pour la Patrie : ceux qui le pleurent peuvent penser du moins qu'il a fait tout son devoir.

G. FONTENÉ.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1795.

(1898, p. 196.)

Parmi les triangles qui ont pour côtés trois entiers consécutifs, il n'en est qu'un seul dans lequel le rapport de deux angles soit un entier : c'est le triangle qui a pour côtés 4, 5, 6 ; *dans ce triangle, un angle est double de l'autre.*

M. Weill.

Solution.

Par M. H. Brocard.

Soient les côtés $n+1$, n, $n-1$ opposés aux angles A, B, C. On aura

$$\frac{\sin A}{n+1} = \frac{\sin B}{n} = \frac{\sin C}{n-1}$$

et

$$2\cos A = \frac{n-4}{n-1},$$

$$2\cos B = \frac{n^2+2}{n^2-1},$$

$$2\cos C = \frac{n+4}{n+1};$$

et alors il faut que l'un des rapports de deux sinus soit égal à l'un des nombres $2\cos A$, $2\cos B$, $2\cos C$; l'angle correspondant étant celui du dénominateur.

En d'autres termes, l'équation en n ainsi obtenue doit admettre une racine entière.

C'est ce qui a lieu seulement pour l'ensemble des deux égalités

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$2\cos C = \frac{n+4}{n+1},$$

car l'équation

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+4}{n+1}$$

se réduit à $n = 5$.

On a donc la relation

$$A = 2C.$$

2215.

(1914, p. 96.)

Les tangentes communes intérieures à trois cercles d'un même plan, pris deux à deux, sont tangentes à une conique homofocale à une conique inscrite au triangle qui a pour sommets les centres des trois cercles.

THIÉ.

SOLUTION.

Par Mlle Anne DE PRÉHYR.

Soient S_1, S_2, S_3 les centres de similitude interne des circonférences O_1, O_2, O_3 prises deux à deux.

Les droites O_1S_1, O_2S_2, O_3S_3 étant concourantes, il existe une conique γ inscrite à $O_1O_2O_3$ et circonscrite à $S_1S_2S_3$.

Soit a une des tangentes communes intérieures à O_2 et O_3; a passe par S_1 et il existe une conique γ' homofocale à γ et tangente à a.

On sait que les tangentes à γ' par S_1 et S_2 définissent un quadrilatère circonscriptible à un cercle de centre O_3 (Chasles); mais a est une de ces tangentes, et ce cercle est le centre donné en O_3.

Les tangentes déjà menées par S_2 permettent de remplacer S_1 par S_2 sans que γ' change; on pourra ensuite remplacer S_2 par S_3, et ainsi γ' répond à la question.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2216.

(1914, p. 96.)

On sait que l'on appelle anneau *le volume engendré par le segment compris entre un arc de courbe* AB *et sa corde, tournant autour d'un axe* X *situé dans son plan et ne le rencontrant pas; la distance des projections orthogonales* *des points* A *et* B *sur l'axe* X *est la hauteur de cet anneau. Démontrer que, si l'arc* AB *appartient à une conique admettant* X *comme axe de symétrie, le centre de gravité de l'anneau est le milieu de sa hauteur.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION.

Par Mlle Anne DE PRÉHYR.

Le calcul suivant prouve que le théorème de M. d'Ocagne reste vrai quand on remplace la droite AB par un arc de conique dont l'axe X est aussi un axe de symétrie.

La question revient à démontrer qu'avec

$$Y^2 = ax^2 + bx + c,$$

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta x + c$$

et

$$Y_1 = y_1 \qquad (\text{pour } x = x_1),$$

on a

$$2\int_0^{x_1} x(Y^2 - y^2)\,dx = x_1 \int_0^{x_1} (Y^2 - y^2)\,dx$$

ou encore

$$(1) \qquad \int_0^{x_1} (2x - x_1)(Y^2 - y^2)\,dx = 0.$$

On a successivement

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(a - \alpha)x^2\,dx = \frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^4,$$

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(b - \beta)x\,dx = \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3.$$

Le premier membre de la formule (1) est donc égal à

$$\frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^4 + \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3 = \frac{1}{6}(Y_1 - y_1)x_1^2 = 0.$$

C. Q. F. T.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

A NOS COLLABORATEURS.

En publiant ce dernier numéro de l'année 1914, avec un retard considérable qui s'explique par les circonstances actuelles, nous avons le devoir de répondre à plusieurs de nos correspondants, et de fournir en même temps à tous nos lecteurs des explications d'une entière clarté.

Quelques-uns se sont demandé si le journal n'allait pas cesser de paraître, au moins pendant un certain temps. D'autres émettent des doutes sur la possibilité de maintenir à chacun de nos fascicules son étendue normale de 48 pages. Tous nous expriment des vœux, dont nous les remercions, pour la continuation régulière d'une Revue qui a pris une place importante dans l'enseignement mathématique de notre pays, et qui est connue et appréciée dans le monde entier.

Qu'on se rassure. Les difficultés de l'heure présente sont grandes, mais non pas insurmontables. Nous avons pu terminer l'année 1914 en publiant deux numéros doubles de 96 pages chacun. En 1915, nous reprendrons notre tradition des numéros mensuels, et en essayant de regagner le temps perdu. Une seule question se pose : la Rédaction sera-t-elle assez alimentée pour que les numéros ne subissent pas une réduction et que nous puissions les maintenir à 48 pages ?

La réponse dépendra surtout de nos collaborateurs.

Beaucoup d'entre eux, en ce moment, sont appelés à concourir à l'œuvre de la défense nationale, et il ne leur reste guère de loisir pour se livrer à des spéculations purement scientifiques. Mais d'autres, en grand nombre, ont la possibilité de continuer à nous apporter leur concours, et nous les adjurons de ne pas manquer de le faire.

Les *Nouvelles Annales*, fondées en 1842, comptent une existence qui comprend près de trois quarts de siècle. Il y a bientôt cinquante ans, elles ont heureusement traversé la terrible crise de 1870. Les heures tragiques que nous vivons aujourd'hui ne doivent pas les atteindre davantage. Dans leur modeste sphère d'action, elles contribuent pour leur part au bon renom de la France en matière scientifique.

En adressant cet appel à nos collaborateurs, compatriotes et étrangers amis de notre pays, qui ont depuis longtemps montré l'intérêt qu'ils portent à ce journal, nous avons l'assurance qu'il sera entendu, et nous leur en exprimons dès à présent notre gratitude. Qu'ils n'hésitent donc pas à nous envoyer leurs travaux, le plus tôt qu'il leur sera possible, de telle sorte que nous arrivions, dans un délai pas trop éloigné, à reprendre, sans irrégularités ni retards, le cours de notre publication.

La Rédaction.

[R8aα]

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (CAS GÉNÉRAL);

PAR M. OBRECHT,

Professeur à l'Université de Santiago (Chili).

Soient : O le point fixe; A, B, C les moments principaux d'inertie en O; ω l'axe de la rotation instantanée; p, q, r ses projections sur les axes principaux d'inertie ; G l'axe du couple résultant des quantités de mouvement; E l'axe du couple résultant des forces extérieures, au point O; H la force vive du solide et $OM = \rho$ le rayon vecteur de l'ellipsoïde d'inertie, dirigé suivant ω.

On sait que les projections de G sur les axes principaux d'inertie sont Ap, Bq, Cr et que la force vive est

$$H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

On a aussi la relation

$$\frac{1}{\rho} = \omega\sqrt{H}.$$

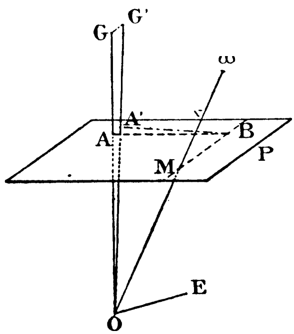
On sait, en outre, que le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie, au point M, est perpendiculaire à G. Soit h la distance de O à ce plan; on a

$$h = \frac{\rho H}{\omega G} = \frac{\sqrt{H}}{G}.$$

On déduit de cette équation

$$(1) \qquad dh = \frac{dH}{2G\sqrt{H}} - \frac{\sqrt{H}\,dG}{G^2}.$$

Dans la figure ci-dessous, P est le plan tangent à l'ellipsoïde en M; OC, OC' sont les axes du couple résultant des quantités de mouvement aux instants t et



$t+dt$; OE est l'axe du couple résultant des forces extérieures; AB est la trace du plan GOE sur le plan P, et MB est une perpendiculaire à cette trace, dans le plan P.

Comme la vitesse de G est égale à E, G' est parallèle à OE et l'on a $GG' = E\,dt$. Soit $GOG' = d\varepsilon$; on déduit de la figure

$$(2) \qquad \begin{cases} dG = E\,dt\cos(E, G), \\ G\,d\varepsilon = E\,dt\sin(E, G). \end{cases}$$

Pour calculer dH, il suffit d'observer que $\frac{1}{2}dH$ est égal au travail des forces extérieures pendant le temps dt; ce travail est égal au produit de l'angle de rotation, $\omega\,dt$, par la somme des moments des forces par rapport à l'axe ω, et cette dernière somme est égale à la projection de OE sur Oω. On a donc

$$\tfrac{1}{2}\,d\mathrm{H} = \omega\,dt\,\mathrm{E}\cos(\mathrm{E}, \omega).$$

Il résulte de là, d'après (1),

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\mathrm{E}\,dt}{\mathrm{G}}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\mathrm{H}}}\cos(\mathrm{E}, \omega) - \frac{\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{G}}\cos(\mathrm{E}, \mathrm{G})\right] \\ &= \frac{\mathrm{E}\,dt}{\mathrm{G}}\,[\rho\cos(\mathrm{E}, \omega) - h\cos(\mathrm{E}, \mathrm{G})]. \end{aligned}$$

Or on déduit de la figure

$$\rho\cos(\mathrm{E}, \omega) = \mathrm{H}\cos(\mathrm{G}, \mathrm{E}) + \mathrm{AB}\sin(\mathrm{G}, \mathrm{E}).$$

Donc

$$dh = \frac{\mathrm{E}\,dt}{\mathrm{G}}\,\mathrm{AB}\sin(\mathrm{G}, \mathrm{E}),$$

ou bien, d'après la seconde équation (1),

$$dh = \mathrm{AB}.dc.$$

Soit BA$'$ une perpendiculaire à OG$'$. La figure montre que OA$'$ représente la distance $h + dh$.

Or la position du plan P, à l'instant $t + dt$, est perpendiculaire sur OG$'$; donc cette position coupe la première suivant MB.

Il résulte de là que *le solide a un mouvement élémentaire de Poinsot, par rapport au plan* P *et que ce plan roule, en même temps, sur l'ellipsoïde d'inertie, en restant perpendiculaire à* G.

Le plan P reste invariable lorsque $\mathrm{E} = 0$ — c'est le cas interprété par Poinsot — et aussi lorsque E a la direction de G.

Cette interprétation permet de simplifier la théorie du mouvement d'un solide autour d'un axe très voisin de l'axe principal, maximum ou minimum, et, en particulier, la théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

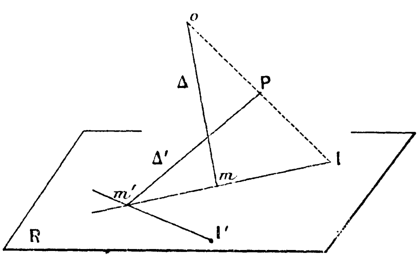
[L^2 8a]

SUR LES NORMALES A UNE QUADRIQUE;

PAR M. J. LEMAIRE.

Chasles a remarqué que l'hyperbole d'Apollonius relative à une conique et à un point est le lieu des points communs aux diamètres de cette conique et aux perpendiculaires menées du point considéré sur les directions conjuguées; on peut donner un mode de génération analogue pour la cubique aux pieds des normales à une quadrique S issues d'un point P.

Soient Δ un diamètre quelconque de la quadrique S que nous supposons posséder un centre O à distance



finie, Δ' la perpendiculaire menée de P sur le plan diamétral conjugué de Δ : cherchons le lieu des points communs à celles des droites correspondantes Δ et Δ' qui se rencontrent.

A quatre droites Δ en même plan correspondent quatre droites Δ' en même plan, et réciproquement, et les deux faisceaux ont même rapport anharmonique. Par conséquent les traces m, m' de Δ', sur un même plan R, sont des points homologues de deux figures homographiques (m) et (m').

Pour que Δ et Δ' se coupent, il faut et il suffit que m et m' soient en ligne droite avec la trace I de OP sur le plan R; soit I' l'homologue, dans la figure (m'), du point I considéré comme appartenant à la figure (m) : Im et I'm' sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques; le lieu des points m' pour lesquels mm' passe en I est donc une conique passant par I et I'. Le lieu correspondant de Δ' est un cône du second degré passant par OP; le lieu de Δ est aussi un cône du second degré contenant OP : par suite, le lieu du point commun aux droites Δ et Δ' qui se coupent est la courbe commune à ces deux cônes, c'est-à-dire une cubique gauche passant en O et P. Cette cubique passe aussi évidemment aux pieds des normales menées de P à S, et aux points à l'infini sur les axes de la quadrique : *c'est la cubique équilatère aux pieds des normales*.

Ce mode de génération montrant que cette cubique ne change pas si l'on remplace S par une surface homothétique et concentrique, on en conclut que les normales issues d'un point P, à des quadriques homothétiques et concentriques, forment un cône du second degré contenant la droite qui joint P au centre des quadriques et les parallèles menées par P à leurs axes, et que les pieds de ces normales appartiennent à une même cubique gauche.

[M^{4}b]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CHAINETTE;

PAR M^{lle} ANNE DE PRÉHYR.

On considère un cylindre circulaire γ et une sphère σ dont le centre O est sur l'axe z du cylindre; une ligne l tracée sur le cylindre est l'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à la sphère suivant la ligne l'. On se propose de déterminer les lignes l et l'.

Soient A un point quelconque de la ligne l; B le point correspondant de l', c'est-à-dire le point où la tangente à l en A rencontre l', ou encore, le point où la tangente à l en A est tangente à la sphère σ; α le plan perpendiculaire à z en O; C le pied de la génératrice AC de γ sur le plan α; D et E les points où α coupe la droite AB et la tangente à l' en B.

La droite OC est perpendiculaire au plan ABC qui est tangent à γ suivant AC; la droite OB est perpendiculaire à la droite AB qui est tangente à σ en B; la droite CB et le plan OBC sont perpendiculaires à la droite AB et le triangle rectangle COB ($C = 90^\circ$) est invariable. Donc, si le plan ACB roule sur le cylindre γ, le lieu de A dans ce plan est une chaînette et le lieu de B la tractrice développante de cette chaînette. La droite CD est l'asymptote de la tractrice, et ainsi la chaînette est déterminée; la distance de son sommet à la droite CD est la longueur du segment rectiligne CB.

Le plan ACB coupe la sphère suivant un petit cercle ω de rayon CB; quand le plan roule sur γ et qu'en même temps on imagine que les lignes l et l' tournent autour de z, les positions successives du petit cercle ω et de la ligne l' forment un réseau conjugué sur la sphère σ. La droite AB est normale à la ligne l' en A et ainsi la ligne l est encore une développée de la ligne l', comme la chaînette est une développée de la tractrice. La tangente à l' en B, étant normale à AB, est dans le plan OBC; le point E est sur OC et le lieu de ce point est une circonférence de centre O; on voit ainsi que la longueur du segment BE de la tangente à la ligne l' est constante; il en est de même de la longueur de l'arc du grand cercle à l' entre le point B et le plan α.

Le plan OBA est le plan normal à l' en B et le plan rectifiant de l en A; la droite OA est la droite polaire de l' en B et la droite rectifiante de l en A; le centre de courbure de l' en B est la projection F de B sur OA; le lieu de E est la courbe inverse de l pour le point O et la puissance $\overline{OB}^2$.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1914.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

PAR M. C. CLAPIER

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, on considère l'équation aux différentielles totales

$$a^2y^2\,dx + (z - a^3y^3)\,dy - y\,dz = 0 \tag{1}$$

où a désigne une constante donnée.

I. *Déterminer les surfaces intégrales de l'équation* (1). *Ces surfaces* S *sont réglées; étudier leurs lignes de striction et leurs lignes asymptotiques.*

Exprimer, pour chaque ligne asymptotique d'une surface S, *la torsion en fonction de l'angle de la binormale avec l'axe* Oz.

II. *Les surfaces* S *satisfont toutes à une même équation aux dérivées partielles du premier ordre* (E), *indépendante de la valeur numérique de la constante* a. *Indiquer comment on peut, au moyen des surfaces* S, *engendrer toutes les surfaces intégrales* Σ *de cette équation.*

Les surfaces Σ *contiennent en général l'axe* Oz; *déterminer les surfaces exceptionnelles qui ne le contiennent pas, et indiquer leur nature.*

III. *Démontrer que les courbes caractéristiques de l'équation* (E) *sont les asymptotiques des différentes surfaces* S, *et qu'elles forment l'une des familles d'asymptotiques des surfaces* Σ. *Démontrer qu'elles peuvent être obtenues comme courbes de contact des surfaces* Σ *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Oz *rencontrant* Ox.

IV. *Déterminer la seconde famille de lignes asymptotiques des surfaces* Σ. *Démontrer que les courbes de cette seconde famille peuvent être obtenues comme courbes de contact des surfaces* Σ *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Ox *rencontrant* Oz. *Déterminer les surfaces réglées* Σ *distinctes des surfaces* S. *Indiquer leur valeur.*

V. *Soit* T *une surface jouissant de la propriété* *que l'une de ses familles de lignes asymptotiques est formée de courbes de contact de* T *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Ox *rencontrant* Oz. *Démontrer que la surface* T, *ou bien est une surface réglée à plan directeur parallèle au plan* yOz, *ou bien satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme*

$$\text{(E)} \qquad F(z - qy, py) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Démontrer que, dans le second cas, les lignes asymptotiques de l'autre famille sont des caractéristiques de l'équation (E), *à laquelle satisfait la surface* T, *et que ces lignes peuvent être obtenues comme courbes de contat de surface* T *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Oz *rencontrant* Ox.

Si deux surfaces, dont chacune satisfait à une équation de la forme (E), *sont tangentes en un point, elles ont en ce point même courbure totale.*

I. L'équation différentielle

$$(1) \qquad a^2 y^2\, dx + (z - a^3 y^3)\, dy - y\, dz = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$a^2 y^2 (dx - a y\, dy) + z\, dy - y\, dz = 0.$$

En divisant par y^2, elle se compose de deux termes intégrables; et si nous désignons par A une constante arbitraire, nous avons, en effectuant l'intégration et multipliant par y,

$$(2) \qquad z = Ay + a^2 xy - \frac{a^3 y^3}{2}.$$

C'est l'équation des surfaces intégrales S; ce sont des surfaces du troisième degré, engendrées par les droites dont les équations s'écrivent avec le paramètre variable

$$(3) \qquad \begin{cases} y = t, \\ z = a^2 t x + \mathrm{A} t - \dfrac{a^3 t^3}{2}. \end{cases}$$

Ces droites étant parallèles au plan des zx, deux droites voisines ont une perpendiculaire commune normale à ce plan, et la courbe enveloppe des droites représentées par la seconde équation (3) est la projection de la ligne de striction sur le plan des zx. On aura donc, pour tous les points de cette ligne,

$$\frac{3 a^3 t^2}{2} = a^2 x + \mathrm{A}.$$

Comme $y = t$, le cylindre projetant la ligne de striction de la surface S aura pour équation

$$(4) \qquad x = \frac{3a}{2} y^2 + \text{const.}$$

Cherchons les lignes asymptotiques de cette même surface, représentée par l'équation (2); nous avons, avec les notations habituelles,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a^2 y,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{A} + a^2 x - \frac{3 a^3 y^2}{2}.$$

Formons la condition $dp\,dx + dq\,dy = 0$; nous obtenons, après suppression du facteur dy qui correspond aux droites génératrices, l'équation différentielle

$$2\,dx - 3 a y\,dy = 0$$

qui, intégrée, nous donne les cylindres paraboliques

$$(5) \qquad x = \frac{3a}{4} y^2 + \text{const.}$$

Les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy, suivant des paraboles de même paramètre $2p$, se déduisant de l'une d'elles par une translation continue parallèle à Ox. Il en est de même des paraboles projections des lignes de striction (4), dont le paramètre est

$$p = \frac{1}{3a}.$$

La torsion d'une courbe étant donnée par la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{-\Delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

si nous l'appliquons à une ligne asymptotique définie par les équations

$$x = \frac{3a}{4}y^2 + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.}).$$

$$y = t,$$

$$z = (A + a^2\alpha)\varphi + \frac{a^3}{4}y^3,$$

nous obtenons facilement

$$\Delta = -\frac{9}{4}a^4, \qquad C = -\frac{3}{2}a.$$

Si l'on désigne par φ l'angle de la binormale avec l'axe des z, nous avons

$$\cos\varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{T} = -\frac{\Delta}{C^2}\cos^2\varphi = a^2\cos^2\varphi.$$

II. Les surfaces S, envisagées comme dépendant de deux constantes arbitraires A et a, satisfont à une équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant ces constantes entre l'équation (2) et celles qui donnent les valeurs de p et q, déjà écrites. L'élimination se fait simplement en formant $z+px-qy$, et l'on trouve l'équation

$$(z-qy)-(py)^{\frac{3}{2}}=0. \tag{6}$$

C'est l'équation (E) dont les surfaces S sont des intégrales complètes.

Pour avoir les surfaces Σ, il suffit de prendre l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par l'équation (2), avec A et a comme constantes arbitraires.

Posons $A=\varphi(a)$; les surfaces Σ' correspondantes seront données par l'élimination de a entre les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} z &= \varphi(a)y+a^2xy-\frac{a^3y^3}{2},\\ 0 &= \varphi'(a)\ +2ax-\frac{3a^2}{2}y^2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si l'on suppose $\varphi(a)=ca^2+b$, b et c étant deux nouvelles constantes, nous obtenons, par l'élimination de a, les surfaces

$$z=by+\frac{16}{27}\left(\frac{x+c}{y}\right)^3 \tag{8}$$

qui représentent une nouvelle série d'intégrales complètes. Ces surfaces sont réglées et engendrées par deux plans variables dont l'un tourne autour d'une parallèle à l'axe des z du plan des xz, tandis que l'autre reste parallèle à un plan fixe. Ces surfaces particulières ne passent pas par l'axe des x; ce sont des conoïdes. Si l'on envisage $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$, dans les équations (7), comme deux constantes arbitraires A et B, le complexe des caractéristiques qui engendrent les surfaces Σ est défini par les équations

$$(9)\qquad \begin{cases} z = \mathrm{A}y + a^2 xy - \dfrac{a^3 y^3}{2}, \\ \mathrm{o} = \mathrm{B}y + 2ax - \dfrac{3a^2}{2}y^3, \end{cases}$$

avec les trois constantes paramétriques A, B et a. Or la seconde de ces équations, divisée par $2a$, est identique à l'équation (5) qui détermine les lignes asymptotiques des surfaces S, définies par la première équation (9).

Les autres propriétés des surfaces Σ, que l'on propose de démontrer dans les paragraphes III et IV, résultent des propriétés plus générales des surfaces T, considérées dans la cinquième partie du problème. Elles proviennent de la forme de leur équation aux dérivées partielles (6) qui a bien la forme

$$\mathrm{F}(z - qy, py) = \mathrm{o}.$$

V. Considérons les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à Ox rencontrant Oz ; leur équation peut s'écrire

$$(10)\qquad z = h + y\,\varphi(x).$$

Une surface T étant l'enveloppe d'une famille de ces conoïdes, on aura, pour tous les points d'une même courbe de contact, les mêmes valeurs de p et q pour la surface et pour le conoïde

$$(11)\qquad \begin{cases} p = y\,\varphi'(x) \\ q = \varphi(x) \end{cases} \qquad (dz = p\,dx + q\,dy).$$

Si nous voulons de plus que cette famille de courbes de contact soit, sur la surface T, une famille (A) de courbes asymptotiques, nous devrons avoir

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

ce qui donne les deux relations

$$dx = 0 \qquad \text{et} \qquad y\,\varphi''(x)\,dx + 2\,\varphi'(x)\,dy = 0.$$

La première nous donne la courbe

$$\begin{aligned} x &= k, \\ z &= h + y\,\varphi(x), \end{aligned}$$

qui contient les deux arbitraires h et k; elle engendre une surface réglée à plan directeur parallèle au plan yOz. La seconde relation différentielle peut s'écrire

$$2\frac{dy}{y} + \frac{d.\varphi'}{\varphi''} = 0$$

et, en intégrant, on trouve que les courbes (A) situées sur les conoïdes (10) doivent satisfaire à la relation

$$y^2 + \varphi'(x) = k.$$

En portant dans les égalités (11), on voit que les coefficients directeurs p et q du plan tangent à une surface T doivent satisfaire aux conditions

$$(12)\quad (\text{A}) \qquad p = \frac{k}{y}, \qquad q = \frac{z-h}{y},$$

h et k étant deux constantes arbitraires.

On aura une surface T en établissant une relation entre ces deux constantes

$$h = z - qy, \qquad k = py.$$

Cette surface satisfait donc à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(\text{E}) \qquad \text{F}(z - qy,\, py) = 0.$$

Formons les équations différentielles qui déterminent les caractéristiques de cette équation ; nous avons

$$\frac{dx}{y F_1} = \frac{dy}{-y F_2} = \frac{dp}{-p F_2} = \frac{dq}{-p F_1},$$

d'où l'on déduit les deux relations

$$(13) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dq}{-p}.$$

Elles vérifient la relation

$$dp\, dx + dq\, dy = 0,$$

ce qui prouve que ces caractéristiques constituent une des familles de lignes asymptotiques de la surface T. Ce n'est point celle d'où l'on est parti (A), car elle satisfait aux intégrales

$$(14) \quad (A_1) \qquad p = k_1 y, \qquad q = -k_1 x + p_1$$

différentes des intégrales (12).

Montrons que ces courbes (A_1) peuvent être obtenues comme courbes de contact de la surface T avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à Oz rencontrant Ox.

Nous pouvons écrire l'équation de ces conoïdes sous la forme

$$z = f\left(\frac{x - x_0}{y}\right), \qquad u = \frac{x - x_0}{y};$$

on en déduit

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{1}{y} f'(u), \\ q &= \frac{x_0 - x}{y^2} f'(u). \end{aligned} \right.$$

Formant $dp\, dx + dq\, dy = 0$, on trouve, après suppression du facteur $y\, dz + (x_0 - x)\, dy$, la relation différentielle

$$f''(u)\,dx = 2\,f'(u)\,dy,$$

et comme

$$\frac{d.f'(u)}{dx} = f''(u)\frac{1}{y},$$

il vient

$$\frac{d.f'(u)}{f'(u)} = 2\frac{dy}{y}.$$

On a donc, en intégrant,

$$f'(u) = \text{const.}\,y^2.$$

Les égalités (15) nous donnent, par suite, les expressions

$$\begin{aligned} p &= \quad k_1 y, \\ q &= -k_1 x + h_1, \end{aligned}$$

en désignant par k_1 et h_1 deux nouvelles constantes arbitraires. Ces expressions étant identiques aux intégrales (14), la proposition est démontrée.

Soient deux surfaces T et T_1, tangentes en un point $M(x, y, z, p, q)$, telles que chacune satisfait à une équation de la forme (E); je dis qu'elles ont même courbure totale en ce point M.

Il suffit de montrer que la courbure totale de la surface T qui est donnée par la formule

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

ne dépend que du point considéré et du plan tangent en ce point.

Or, nous pouvons écrire l'équation aux dérivées partielles (E) sous la forme

$$z = qy + f(p, y),$$

d'où l'on déduit les dérivées secondes en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à y :

$$p = sy + yrf'(py),$$
$$o = ty + (p + ys)f'(py).$$

D'où, en éliminant $f'(py)$, on obtient

$$\frac{p - sy}{ty} + \frac{xy}{p + sy} = o,$$
$$rt - s^2 = -\frac{p^2}{y^2}.$$

La courbure totale est donc

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\left[\frac{p}{y(1 + p^2 + q^2)}\right]^2;$$

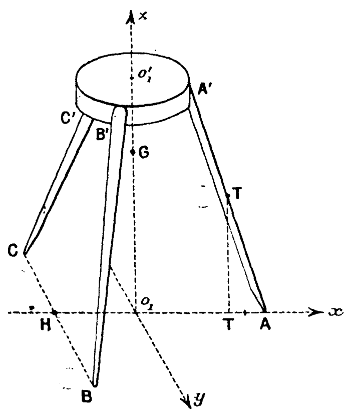
elle est négative et indépendante des éléments du *deuxième ordre*.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1914).

Composition sur la Mécanique.

Un tabouret est porté par trois pieds identiques AA′, BB′, CC′, *également inclinés sur la verticale et terminés par des surfaces très petites qu'on assimilera à trois points* A, B, C. *Le tabouret est homogène et symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par l'axe* $O_1O'_1$ *du tabouret et par l'un des trois points* A, B, C. *A l'instant initial, ce tabouret est en équilibre, ses trois pieds reposant en* A, B, C, *sur le sol horizontal* *supposé assez uni pour qu'on puisse négliger le frottement.*

PROBLÈME. — 1° *En un point* T *du montant* AA′ *situé dans le plan vertical de symétrie* $O_1O'_1A$ *on*



exerce une force F. *A quelles conditions devra satisfaire* F *pour que l'équilibre primitif subsiste.*

2° *Au lieu de la force* F, *on applique une percussion* $\mathfrak{P}$ *au même point* T. *Déterminer la distribution des vitesses dans le tabouret à l'instant qui suit immédiatement la percussion. On portera son attention sur la discussion des résultats suivant la direction, la grandeur de la percussion* $\mathfrak{P}$ *et la position de son point d'application* T. *On pourra se borner aux trois cas suivants :*

I. *Le point* T *est dans le plan horizontal du centre de gravité* G *du tabouret;*

II. *La percussion* $\mathfrak{P}$ *est parallèle à* BC;

III. *La percussion* $\mathfrak{P}$ *est dans le plan de symétrie vertical* $O_1O'_1A$.

3° *On appliquera les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de* $\mathfrak{P}$:

I. *Passe par le point* O_1, *la percussion étant ascendante ;*

II. *Passe par le symétrique de* O_1, *par rapport à* A, *la percussion étant descendante, le point* T *étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité* G *et sa projection* T_1 *sur* AO_1 *divisant* AO_1 *dans le rapport*

$$\frac{T_1A}{O_1T_1} = \frac{1}{3};$$

III. *Est parallèle à* AO_1 *et de même sens, le point* T *étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité* G.

4° *Dans ce dernier cas* (3°, III) *on étudiera le mouvement du tabouret après la percussion, on calculera la réaction et l'on discutera les résultats obtenus suivant les valeurs de la percussion.*

Notations. — *Le triangle* ABC *est équilatéral.*

On appellera H *le milieu de* BC, O_1 *le centre du triangle,* G *le centre de gravité du tabouret situé sur l'axe* $O_1O'_1$.

On posera

$$BC = 2a, \qquad O_1A = 2b(a = b\sqrt{3}), \qquad h = O_1G,$$

$$\rho = AG(\rho = \sqrt{h^2 + 4b^2}), \qquad \Psi = \widehat{O_1AG}(h = 2b\operatorname{tang}\Psi).$$

On appellera M *la masse du tabouret,* I, J, K *ses moments d'inertie par rapport à trois axes passant par* G *et parrallèles respectivement à* O_1A, BC *et* $O_1O'_1$.

On prendra pour axes fixes trois axes rectangu-

laires coïncidant à l'instant initial avec O_1A, *la parallèle à* CB *menée par* O_1 *et* $O_1O'_1$, *les sens positifs comme les indiquent les flèches sur la figure.*

On définira la distribution des vitesses dans le tabouret par les projections ξ, η, ζ; p, q, r, *de la vitesse de* G *et de la vitesse angulaire instantanée de rotation sur des axes mobiles liés au corps et coïncidant avec* O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 *à l'instant initial.*

On appellera (α, o, γ) *les coordonnées initiales du point* T.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégration des équations linéaires d'ordre supérieur au premier à coefficients variables.*

Problème. — *La normale* M P *en un point* M *d'une surface rencontre le plan* xOy *en* P.

1° *Déterminer les surfaces telles que* $MP = OP$.

2° *Lignes de courbure de ces surfaces.*

3° *Montrer que si l'on choisit une surface particulière, le point* P *décrit une courbe du plan des* xy.

Déterminer la surface de façon que cette course ait pour équation

$$x = Ly.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y(3x^2 + y^2) - 2x^3y' = 0.$$

Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales. (Novembre 1913.)

Besançon.

Épreuve théorique. — I. 1° M *étant un point d'une surface, établir l'équation aux dérivées partielles qui exprime que le plan* MOZ *fait avec le plan* xOz *et avec le plan tangent en* M *des angles complémentaires :*

2° *Démontrer que les caractéristiques de cette équation sont les lignes de courbure des surfaces intégrales. Donner une détermination géométrique des deux systèmes de lignes de courbure.*

3° *Vérifier qu'on peut prendre comme intégrale complète une surface du second degré ayant pour équation*

$$2xz = Ax^2 + A'y^2 + 2cx.$$

Préciser la nature de cette surface.

4° *En déduire l'intégrale générale qui passe par la droite*

$$x = 2a, \qquad z = 0.$$

Achever pour cette surface la détermination des lignes de courbure.

II. *Intégrer l'équation*

$$y = xy'^2 + \frac{2y' - 1}{(y' - 1)^2},$$

et rechercher s'il existe des solutions singulières.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^3 - x^2 - 3x + 1}{(x+1)^2} e^{-x}\, dx.$$

Sous quelles conditions l'intégrale

$$\int \frac{ax + b}{(x+1)^2} e^{-x}\, dx$$

est-elle calculable en termes finis? (Juillet 1913.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Définir les caractéristiques pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire de la forme*

$$Ap + Bq = C,$$

où A, B, C *sont des fonctions données de* x, y, z.

Exposer la théorie de l'intégration de cette équation.

Comme exemple, intégrer l'équation

$$xp + 3yq = \frac{4y^2}{x^2}.$$

Chercher les surfaces intégrales de cette équation sur lesquelles les caractéristiques sont des lignes asymptotiques

Plus généralement on considère l'équation

$$xp + 3yq = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ *est une fonction donnée de* x *et* y. *A quelle condition doit satisfaire* f *pour que cette dernière équation admette une famille de surfaces intégrales, dépendant d'un paramètre variable et telles que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques pour ces surfaces. Montrer que, si la condition est remplie, la famille de surfaces s'obtiendra par des quadratures.*

Épreuve pratique. — *On donne trois axes* Ox, Oy, Oz *et l'on désigne par* a *une longueur donnée. On considère la surface conique ayant pour sommet le point* S *de coordonnées* (O, O, a) *et pour directrice la parabole*

$$y^2 - 2ax = 0.$$

M *désignant un point de la parabole, calculer l'aire* A *de la surface conique comprise entre l'arc* OM *de la parabole et les génératrices* SO *et* SM. *En désignant par* θ *l'angle que fait* OM *avec* Oy, *calculer, à l'aide des tables, la plus petite valeur de* θ *pour laquelle l'aire* A *est égale à la moitié du carré construit sur l'ordonnée* y *du point* M.

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Définir le rayon de convergence d'une série procédant suivant les puissances entières croissantes et positives de la variable ; énoncer et démontrer le théorème fondamental sur lequel repose cette définition.*

On pose

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad \ldots, \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

déterminer le rayon de convergence de la série

$$a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

II. *Déterminer la fonction* U *du paramètre* u *de façon que la famille de courbes gauches*

$$x = \frac{1 - 2au}{U + a}, \qquad y = \frac{u - \dfrac{au^2}{2}}{U + a}, \qquad z = \frac{a}{U + a},$$

a étant une constante arbitraire, ait, d'une façon effective, une courbe enveloppe. (Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — I. *En supposant que la variable z a sa partie réelle positive, montrer que la fraction rationnelle*

$$\frac{z(z+2)}{z+1}$$

a un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{e^{-\frac{z(z+2)}{z+1}}}{1 + z^4} dz$$

prise le long du contour fermé limité par le demi-cercle R *ayant l'origine pour centre et situé du côté des x positifs. Quelle sera la valeur de l'intégrale précédente prise le long de l'axe des y de $-\infty$ à $+\infty$? En séparant, dans cette dernière intégrale, la partie réelle et la partie imaginaire, quelles sont les deux intégrales réelles dont on obtient les valeurs ?*

II. *On considère la congruence de cercles*

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - (b - a^2)a^2 y - b = 0,$$
$$x + 2(b - a^2)ay + 2a = 0.$$

Déterminer b en fonction de a de façon que la surface engendrée par les cercles C de la famille ainsi constituée admette ces cercles C comme lignes de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface conoïde* S *engendrée par une droite qui reste parallèle au plan des xy et s'appuie sur l'axe des z et sur la courbe $x = a$, $z^2(y^2 + a^2) = a^4$* (coordonnées rectangulaires). *Calculer l'aire de la portion de* S *qui se trouve du côté des z positifs et des x positifs et qui est intérieure au cylindre $x^2 + y^2 - ay = 0$* (a désigne une longueur donnée).

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante de convergence d'un produit infini est que la série formée par les logarithmes des facteurs du produit infini soit convergente pour des déterminations convenablement choisies de ces logarithmes.*

II. *On pose*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right),$$

où a est une constante donnée de module supérieur à 1. *Indiquer si ce produit est convergent pour toute valeur de z. Montrer que le quotient*

$$\frac{f(az)}{f(z)}$$

se réduit à une expression très simple. Utiliser ce résultat pour calculer les coefficients du développement de $f(z)$. Existe-t-il des fonctions entières de z, autres que $f(z)$, telles que l'on ait identiquement

$$\frac{g(az)}{g(z)} = \frac{f(az)}{f(z)},$$

III. *Ramener géométriquement à un problème comme la recherche des courbes* C (autres que des lignes droites) *dont toutes les tangentes sont normales à une surface donnée* S. *Cas où la surface* S *est enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Cas où* S *admet une double génération comme enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Cas où* S *est une surface développable.*

Sur une surface développable Σ *on trace une ligne de courbure* Γ *et l'on considère la surface* S *enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit* Γ. *Définir les courbes* C *relatives à la surface* S *au moyen de la courbe* Γ *et montrer qu'on les obtient sans aucune intégration à effectuer.*

Épreuve pratique. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(13 + 5\cos x)^3}.$$

(Novembre 1913.)

Dijon.

Épreuve écrite. — *Déterminer les lignes géodésiques de l'hélicoïde à plan directeur.*

Épreuve pratique. — *On considère, en axes rectangulaires, l'hélicoïde*

$$z \text{ arc tang } \frac{y}{x}.$$

Évaluer, à $\frac{1}{100}$ *près, l'aire de la portion de cette surface comprise entre les plans* $z = 0$, $z = 2\pi$, *et à l'intérieur du cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon égal à*

$$\frac{e^2 - 1}{2e}, \qquad e = 2,7182818.$$

(Juillet 1911.)

Première question. — *Déterminer* λ *de manière que l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda y$$

soit vérifiée par la fonction

$$y = \sqrt{x}.$$

Cela étant, achever l'intégration de cette équation.

Deuxième question. — *Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes planes*

$$(x^2 + y^2)^2 - \lambda xy = 0$$

(les coordonnées sont rectangulaires.)

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — *On considère, en coordonnées rectangulaires, le cylindre*

$$y = ax^n,$$

a et n étant constants; trouver sur ce cylindre une courbe C *telle que,* M *étant un point quelconque de* C, P *la projection orthogonale de* M *sur l'axe* Oz, Q *la projection orthogonale de* M *sur le plan* xOy, H *le symétrique de* P *par rapport à* Q, *le plan osculateur en* M *à* C *passe par* H. *Discuter le résultat au point de vue de la réalité des courbes. Dire si la courbe* C *peut être une cubique gauche.*

Deuxième question. — *Évaluer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x \, dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}$$

en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale complexe

$$\int \frac{e^{3iz} \, dz}{(z^2+1)^2(z^2+2)}$$

prise sur un contour convenable

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'intégrale double*

$$\mathrm{I} = \int\int |x^m y^p| \, dx \, dy$$

étendue à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

m et p étant entiers positifs.

1° *Démontrer que le calcul de* I *peut toujours être effectué* (en utilisant les différentielles binomes et les fractions rationnelles).

2° *Effectuer le calcul de* I *dans le cas de*

$$m = p = 2.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit, dans un plan, une droite* Ox. *Trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, Q *l'intersection de la tangente en* M *avec* Ox, *on ait constamment* $\overline{\mathrm{OP}}.\overline{\mathrm{PE}} = \overline{\mathrm{PQ}}^2$.

II. *Soit une droite* Ox. *Trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, N *l'intersection de la normale en* M *avec* Ox, C *le centre de courbure en* M; G *la projection de* C *sur* Ox, *on ait*

$$\overline{\mathrm{GN}} = \overline{\mathrm{PM}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Évaluer à* $\frac{1}{10}$ *près l'intégrale double*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{x\sqrt{y}},$$

étendue à la portion d'ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

comprise entre les droites $x = 1$, $x = 2$.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver* (en axes rectangulaires) *la surface* S *la plus générale telle que,* M *étant un point quelconque de* S, P *et* Q *les projections de* M *sur* Ox *et* Oy, A *et* B *les points d'intersection du plan tangent en* M *à* S *avec* Ox *et* Oy, α *et* β *deux nombres donnés, on ait constamment*

$$\alpha \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} + \beta \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = 1.$$

Examiner le cas de $\alpha = 1$ *ou de* $\beta = 1$.

2° *Dans quel cas les courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles qui définit* S *sont-elles des lignes asymptotiques pour* S ? *Dans ce cas, trouver tous les asymptotiques de* S.

3° *Montrer comment on peut déterminer une surface* S *passant par une courbe donnée d'équations*

$$y = \lambda (\lambda > 0), \qquad z = \psi(x).$$

Comme application soit $\alpha = 2$, $\beta = 3$; *trouver la surface* S *passant par*

$$y = 1, \qquad z = x^3$$

ou par

$$y = 1, \qquad z = \sin x.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le paraboloïde de révolution*

$$y^2 + z^2 - 2px = 0$$

et un point A *situé sur la portion négative de l'axe de révolution* Ox. *Évaluer l'intégrale triple*

$$\iiint \frac{dv}{l^3},$$

où l *représente la distance du point* A *à l'élément de volume* dv, *l'intégrale étant étendue au volume compris entre le paraboloïde et un plan parallèle au plan des* yz. *Voir s'il y a une limite pour l'intégrale quand ce plan s'éloigne indéfiniment.* (Juin 1913).

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$y + x = \left(\frac{y' + 1}{y' - 1}\right)^2.$$

Dire s'il y a une solution singulière.

2° *Exposer la notion d'intégrale curviligne.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver trois fonctions m, z, u de x se réduisant à 1 pour $x = 0$ et vérifiant les relations*

$$y' + y + 2u = 0,$$

$$z' - \frac{y}{2} + z = 0,$$

$$u' + \frac{y}{2} + z + 2u = 0.$$

(Novembre 1913.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de Cours. — *Donner la définition d'une fonction intégrale dans un intervalle, et de l'intégrale définie de cette fonction, d'après Riemann.*

Appliquer la définition précédente à la détermination du volume de la pyramide triangulaire, en décomposant ce volume par des plans parallèles à la base, dont les distances au sommet sont en progression géométrique.

Problèmes. — I. *Démontrer que le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à une équation de Clairaut généralisée quelconque, admet les deux mêmes intégrales premières, et que réciproquement, si le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre admet ces deux intégrales premières, cette équation est une équation de Clairaut généralisée.*

II. Ox, Oy, Oz *désignant trois axes rectangulaires, former l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent le rayon vecteur joignant l'origine* O *à un point variable de la surfaee sous un angle constant et donné* α. *Montrer que cette équation admet comme intégrales des surfaces de révolution autour de l'axe* Oz *dépendant d'un paramètre* (on pourra substituer aux deux variables x et y les coordonnées polaires correspondantes.) *Par généralisation, déduire une intégrale complète de l'équation considérée. Que peut-on dire des lignes de courbure des surfaces intégrales?*

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\begin{vmatrix} y^{\text{IV}} & y''' & y'' \\ y''' & y'' & y' \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0,$$

Déterminer tous les polynomes qui sont des intégrales de cette équation. (Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — 1° *Démontrer les formules de Frenet.*

2° *Démontrer que, si le plan osculateur en un point variable d'une courbe passe par un point fixe, cette courbe est plane.*

3° *Étant donnée une équation de Clairaut généralisée*

$$z = px + qy + f(p, q),$$

le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à cette équation admet les deux intégrales particulières

$$p = \text{const.}, \qquad q = \text{const.}$$

En appliquant la méthode à partir de l'une de ces intégrales, obtenir l'intégrale complète classique de l'équation de Clairaut généralisée.

Épreuve pratique. — 1° *Tracer, selon les valeurs des constantes d'intégration, les courbes intégrales de l'équation différentielle*

$$y'' = -\frac{1}{2y^2}.$$

2° *Pour quelles valeurs de l'exposant n l'intégrale* *définie*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\,dx$$

a-t-elle un sens?

Transformer cette intégrale en le produit de la fonction $\frac{1}{\Gamma(n)}$ *et d'une autre intégrale définie, en calculant de deux façons différentes l'intégrale double*

$$\int\int e^{-xy}\sin^2 x y^{n-1}\,dx\,dy,$$

étendue à l'angle du plan des deux variables x et y où ces deux variables sont positives.

Appliquer aux cas :

$$n = 2, \qquad n = \frac{3}{2}.$$

(Novembre 1913.)

Lyon.

1° *Exposer différentes méthodes permettant d'intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\text{(E)} \qquad 2^2 p^3 y^2 + 3^3 q^2 x^3 = 0.$$

2° *Trouver les surfaces intégrales vérifiant* (E) *et contenant la courbe*

$$y + x = 0, \qquad 2z + x^2 = 0.$$

Indiquer autant que possible deux méthodes différentes. Expliquer les résultats obtenus.

3° *Former l'équation différentielle des courbes intégrales. Déterminer ces courbes intégrales.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 32\frac{dy}{dx} + 48y = x e^{-2x} + e^{2x}\cos\left(2x\sqrt{2}\right).$$

(Juillet 1911.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer trois fonctions x', y', z'*

de t par les équations différentielles

$$\frac{dx'}{2y'x'} = \frac{dy'}{y'^2 - x'^2 - z'^2} = \frac{dz'}{2y'z'} = dt,$$

de façon que, pour $t = 0$, *on ait*

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Montrer que la transformation ainsi obtenue

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z, t), \\ y' &= g(x, y, z, t), \\ z' &= h(x, y, z, t), \end{aligned}$$

laisse invariante l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Nota. — *On pourra prendre comme inconnue auxiliaire*

$$\rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

(Novembre 1912.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Résoudre*

$$x^2y'' - (2\beta - 1)xy' + (\beta^2 + 1)y = x \log x \cos \log x,$$

β *étant un paramètre.*

Épreuve pratique. — *Intégrer la différentielle totale*

$$\frac{(y^2 - xy)\,dx + (x^2 - xy)\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Juin 1913.

Épreuve écrite. — *On considère, dans le plan des* xy, *la famille des courbes définies par l'équation à un paramètre*

$$(y - 1)(x + 1) = \lambda(x^2 - y).$$

Former l'équation différentielle, indépendante de λ, *vérifiée par ces courbes. Cette dernière relation est du type de Riccati. En déterminer une intégrale particulière constante, puis l'intégrer complètement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{1,0}^{x,y} \frac{y^2}{x^2} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

prise entre les points de coordonnées (1,0) *et* (x, y).

Expliquer de quelle manière le choix du chemin d'intégration intervient dans le résultat.

(Novembre 1913.)

Nancy.

Question de cours. — I. *Étude d'une fonction de variable complexe définie par une intégrale, la fonction sous le signe* $\int$ *étant uniforme ou à un nombre fini de déterminations.*

On donnera une seule méthode et l'on appliquera aux intégrales :

$$\int_{z_0}^{z} \sqrt{z^3 + 1}\,dz, \qquad \int_{z_0}^{z} \sqrt{z^4 + 1}\,dz.$$

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on désigne par* N *le point où la normale en un point quelconque* M *d'une surface rencontre le plan* xOy, *par* P *la projection du point* M *sur le plan* xOy.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *pour lesquelles l'aire du triangle* PON *est proportionnelle à la cote* PM.

Trouver les caractéristiques; ces courbes ont-elles une propriété commune? Existe-t-il des surfaces orthogonales à ces caractéristiques?

Déterminer les surfaces (S). *Comment peut-on engendrer une surface* S.

2° *Déterminer la développée d'une surface* (S) *quelconque. Montrer que cette développée est une surface* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Trouver les solutions de l'équa-*

tion aux différentielles totales

$$(a^2 - yz)\frac{dx}{x} + (a^2 + xz)\frac{dy}{y} + (y - x)\,dz = 0.$$

2° *On multiplie le premier membre de cette équation par une fonction de x, y, z; choisir cette fonction de façon que le produit soit une différentielle totale exacte.*

(Octobre 1912.)

Question de cours. — I. *Changement de variables dans une intégrale double.*

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on donne une famille* (S) *de surfaces de révolution d'axe* Oz *ne différant que par une translation :*

$$z = f(r) + \text{const.} \qquad (r, \text{ rayon d'un parallèle}).$$

1° *Former une équation aux dérivées partielles, soit* (E), *définissant les surfaces* (Σ) *coupant les surfaces* (S) *sous un angle donné* α.

2° *Déterminer les surfaces* (Σ).

3° *On suppose que la famille* (S) *soit réduite à une famille de plans parallèles au plan* xOy. *Montrer que les surfaces* (Σ) *sont des surfaces réglées admettant pour génératrices rectilignes les caractéristiques de l'équation* (Σ); *trouver une génération simple de ces surfaces et indiquer leurs particularités géométriques.*

(Juin 1913.)

Question de cours. — *Résidus d'une fonction monogène; application au calcul d'intégrales. Donner un exemple.*

Problème. — *On désigne par* A, B, C *les points de rencontre du plan tangent en un point arbitraire d'une surface* S *avec les trois axes* Ox, Oy, Oz.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles, soit* E, *définissant les surfaces* S *pour lesquelles les vecteurs* OA, OB, OC *sont liés par une relation linéaire donnée :*

$$a\,\mathrm{OA} + b\,\mathrm{OB} + c\,\mathrm{OC} = \mathrm{K}.$$

2° *Lorsque la relation linéaire est homogène,* $K = 0$, *montrer que la surface* S *générale est un cône ou une surface développable.*

3° *Déterminer, dans le cas général* $K \neq 0$, *les bandes caractéristiques de l'équation* E. *La surface générale* S *est-elle développable?*

4° *On remplace la relation linéaire par une relation quelconque*

$$f(\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{OC}) = 0;$$

les calculs et résultats de la troisième partie sont-ils conservés?

Montrer, en partant uniquement de la relation donnée, qu'il existe une intégrale complète réduite à un plan et une intégrale singulière. Que sont les surfaces S *générales relativement à cette intégrale singulière?*

(Octobre 1913.)

Paris.

On considère le point dont les coordonnées rectangulaires sont données par les formules

$$x = A + \rho\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad y = B + \rho\frac{\partial B}{\partial v}, \qquad z = C + \rho\frac{\partial C}{\partial v},$$

dans lesquelles on a posé

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u \sin v + \cos u \cos v,$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u \sin v - \sin u \cos v,$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin v.$$

Lorsque ρ *varie seul, ce point décrit une droite* $D(u, v)$ *qui, quand* u *et* v *varient, engendre une congruence et qu'on se propose d'étudier.*

1° *Vérifier que la congruence* G *est formée par les tangentes communes à la sphère* S *obtenue ea faisant* $\rho = 0$ *dans les formules* (1) *et au cône* T *obtenu cn faisant* $\rho = \cot V$ *dans les mêmes formules.*

Trouver les surfaces développables dont les génératrices appartiennent à G *et démontrer que les arêtes de rebroussement de ces surfaces qui sont sur* T *se transforment en les différentes tangentes d'une même circonférence dans le développement du cône* T *sur un plan.*

2° *Démontrer qu'il existe des surfaces* Σ *qui admettent pour normales toutes les droites de* G. *Trouver ces surfaces.*

Déterminer les lignes de courbure d'une surface Σ; *montrer qu'une des familles est plane et que l'autre est sphérique. Que pouvez-vous dire des développées de ces lignes de courbure.*

Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x),$$

où λ *est une constante,* $f(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle de* o *à* π, *déterminer une intégrale* $Y(x)$ *continue ainsi que* $Y'(x)$ *dans cet intervalle sachant que l'on a* $Y(0) = 0$ *et que la dérivée* $Y'(x)$ *est nulle pour* $x = \pi$. *Discuter.*

Il existe en général une seule intégrale $Y(x)$ *répondant à la question, qui est représentée par la formule*

$$Y = \int_0^x y_1(x, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_x^\pi y_2(z, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha,$$

$y_1(x, \alpha)$ *et* $y_2(x, \alpha)$ *étant deux intégrales particulières de l'équation sans second membre*

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Pourrait-on déterminer a priori *ces deux intégrales* y_1 *et* y_2 ? (Juillet 1913.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x + 2x^2 + y^2)\, dy + y(1 - x)\, dx = 0;$$

sachant qu'elle admet un facteur intégrant P^α, *où* α *est une constante et* P *un polynome en* x *et* y *qui est du premier degré en* x.

Trouver tous les facteurs intégrants de cette équation.

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère une famille de courbes* Γ, *représentée dans un système d'axes rectangulaires par les deux équations*

$$x^2 + y^2 + mz^2 = a, \qquad xy\, e^{\varphi(x)} = b,$$

où m *est une constante donnée; a et b sont deux paramètres variables. On demande de déterminer la fonction* $\varphi(x)$ *de façon que ces courbes* Γ *soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces* S *et de trouver ces surfaces* S.

Cas particulier : $m = 1$, $m = 2$.

II. *On demande la valeur de l'intégrale définie*

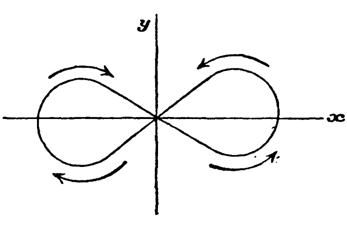
$$I = \int_C \frac{\operatorname{Log}(z - x)}{zn + 1}\, dz$$

prise le long du cercle C *de rayon* un *ayant pour centre l'origine dans le plan de la variable complexe* z.

On supposera le cercle décrit dans le sens direct à partir du point A $(z = 1)$; x *est l'affixe d'un point intérieur ou extérieur à* C, n *est un nombre entier positif ou négatif différent de zéro.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int xy(dx + dy)$$



étendue à la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2,$$

parcourue dans le sens indiqué par les flèches.

(Octobre 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Par l'origine on mène les parallèles aux tangentes d'une courbe gauche* Γ, *elles forment un cône* C. *On appelle* C_1 *le cône construit de la même façon avec les parallèles aux binormales de* Γ.

Relations géométriques entre les deux cônes C *et* C_1. *Intersection de ces deux cônes avec la sphère de centre* O *et de rayon unité.*

Les courbes Γ_1 *dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de* C_1 *ont leurs binormales parallèles aux génératrices de* C.

2° *Le cône* C *est donné; on se propose de chercher les courbes* Γ *qui lui correspondent.*

Soient $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ *les paramètres directeurs d'une génératrice quelconque de* C; *les équations*

$$\frac{dx}{f(t)} = \frac{dy}{g(t)} = \frac{dz}{h(t)}$$

sont les équations différentielles des courbes Γ. *On égale les trois rapports à* $F(t)\,dt$, *où* F *est une courbe arbitraire;* x, y, z *s'obtiennent par trois quadratures.*

3° *Si l'on forme l'équation du plan tangent au cône* C *le long de la génératrice* (t), *soit*

$$x\,u(t) + y\,v(t) + z\,w(t) = 0;$$

l'enveloppe du plan mobile

$$x\,u(t) + y\,v(t) + z\,w(t) + h(t) = 0,$$

où $h(t)$ *est une fonction arbitraire, mais choisie une fois pour toutes, est une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe* C *cherchée.*

Comparer avec le numéro précédent.

4° *Comme application déterminer toutes les courbes gauches dont le cône* C *est du second degré.*

On prend pour plan zOx *un plan de symétrie du cône, pour* Oz *l'une des génératrices suivant lesquelles ce plan coupe le cône; les équations différentielles sont alors*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{t} = \frac{dz}{at^2+b} = \varphi'''(t)\,dt,$$

où a *et* b *sont deux constantes,* φ *une fonction arbitraire. Les quadratures se font complétement, les effectuer.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° z *étant une fonction de* x *et* y, p *et* q *désignant* $\frac{dz}{dx}$ *et* $\frac{dz}{dy}$, *on considère les deux équations*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{x^2-y^2}{x} + zP(x,y), \\ q &= \frac{y^2-x^2}{y} + zQ(x,y), \end{aligned}\right.$$

où P *et* Q *sont deux fonctions données de* x *et* y. *Former de deux façons différentes* $s = \dfrac{d^2 z}{dx\,dy}$ *et en conclure que si l'on n'a pas les deux relations*

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ &Px + Qy = 2, \end{aligned}\right.$$

il y a zéro *ou* une seule *fonction* z *susceptible de vérifier le système* (1).

2° *Intégrer le système* (2) *en remarquant que l'on peut poser*

$$P = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y},$$

où U *est une nouvelle fonction inconnue qui vérifiera l'équation*

$$(3)\qquad x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2.$$

Vérifier que l'intégrale générale de (3) *est*

$$U = \log xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ *est une fonction arbitraire.*

3° *Si* φ *se réduit à une constante, on a*

$$P = \frac{1}{x}, \qquad Q = \frac{1}{y}.$$

Vérifier que l'intégrale générale du système (1) *est, dans ce cas,*

$$z = x^2 + y^2 + Cxy,$$

où C *est une constante arbitraire.*

(Novembre 1913.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4x + \sin ax$$

en exposant sur cet exemple la méthode d'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

2° *Déterminer les constantes arbitraires d'intégration de façon que la courbe représentant les variations de* y *soit tangente à l'origine à la droite* $y = x$.

3° *En supposant* $a = 1$, *étudier la forme de la courbe. Points d'inflexion. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x *et les abscisses* $x = 0$, $x = \pi$.

4° *Que devient l'intégrale générale si* $a = 2$.

Épreuve pratique. — *La normale en un point* M *d'une courbe rencontre l'axe des* x *en* N.

1° *Déterminer les courbes telles que le rayon de courbure en un point quelconque soit proportionnel à la portion de normale* MN, $\rho = k.$ MN.

2° *Cas particuliers :* $k = \pm 1, \pm 2$.

(Novembre 1913.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On considère une courbe plane* C_0 *qui, à l'égard d'un de ses points* O *convenablement choisi et à l'égard de deux droites* OX *et* OY *issues de ce point, jouit de la propriété suivante :*

Traçons le parallélogramme OAMB *ayant deux côtés contigus portés par* OX *et* OY *et ayant comme sommet* M *opposé à* O *un point* QUELCONQUE *de l'arc continu de la courbe partant de* O; *l'aire du triangle mixtiligne compris entre les segments* OA, AM *et l'arc de courbe* OM *est dans un rapport constant* h *avec l'aire du parallélogramme. Former l'équation explicite de cette courbe* C_0.

2° *Parmi les courbes* C_0 *variables avec* h, *on considère une courbe* γ *qui, à l'égard d'un* second point particulier M_0 *de la courbe et à l'égard de deux droites particulières* M_0U *et* M_0V *issues de ce point, possède une propriété analogue à la première propriété relative à* O; *en sorte que si* $M_0A'MB'$ *est un second parallélogramme, on aura avec un coefficient* k *analogue à* h, et quel que soit M,

$$\frac{\text{aire}\, M_0 MA'}{\text{aire}\, M_0 A'MB'} = k; \qquad \frac{\text{aire}\, OAM}{\text{aire}\, OAMB} = h.$$

En adoptant le système d'axe OX *et* OY, *on montrera que ces deux propriétés permettent l'élimination du rapport* $\frac{dy}{dx}$ *entre deux équations différentielles concernant les coordonnées* x *et* y *de* M; *on effectuera cette élimination et l'on discutera sur l'équation résultante obtenue les cas où celle-ci sera ou ne sera pas une identité. Conclure de cette discussion la nature spéciale de la courbe* γ.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer*

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{du\,dv}{(h^2+a^2u^2+b^2v^2)\sqrt{h^2+a^2u^2+b^2v^2}}.$$

2° *Aire de l'ellipse*

$$(5x+y)^2+(4x+y)^2=\frac{C^2}{\pi}.$$

(Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — I. *On envisage les courbes planes dont une propriété,* supposée indépendante des axes de coordonnées, *se traduit par l'équation différentielle du second ordre*

$$(1)\qquad F(x, y; y', y'') = 0.$$

On sait d'autre part que chacune des courbes de la famille

$$(2)\qquad \varphi(x, y; \alpha) = 0 \qquad (\alpha \text{ paramètre variable})$$

possède la propriété indiquée.

La famille (2) *est supposée d'ailleurs ne pas représenter les diverses positions d'une courbe invariable dans un déplacement particulier.*

Démontrer, en quelques lignes, *que l'intégrale générale de l'équation* (1) *s'obtient alors immédiatement en donnant à chacune des courbes de la famille* (2) *un déplacement continu compatible avec la forme* (2).

On appliquera cette remarque au problème suivant :

II. 1° *Vérifier que le rayon de courbure* R *en un point* M *d'une conique est lié à la distance p de son centre* O *à la tangente et à la distance r du point* M *au centre* O *par la relation*

$$(3)\qquad R=\frac{K^2-r^2}{p} \qquad (K^2 \text{ constante déterminée}).$$

2° *En s'appuyant sur la question précédente, trouver toutes les courbes planes qui jouissent de cette propriété à l'égard d'un point* O *pris pour origine des coordonnées.*

3° *Former effectivement l'équation différentielle qui* *traduit la propriété* (3), *la transformer en coordonnées polaires de pôle* O *et,* si l'on a le temps, *intégrer cette équation transformée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les deux bases respectives* (de longueurs $2a$ et $2b$) *d'un trapèze isoscèle sont distantes du centre de gravité de l'aire du trapèze de longueurs respectivement égales à p et à q.*

1° *Calculer a et b en fonction de p, de q et de la base moyenne* $2c$ *du trapèze ;*

2° *Calculer a et b en fonction de p, de q et de la largeur* 2γ *du trapèze estimée sur la parallèle à ses bases menée par le centre de gravité.* (Novembre 1913.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *A partir d'un point variable* P *sur* Ox *et d'abscisse u on mène le segment de longueur constante* $PM = \lambda$ *faisant avec* Ox *l'angle* φ. *Si l'on suppose que u est une fonction donnée de* φ, *le point* M *décrit une courbe* C.

1° *Déterminer u en fonction de* φ *de manière qu'en tout point* M *de la courbe* C *la tangente soit précisément la droite correspondante* MP *et exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de la seule variable* φ. *La fonction u de* φ *sera déterminée à une constante près qu'on déterminera de manière que pour* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *on ait* $u = 0$.

2° *La courbe* C *étant ainsi déterminée, trouver l'aire comprise entre cette courbe et l'axe* Ox.

3° *Calculer en fonction de* φ *le rayon de courbure en* M *de la courbe* C *et les coordonnées du centre de courbure* N. *Montrer que le point* N *se trouve sur la parallèle à* Oy *menée par le point* P.

4° *Trouver l'équation du lieu décrit par le point* N.

5° *Déterminer l'enveloppe du cercle variable ayant* N *comme centre et* NP *comme rayon.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un pendule simple formé d'un poids* $M = 10$ *kilogrammes, placé à l'extrémité d'une tige rigide* OM *sans masse de longueur l oscillant* *autour d'un point* O. *La durée d'oscillation du pendule, exprimée en secondes, est égale à* $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, *l exprimée en mètres*, $g = 9^{\text{m}},80650$ *à Bordeaux. On suppose l telle que cette durée d'oscillation est égale à* une *seconde.*

On ajoute un curseur C *de masse* $\mu = 10$ *grammes, de dimensions infiniment petites, mobile le long de la tige entre* O *et* M, *si x est sa distance au point* O, *la durée d'oscillation devient*

$$T = \pi\sqrt{\frac{M l^2 + \mu x^2}{g(M l + \mu x)}}.$$

1° *Étudier la variation de* T *quand on fait varier la position du curseur entre* O *et* M.

2° *Étant donnée une valeur quelconque mais fixe de x, on peut mettre l'expression de* T *sous la forme*

$$T = 1 + A\left(\frac{\mu}{M}\right) + B\left(\frac{\mu}{M}\right)^2 + C\left(\frac{\mu}{M}\right)^3 + \ldots$$

(formule de Maclaurin où T est considéré comme fonction du rapport $\frac{\mu}{M}$). *Calculer les expressions des deux premiers coefficients* A *et* B. (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *On considère l'équation différentielle*

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 y = 0,$$

où p et q sont des fonctions données de x. On suppose que cette équation admet simultanément comme intégrales particulières une certaine fonction inconnue z et sa $n^{\text{ième}}$ *puissance* z^n $(n > 0)$.

1° *Déterminer cette intégrale inconnue z (z n'est déterminée qu'à un facteur constant près).*

2° *Quelle relation doit exister entre les fonctions p et q pour que la condition de l'énoncé soit satisfaite et, supposant p seule donnée, en conclure l'expression de q.*

3° *On fait le changement de variable indépendante* *défini par*

$$t = \int_0^x e^{-p}\, dx,$$

t devenant la nouvelle variable indépendante, que devient l'équation différentielle proposée (1), *y étant regardée comme fonction de t par l'intermédiaire de x, p et q restant liés par la relation précédemment trouvée, mais devenant à leur tour des fonctions de t par l'intermédiaire de x.*

II. *Intégration des équations différentielles du premier ordre linéaires par rapport à y et* $\frac{dy}{dx}$; *montrer qu'on peut ramener à ces équations celles de la forme*

$$\frac{dy}{dx} + uy + vy^m = 0,$$

u et v désignant des fonctions données de x.

Épreuve pratique. — *Calculer à* 0,0001 *près l'intégrale définie*

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx.$$

(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Soit* OA *un axe faisant avec* O*x l'angle variable* θ *et portant un vecteur* OP *dont l'équivalent algébrique par rapport à* OA *est donné par*

$$\mathrm{OP} = p = f(\theta),$$

$f(\theta)$ *étant une fonction donnée.*

Par P *on mène une perpendiculaire* PB *à* OA; *la droite* PB, *quand* θ *varie, enveloppe une certaine courbe* C *qu'elle touche en* Q.

1° *Calculer, en fonction de* θ, *les coordonnées du point* Q *ainsi que l'équivalent algébrique du vecteur* PQ *par rapport à l'axe* PB *faisant avec* O*x l'angle* $\theta + \frac{\pi}{2}$.

2° *Calculer le rayon de courbure* R *en* Q *de l'enveloppe* C *en fonction de l'angle* θ.

3° *Quelles doivent être les formes de la fonction* $f(\theta)$ *pour que l'on ait :* 1° $R = \text{const.}$; 2° $R = a \cos \theta$?

Question de cours. — II. *Établir la formule du changement de variable dans le calcul d'une intégrale définie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer*

$$\int_0^1 \frac{-6x}{(1+x^2)^4} \mathrm{L}(x)\, dx.$$

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que si la série entière*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est convergente pour une valeur $x = x_0$, *la série dérivée*

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x *telle que* $|x| < |x_0|$.

II. *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

où p *et* q *sont des fonctions de* x. *On suppose que cette équation admet une intégrale particulière* y *telle que sa dérivée* y' *soit aussi une intégrale de la même équation :* 1° *Déterminer cette intégrale;* 2° *Trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions* p *et* q; 3° *Application à l'équation*

$$y'' + \frac{4x}{(x-x^2)(1+x^2)} y' - \frac{1+3x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2} y = 0; \tag{2}$$

4° *Montrer que si la dérivée de toute intégrale de l'équation* (1) *est aussi une intégrale de la même équation,* p *et* q *sont des constantes.*

N. B. — *On ne cherchera pas à vérifier que les coefficients* p *et* q *de l'équation* (2) *satisfont à la condition générale précédemment trouvée. On calculera simplement l'intégrale* y (*supposée exister*) *dont la dérivée est aussi une intégrale et l'on vérifiera directement que* y *et* y' *sont bien des intégrales de l'équation* (2).

Épreuve pratique. — *Soit l'ellipse* E *dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit*

$$r = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}.$$

On mène par l'origine F *deux rayons vecteurs* FP, FQ *faisant respectivement avec l'axe* Fx *les angles* α *et* β. 1° *Calculer l'aire comprise entre l'ellipse et ces deux rayons vecteurs;* 2° *l'angle* α *étant seul donné et choisissant* β *de manière que*

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4},$$

exprimer cette aire en fonction de α. *Quelle valeur faut-il donner à* α *pour que l'aire considérée soit égale au quart de celle de l'ellipse?* (Novembre 1913.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad xy' - y = k(yy' + x),$$

où k *désigne une constante donnée.*

2° Ox *et* Oy *étant deux axes rectangulaires,* M *un point variable d'une courbe intégrale* (C) *de l'équation* (1), T *le point de rencontre avec* Oy *de la tangente en* M *à* (C), N *le point de rencontre avec* Ox *de la normale en* M *à* (C), *montrer que le triangle* OTN *reste semblable à un triangle fixe.*

3° *Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes intégrales* (C) *de l'équation* (1). *Expliquer le résultat obtenu.*

4° *Former en coordonnées polaires l'équation différentielle des courbes* (C). *Construire l'une de ces courbes.*

II. 1° *Déterminer la constante* λ *de façon que l'expression*

$$\frac{x + \lambda y}{(x - y)^3}\,dx - \frac{\lambda x + y}{(x - y)^3}\,dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$. *Calculer toutes les fonctions* $U(x, y)$, *et déterminer parmi elles la fonction* $U_1(x, y)$ *qui prend la valeur* -1 *lorsqu'on donne simultanément à* x *et* y *les valeurs respectives*

$$x = 1, \qquad y = 0.$$

2° *On considère la surface*

$$z = U_1(x, y)$$

rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. *Étudier les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Déterminer les génératrices rectilignes de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère :*

1° *L'ellipse ayant pour axes de symétrie* Ox, Oy, *et pour sommets deux points* A, B, *respectivement situés sur* Ox, Oy, *et tels que*

$$OA = 10 \text{ mètres}, \qquad OB = 5 \text{ mètres}.$$

2° *L'hyperbole ayant pour axes de symétrie* Ox, Oy; *pour foyer le point* A, *et pour sommet le milieu* A′ *du segment* OA.

I. *Calculer, à un décimètre carré près, l'aire qui se trouve à la fois à l'intérieur de l'ellipse et entre les deux branches de l'hyperbole.*

II *Calculer, à un décimètre cube près, le volume engendré par cette aire tournant autour de* Ox.

III. *En désignant par* P *et* P′ *les deux points d'intersection de l'ellipse avec la branche d'hyperbole qui passe par* A′, *calculer l'abscisse du centre de gravité de l'aire, supposée homogène, que limitent l'arc d'ellipse* PAP′ *et l'arc d'hyperbole* PA′P′. (Novembre 1913.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe définie par les équations paramétriques*

$$(1) \qquad x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \qquad y = 2 \operatorname{ch} t.$$

2° *Soient* M *un quelconque de ses points*, C *le centre de courbure correspondant*, N *et* T *les points où la normale et la tangente rencontrent respectivement* Ox. *Démontrer qu'on a*

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{MT}}^2 = \overline{\mathrm{MN}}\ \overline{\mathrm{MC}}.$$

3° *Soit* M′ *un autre point de la courbe situé du même côté que* M *par rapport à* Oy. *Calculer, en fonction des ordonnées de* M *et de* M′, *la longueur de l'arc* MM′, *ainsi que son moment d'inertie et son rayon de giration par rapport à* Ox, *en le supposant homogène et de densité linéaire égale à* 1.

4° *On suppose que l'axe* Oy *est placé verticalement, le sens positif étant dirigé vers le bas. Un point matériel pesant, assujetti à glisser sans frottement le long de la courbe, est abandonné sans vitesse initiale à partir du point situé sur* Oy. *Calculer le temps qu'il met pour s'abaisser d'une longueur égale à* 1 *au-dessous de son niveau primitif. L'unité de longueur est le mètre et l'on prend* $g = 9^{\mathrm{m}},81$.

N. B. — *On rappelle les formules*

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = (1 + x)\cos 2x + e^x.$$

(Novembre 1913.)

Dijon.

Épreuve écrite. — *Soient trois axes rectangulaires* Oxyz *et une sphère de centre* O *et de rayon* a; *on considère sur cette sphère une courbe* C *telle que la portion de chaque tangente comprise entre le point de contact* M *et le point* T *où cette droite coupe le plan* Oxy *soit constamment égale au rayon* a.

1° *Soient* ρ *et* ω *les coordonnées polaires d'un point* M *de la courbe* C′, *projection de* C *sur* Oxy; *trouver la relation différentielle qui lie* ρ *et* ω.

2° *Exprimer* ρ, *puis* ω, *en fonction de l'angle* V *que fait la tangente en* M' *avec le rayon vecteur.* $\left(\textit{On rappelle la formule } \operatorname{tang} V = \frac{\rho\,\omega'}{\rho'}.\right)$

3° *Indiquer la forme de* C'.

4° *Calculer, à l'aide de* V, *l'aire du secteur limité par un arc donné* AB *de* C' *et par les rayons* OA *et* OB.

5° *On développe sur un plan le cylindre dont* C' *est la section droite. Quelle est la transformée de* C?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0.$$

1° *Représenter, par une série entière en* x, *l'intégrale* $\varphi(x)$ *qui prend la valeur* 1 *pour* $x = 0$, *sa dérivée seconde s'annulant pour* $x = 0$. *Démontrer que cette série converge quel que soit* x. *Calculer la somme.*

2° *Déduire de* $\varphi(x)$ *la solution générale de l'équation différentielle donnée.* (Juillet 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — *On considère, dans un système d'axes rectangulaires* xOy, *les courbes représentées par l'équation*

$$(1) \qquad (t^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2t^3x - 2y = 0,$$

où t *est un paramètre arbitraire. Que représente cette équation?*

Construire le lieu (C) *du centre de la courbe* (1).

Étudier l'enveloppe (E) *de la courbe* (1). *On formera l'équation de* (E) *en coordonnées cartésiennes, en coordonnées polaires; on exprimera les coordonnées d'un point de* (E) *en fonction de* t. *On indiquera comment* (E) *peut se déduire géométriquement de* (C). *Dire si* (E) *a des branches infinies.* [*On ne demande pas la construction complète de* (E).]

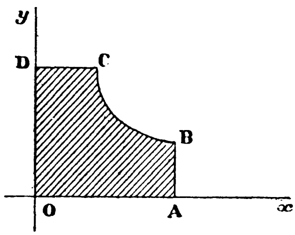
Deuxième question. — *Exposer brièvement la résolution et la discussion d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues dans le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est nul.*

Épreuve pratique. — *On considère l'aire* OABCDO *définie comme il suit :*

$$OA = OD = 2,$$

$$AB = DC = \frac{1}{2};$$

AB *est parallèle à* Oy, DC *à* Ox; BC *est un arc d'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont* Ox *et* Oy. *Déterminer :*



1° *L'aire* OABCDO;

2° *La position du centre de gravité de cette aire supposée homogène ;*

3° *Le volume du solide engendré par l'aire* OABCDO *en tournant autour de* Oy;

4° *La position du centre de gravité de ce volume supposé homogène.*

On calculera ces divers éléments à 0,01 *près. Pour faciliter le calcul on a :*

logarithme népérien de 2 = 0,6931.

(Novembre 1912.)

ERRATA.

Pages 433, 446, 457. — Notations bibliographiques :

Au lieu de K, *lire* K'.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIV, 4e SÉRIE.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Analyse mathématique.

Géométrie.

Mathématiques appliquées.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours; énoncés.

Questions de concours; solutions.

Correspondance.

Bibliographie.

Nécrologie.

Divers.

Questions proposées.

(1) Voir *errata*, p. 192.

Solutions de questions proposées.

(1) *Voir* p. 383 (Correspondance).

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XIV, 4e SÉRIE.)

83707 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.