G. FONTENÉ

Sur l'intégrale $\int_{M_0}^{M} \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 529-558

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__529_0>

[C2c]

SUR L'INTÉGRALE $\int_{M_0}^{M} \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soit (*fig.* 1) la conique représentée avec des axes rectangulaires par l'équation

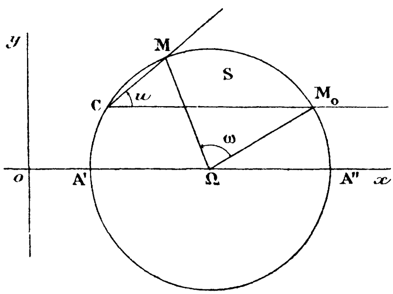
$$y^2 = ax^2 + 2bx + c;$$

nous voulons considérer l'intégrale

$$I = \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y},$$

le point (x, y) se déplaçant sur la courbe, de M_0 en M,

Fig. 1.



dans un sens déterminé lorsque la courbe est une ellipse, sans passer d'une branche à l'autre lorsque la courbe est une hyperbole; on peut écrire

$$I = \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

ε étant le signe de y qui peut varier entre les limites de l'intégration lorsque le trinome a des racines [1].

2. *Cette intégrale représente, à un facteur constant près, le double de l'aire du secteur* $(\Omega M_0, \Omega M)$, Ω *étant le centre de la conique;* dans le cas de l'ellipse, il s'agit, bien entendu, de l'aire balayée par un rayon vecteur qui va de la position ΩM_0 à la position ΩM en suivant le mouvement du point (x, y). On a en effet pour cette aire, l'abscisse du centre Ω étant $\frac{-b}{a}$,

$$
\begin{aligned}
2S &= \int_{M_0}^{M} \left[\left(x + \frac{b}{a}\right) dy - y\,dx\right] \\
&= \frac{1}{a}\int_{M_0}^{M} [(ax+b)\,dy - ay\,dx];
\end{aligned}
$$

en multipliant et en divisant par y sous le signe $\int$, et en remplaçant $y\,dy$ par $(ax+b)\,dx$, y^2 par

$$ax^2 + 2bx + c,$$

on a

$$
\begin{aligned}
2S &= \frac{1}{a}\int_{M_0}^{M} \left[\frac{(ax+b)^2 - a(ax^2+bx+c)}{y}\right] dx \\
&= -\frac{ac-b^2}{a}\int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y}
\end{aligned}
$$

ou

$$\frac{2S}{M} = -\int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y},$$

M représentant le carré $\pm B^2$ de la moitié de l'axe perpendiculaire à $x'x$. Dans les conditions de la figure 1, par exemple, l'élément $\frac{dx}{y}$ de l'intégrale est

---

[1] On sait que l'intégration d'une fonction rationnelle de la variable x et du radical $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ se ramène au calcul de l'intégrale considérée ici.

négatif, l'intégrale a une valeur négative, $\frac{2S}{M}$ est positif, S est positif.

Si le trinome a des racines x', x'', c'est-à-dire si l'axe $x'x$ est transverse, la fonction $\frac{1}{\sqrt{a(x-x')(x-x'')}}$ est un infiniment grand lorsque le point (x, y) traverse l'axe $x'x$; l'intégrale reste finie, parce que cet infiniment grand est d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à $\frac{1}{x-x'}$, et l'on peut le voir encore en prenant y comme variable indépendante :

$$I = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dy}{yy'} = 2\int \frac{dy}{(y^2)'} = \int \frac{dy}{ax+b};$$

d'ailleurs l'aire S reste finie. Ce fait prend plus de relief sous la forme suivante : si l'on considère la courbe qui a pour équation

$$Y = \frac{M}{y} = \frac{M}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

(le lecteur est prié de faire la figure en partant de la figure 1), on a pour l'aire A comprise entre l'axe des x, la courbe, une ordonnée fixe P_0N_0 et une ordonnée variable PN_1,

$$A = \int Y\,dx = M\int \frac{dx}{y} = -2s,$$

ou

$$\text{aire}(P_0N_0, PN) = -2 \times \text{secteur}(\Omega M_0, \Omega M),$$

les points N_0 et N étant ceux qui correspondent aux points M_0 et M; si P_0 est l'un des deux points A', A'', où la courbe primitive rencontre $x'x$, à supposer qu'il y ait rencontre, l'ordonnée correspondante Y est infinie, mais l'aire A reste finie.

Je rappellerai à ce propos la formule

$$\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{-(x-x')(x-x'')}} = \pi \qquad (x' < x''),$$

sur laquelle nous reviendrons; la conique est ici un cercle, comme on l'a supposé pour faire la figure, et comme on intègre de x' à x'', avec $y > 0$, on a bien

$$2\,S = -\pi R^2;$$

on va en effet de $\Omega A'$ à $\Omega A''$ dans le sens contraire au sens direct (Ox, Oy). Un changement de variable ramène d'ailleurs cette formule à celle-ci, qui en est un cas particulier,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

L'interprétation géométrique de l'intégrale I *qui vient d'être donnée permettra de se rendre compte des diverses formes que peut recevoir l'expression de cette intégrale, du moins dans l'hypothèse $a < 0$, c'est-à-dire lorsque la courbe est une ellipse, et permettrait même de les écrire* a priori; l'aire du secteur de cercle ($a = -1$) se mesure en effet très simplement, et l'on a par projection l'aire du secteur elliptique.

3. Avant de calculer l'intégrale I, je rappelle les formules suivantes :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x.$$

$$\int \frac{dx}{l^2+x^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{l},$$

et

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \quad \operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{l}\,\operatorname{arg\,th}\frac{x}{l} = \frac{1}{2l}\,\mathrm{L}\frac{l+x}{l-x} \quad (-l < x < l);$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \quad \operatorname{arg\,coth} x = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\frac{x+1}{x-1} \quad (x < -1 \text{ ou } x > 1),$$

$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{l}\,\operatorname{arg\,coth}\frac{x}{l} = \frac{1}{2l}\,\mathrm{L}\frac{x+l}{x-l} \quad (x < -l \text{ ou } x > l);$$

on peut écrire dans tous les cas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{2l}\,\mathrm{L}\left|\frac{l+x}{l-x}\right|,$$

la variable x restant bien entendu dans l'un des trois domaines $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ +1)$, $(+1,\ +\infty)$.

4. Cela posé, la courbe étant unicursale, on peut exprimer x et y en fonction rationnelle du coefficient angulaire t de la droite CM, C étant sur la courbe un point fixe de coordonnées α et β, M étant le point de coordonnées x et y; cela permettra, soit dit en passant, de faire franchir au point M l'axe $x'x$ sans renverser le sens de variation de la variable. Nous supposerons d'ailleurs que le point M_0 est déterminé d'après le point C en menant CM_0 parallèle à $x'x$, de sorte que l'intégrale I sera nulle par $t = 0$; la valeur de t est infinie lorsque le point M est diamétralement opposé au point M_0. Soit donc

$$\beta = \pm\sqrt{a\alpha^2 + 2b\alpha + c};$$

or, posons

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t.$$

On a, en retranchant de l'expression de y^2 en x celle de β^2 en α,

$$y^2 - \beta^2 = a(x^2 - \alpha^2) + 2b(x - \alpha),$$

ou, en divisant par $x - \alpha$ et en introduisant t,

$$(y + \beta)t = a(x + \alpha) + 2b,$$

ou, en remplaçant y par son expression générale en x et t, qui est $\beta + (x - \alpha)t$,

$$2\beta t + (x - \alpha)t^2 = a(x + a) + 2b,$$

et, *en différentiant sous cette forme*,

$$2[\beta + (x - \alpha)t]\,dt = (a - t^2)\,dx,$$
$$2y\,dt = (a - t^2)\,dx;$$

on a par suite

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \frac{dx}{y} = 2\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \frac{dt}{a - t^2}.$$

II.

5. Soit d'abord

$$\boxed{a < 0},$$

auquel cas la conique considérée est une ellipse ; le trinome $ax^2 + 2bx + c$ doit avoir des racines, et les limites d'intégration (en x) doivent être comprises entre les racines. On a alors

$$\mathrm{I} = -2\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \frac{dt}{(-a) + t^2},$$

ou

$$\mathrm{I} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{-a}} \qquad \left(\frac{y - \beta}{x - \alpha} = t\right),$$

la notation *arc tang* désignant un arc compris entre O et π, ou entre O et $-\pi$, selon que le point variable est supposé avoir été de M_0 en M en se déplaçant dans le sens direct ou en se déplaçant dans le sens rétrograde; l'intégrale a une valeur nulle pour $t = 0$.

Lorsque c est positif, on peut faire $\alpha = 0$, $\beta = +\sqrt{c}$, le point C étant ainsi l'un des deux points où la courbe est coupée par l'axe des y; on a alors, avec un indice destiné à rappeler la limite inférieure de l'intégration $\left(y_0 = \sqrt{c},\ x_0 = \frac{-2b}{a}\right)$,

$$I_0 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y - \sqrt{c}}{x\sqrt{-a}}.$$

On se rend aisément compte de la formule générale ci-dessus en considérant le cas où, a étant égal à -1, la conique est un cercle (*fig.* 1); on peut écrire alors

$$y^2 = -x^2 + 2hx + k.$$

La formule

$$\frac{2S}{R^2} = -I = 2\int_{M_0}^{M} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arc\,tang} t,$$

si l'on tient compte du théorème de l'angle inscrit, exprime en effet un résultat élémentaire : si l'on désigne par u l'angle, compris entre O et π ou entre O et $-\pi$ selon le sens de circulation du point (x, y), dont il faut faire tourner $x'x$ pour l'amener sur CM ou sur son prolongement, et par ω l'angle $(\Omega M_0, \Omega M)$ qui est double du précédent, et qui est par suite compris entre O et 2π ou entre O et -2π selon les circonstances, cette formule donne

$$\frac{2S}{R^2} = 2u = \omega \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{1}{2} R^2 \omega.$$

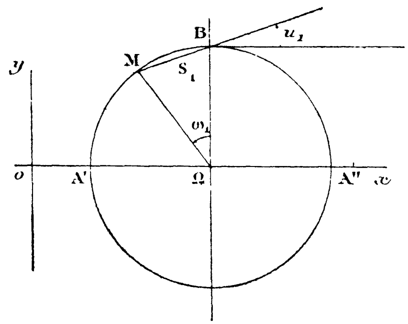
6. Le point C peut être un sommet de la courbe.

Si l'on prend d'abord comme point C un sommet B sur l'axe perpendiculaire à $x'x$ (*fig.* 2), on fera par exemple $\alpha = \frac{-b}{a}$, $\beta = +\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{-a}}$, et l'on aura

$$(1) \qquad I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{-y\sqrt{-a} + \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b};$$

l'aire S, qui est de signe contraire à I dans le cas de

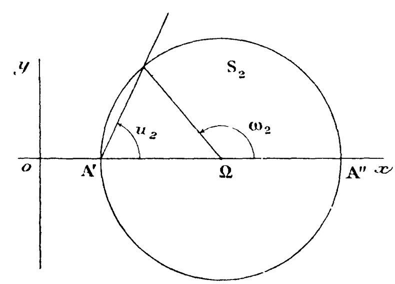
Fig. 2.



l'ellipse, est alors comptée à partir du rayon vecteur Ω B.

Si l'on prend comme point C un sommet A' sur l'axe des x (*fig*. 3), on fera $\alpha = x'$, $\beta = 0$, x' étant l'une

Fig. 3.



quelconque des deux racines du trinome, et l'on aura

$$I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \operatorname{arc tang} \frac{\varepsilon \sqrt{-a}\sqrt{-(x-x')(x-x'')}}{(x-x')\sqrt{-a}},$$

ε étant toujours le signe de y; *le signe de la différence $x'' - x'$ étant désigné par* ε', comme la différence $x - x'$ a aussi le signe ε', on a

$$(2)\qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \text{ arc tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x-x''}{x-x'}};$$

l'aire S est alors comptée à partir du rayon vecteur $\Omega A''$. (La vérification géométrique de cette formule est aisée.)

Pour $a = -1$, et en intégrant de x'' à x', avec $x' < x''$, et $\varepsilon = +$, on a

$$I_2 = -\pi,$$

ce qui donnerait d'ailleurs

$$2S = \pi R^2;$$

en renversant les limites de l'intégration, on a la formule donnée à la fin du n° 2.

D'après la définition de ε', on a

$$x' = \frac{-b + \varepsilon' \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

7. On obtient directement des formules équivalentes aux formules (1) et (2) en partant des formules

$$\int_0^x \frac{dx}{\eta \sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin} x, \qquad \int_1^x \frac{dx}{\eta \sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos} x;$$

η représente ± 1, et change quand le radical s'annule.

Pour la première intégrale, nous supposerons que l'on part avec $\eta = +$. L'arc sinus est compris entre O et 2π si x varie de manière à prendre les valeurs successives $0, +1, 0, -1, 0$, entre O et -2π dans le cas contraire, et le cosinus de cet arc a le signe η.

Pour la seconde intégrale, la dérivée du cosinus étant le sinus changé de signe, lorsque x varie de $+1$ à -1, puis de -1, à $+1$, l'arc cosinus est compris entre O et 2π si l'on part avec $\eta = -$, entre O et -2π dans le cas contraire, et le sinus de cet arc a le signe $-\eta$.

Soit alors

$$\mathrm{I} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{a\,dx}{\varepsilon\sqrt{b^2 - ac - (ax+b)^2}}.$$

Si l'on écrit d'abord, en vue de l'intégrale (1) qui correspond à la figure (2),

$$\mathrm{I}_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int_0 \frac{d\dfrac{(ax+b)}{\sqrt{b^2-ac}}}{\varepsilon\sqrt{1 - \dfrac{(ax+b)^2}{b^2-ac}}},$$

l'indice o correspondant à l'hypothèse $ax + b = 0$ et le signe ε étant le signe $+$ au départ ($\beta > 0$), on a

$$(3) \qquad \mathrm{I}_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}},$$

le cosinus de l'arc sinus ayant le signe ε, *c'est-à-dire le signe de* y, et cet arc étant par exemple compris entre O et 2π si $\dfrac{ax+b}{\sqrt{b^2 ac}}$ est d'abord positif, c'est-à-dire si $x + \dfrac{b}{a}$ est d'abord négatif : l'intégrale I_1 est alors négative, l'aire S_1 est positive.

Si l'on écrit, en vue de l'intégrale (2) qui correspond à la figure (3),

$$\mathrm{I}_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int_1 \frac{d\dfrac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}}{-\varepsilon\varepsilon'\sqrt{1 - \dfrac{(ax+b)^2}{b^2-ac}}},$$

ε' étant toujours le signe de la différence $x'' - x'$ et l'indice 1 correspondant à l'hypothèse

$$\frac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = 1 \qquad (\text{ou } x = x''),$$

on a

$$(4) \qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{ax+b}{-\varepsilon' \sqrt{b^2-ac}},$$

le sinus de l'arc cosinus ayant le signe $\varepsilon\varepsilon'$, *c'est-à-dire le signe de* $\varepsilon' y$, et cet arc étant par exemple compris entre O et 2π si l'on part avec $\varepsilon\varepsilon' = +$, c'est-à-dire avec $\varepsilon = +$ pour $x' < x''$, avec $\varepsilon = -$ pour $x' > x''$: l'intégrale I_2 est alors négative, l'aire S_2 est positive.

8. On a, avec la formule (3),

$$\arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} = \arccos \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-ac}} = \text{arc tang} \frac{ax+b}{y\sqrt{-a}};$$

cet arc est nul si l'on a

$$x = \frac{-b}{a}, \qquad y\sqrt{-a} = \sqrt{b^2-ac},$$

c'est-à-dire au point B; l'intégrale (3) est bien identique à l'intégrale (1). La formule

$$(5) \qquad I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-ac}}$$

est intéressante.

On a de même avec la formule (4),

$$\arccos \frac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = \arcsin \frac{y\sqrt{-a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}$$
$$= \text{arc tang} \frac{-y\sqrt{-a}}{ax+b};$$

cet arc est nul si l'on a

$$y = 0, \qquad ax+b = -\varepsilon'\sqrt{b^2-ac} \qquad \text{ou} \qquad x = x'',$$

c'est-à-dire au point A''; l'intégrale (4) est bien identique à l'intégrale (2). La formule

$$(6)\qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sin} \frac{y\sqrt{-a}}{\varepsilon' \sqrt{b^2 - ac}}$$

est intéressante.

On peut d'ailleurs déduire (1) de (3). Si l'on pose, en ayant soin de considérer deux lignes trigonométriques pour l'arc de la formule (3),

$$2 \operatorname{arc\,tang} X \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc\,tang} \frac{2X}{1 - X^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{ax + b}{y\sqrt{-a}},$$

et

$$2 \operatorname{arc\,tang} X \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc\,sin} \frac{2X}{1 + X^2} = \operatorname{arc\,sin} \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}},$$

on obtient la valeur unique

$$X = \frac{-y\sqrt{-a} + \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b},$$

ce qui donne bien la formule (1); on peut encore employer le cosinus.

On déduirait de même (2) de (4), mais il vaut mieux faire l'inverse en écrivant

$$2 \operatorname{arc\,tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x - x''}{x - x'}} = \operatorname{arc\,tang} \ldots = \operatorname{arc\,sin} \ldots = \operatorname{arc\,cos} \ldots.$$

Voici d'autres vérifications. Si ω_1 et ω_2 sont les arcs des formules (3) et (4), on a

$$\sin(-\omega_1) = \varepsilon' \cos\omega_2, \quad \cos(-\omega_1) = \varepsilon' \sin\omega_2, \quad \omega_2 - \omega_1 = \varepsilon' \frac{\pi}{2}.$$

Si u est l'arc de la formule générale du n° 5, on a

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y - \beta}{(x - \alpha)\sqrt{-a}} = u,$$

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2 - ac}} = \omega_1;$$

ω'_1 étant la valeur de ω_1 qui correspond à $x = \alpha, y = \beta$, cela donne

$$\operatorname{tang} u = \frac{\cos\omega_1 - \cos\omega'_1}{\sin\omega'_1 - \sin\omega_1} = \operatorname{tang}\frac{\omega'_1 + \omega_1}{2},$$

et par suite

$$2u - \omega_1 = \text{const.}$$

Observons que les figures 2 et 3, pour lesquelles on suppose $a = -1$, donnent directement les formules (3) et (4). L'équation du cercle étant

$$y^2 = -x^2 + 2hx + k,$$

de manière que l'abscisse du centre est h, on a

$$\frac{2S_1}{R^2} = \arcsin\frac{h - x}{\sqrt{h^2 + k}},$$

le cosinus ayant le signe de y, ...; on a également, avec $x' < x''$,

$$\frac{2S_2}{R^2} = \arccos\frac{x - h}{\sqrt{h^2 + k}},$$

le sinus ayant le signe de y, ...

III.

9. Soit maintenant

$$\boxed{a > 0},$$

auquel cas la conique considérée est une hyperbole; nous désignerons cette hyperbole par (H_1) ou par (H_2), selon que les sommets réels sont B′ et B sur l'axe perpendiculaire à $x'x$, ou A′ et A″ sur l'axe $x'x$ (*fig.* 4 et 5). On a alors

$$I = 2\int\frac{dt}{a - t^2},$$

et il faut distinguer deux cas selon qu'on a $t^2 < a$ ou $t^2 > a$. Comme les asymptotes de la courbe ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{a}$, on a ceci :

$$\begin{array}{ll} b^2-ac<0 & \left\{\begin{array}{ll} \text{M sur la branche } \textit{qui contient } \text{C}, & t^2<a, \\ \text{M sur la branche qui ne contient pas C}, & t^2>a; \end{array}\right. \\ (\text{H}_1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b^2-ac>0 & \left\{\begin{array}{ll} \text{M sur la branche } \textit{qui ne contient pas } \text{C}, & t^2<a, \\ \text{M sur la branche qui contient C}, & t^2>a. \end{array}\right. \\ (\text{H}_2) & \end{array}$$

Selon qu'on a $t^2<a$, comme dans les figures 4 et 5, ou $t^2>a$, on a

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times 2\,\mathrm{arg\,th}\,\frac{t}{\sqrt{a}}$$

ou $$\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}=t\right),$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times 2\,\mathrm{arg\,coth}\,\frac{t}{\sqrt{a}}$$

la première intégrale étant nulle pour $t=0$, *ce qui correspond à* CM_0 *parallèle à* $x'x$, la seconde inté-

Fig. 4.

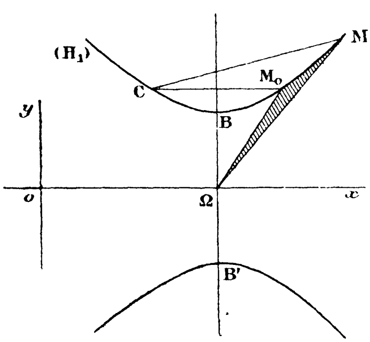
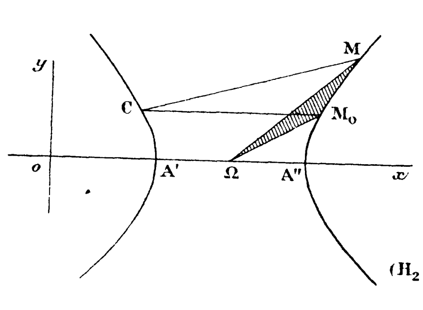


Fig. 5.



grale étant nulle pour t infini, ce qui correspond à CM_0 parallèle à $y'y$ (il y a ici une dérogation à la convention faite au n° 4 sur la position du point M_0 mais cette seconde intégrale ne sera pas maintenue) ; on peut écrire d'une manière générale

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} L \left| \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{a}}}{1 - \frac{t}{\sqrt{a}}} \right|.$$

Lorsque c est positif, on peut faire $\alpha = 0$, $\beta = +\sqrt{c}$; on a alors, selon les cas.

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\operatorname{th} \frac{y - \sqrt{c}}{x\sqrt{a}},$$

ou

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{coth} \frac{y - \sqrt{c}}{x\sqrt{a}}.$$

10. Prenons comme point C un sommet de la courbe.

Dans l'hypothèse $b^2 - ac < 0$, l'axe transverse est l'axe perpendiculaire à $x'x$; en faisant, par exemple, $\alpha = \frac{-b}{a}$, $\beta = \frac{+\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}}$, on a

$$(1') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{th} \frac{y\sqrt{a} - \sqrt{ac - b^2}}{ax + b},$$

ou

$$(1'') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{coth} \frac{y\sqrt{a} - \sqrt{ac - b^2}}{ax + b},$$

selon que y est positif ou négatif; l'aire S est alors comptée à partir du rayon vecteur ΩB pour la formule $(1')$, à partir de $\Omega B'$ pour la formule $(1'')$. D'ailleurs on peut écrire, avec $y < 0$,

$$(1'') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{th} \frac{y\sqrt{a} + \sqrt{ac - b^2}}{ax + b},$$

ce qui revient à faire dans ce cas $p = -\frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}}$. Nous ferons dès lors $\beta = \frac{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}}$, c'est-à-dire que *nous* *prendrons toujours comme point* C *le sommet,* B *ou* B′, *située sur la branche de l'hyperbole* (H_1) *qui contient les points* M ; nous aurons ainsi

$$(1', 1'') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \frac{y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b},$$

l'aire S étant comptée à partir du demi-axe, ΩB ou ΩB′, qui atteint la branche décrite par le point M.

Dans l'hypothèse $b^2 - ac > 0$, l'axe transverse est dirigé suivant $x'x$; en faisant $\alpha = x'$, $\beta = 0$, on a

$$\frac{t}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{(x - x')(x - x'')}}{x - x'} = \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

et, par suite,

$$(2') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

ou

$$(2'') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{coth} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

ε' étant le signe de la différence $x - x'$, c'est-à-dire le signe de la différence $x'' - x'$ par la formule (2′), et le signe de la différence $x' - x''$ par la formule (2″) ; l'aire S est alors comptée à partir de ΩA″ pour la formule (2′), à partir de ΩA′ pour la formule (2″). D'ailleurs on peut écrire

$$(2'') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x'}{x - x''}},$$

ce qui revient à faire dans ce cas $\alpha = x''$. *Nous prendrons dès lors comme point* C *le sommet situé sur la branche de l'hyperbole* H_2 *qui ne contient pas les points* M, sommet que nous désignerons par A′ ; nous écrirons donc, a étant positif,

$$x' = \frac{-b - \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et nous emploierons la formule (2').

11. Si l'on remplace l'argument hyperbolique par un logarithme, d'après la formule

$$2 \arg \operatorname{th} x = \mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x},$$

la formule (1', 1''), relative à l'hypothèse $b^2 - ac < 0$, est remplacée par celle-ci :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\,\frac{ax + b + y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}.$$

Or l'identité

$$(ax + b + y\sqrt{a})(ax + b - y\sqrt{a}) = b^2 - ac$$

donne

$$\frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}} = \frac{-\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a}}$$
$$= \frac{ax + b + y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{ac - b^2}};$$

on peut donc écrire

$$[1', 1''] \qquad \mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\,\frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}.$$

Pour la formule (2') relative à l'hypothèse

$$b^2 - ac > 0,$$

on avait d'abord (en faisant $\alpha = x'$, $\beta = 0$)

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \frac{y}{(x - x')\sqrt{a}};$$

cela donne

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\mathrm{th} \frac{y\sqrt{a}}{ax+b+\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L} \frac{ax+b+y\sqrt{a}+\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}{ax+b-y\sqrt{a}+\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}};$$

mais l'identité ci-dessus donne

$$\frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = \frac{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}{ax+b-y\sqrt{a}}$$

$$= \frac{ax+b+y\sqrt{a}+\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}{ax+b-y\sqrt{a}+\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}};$$

on peut donc écrire

[2'] $$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L} \frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}.$$

12. On obtient directement des formules équivalentes aux formules (1', 1'') et (2'), ou [1', 1''] et [2'], en partant des formules

$$\int_0^x \frac{dx}{\eta\sqrt{x^2+1}} = \arg\mathrm{sh}\,\eta\, x = \mathrm{L}(\eta\, x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$\int_1^x \frac{dx}{\eta\sqrt{x^2-1}} = \arg\mathrm{ch}\, x \ = \mathrm{L}(x + \eta\sqrt{x^2-1}),$$

x étant positif par cette seconde intégrale, et le sinus hyperbolique de $\arg\mathrm{ch}\, x$ ayant le signe η.

Soit alors

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{a\,dx}{\varepsilon\sqrt{(ax+b)^2+(ac-b^2)}}.$$

Si l'on écrit, dans l'hypothèse $b^2 - ac < 0$,

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0 \frac{d\dfrac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}}{\varepsilon\sqrt{\dfrac{(ax+b)^2}{b^2-ac}+1}},$$

l'indice o correspondant à l'hypothèse $ax+b=0$, on a

$$(3')\qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \operatorname{arg\,sh} \frac{ax+b}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}};$$

de même si l'on écrit, dans l'hypothèse $b^2-ac>0$,

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_1 \frac{d\dfrac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}}{\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\dfrac{(ax+b)^2}{b^2-ac}-1}},$$

ε' étant le signe de la différence $x''-x'$, ou le signe de $x-x'$, ou le signe de $x-\frac{-b}{a}$, ou enfin le signe de $ax+b$, et l'indice 1 correspondant à l'hypothèse

$$\frac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = 1 \qquad (\text{ou } x = x''),$$

on a

$$(4')\qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \operatorname{arg\,ch} \frac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}},$$

le sinus hyperbolique de l'argument ayant le signe $\varepsilon\varepsilon'$ ou le signe de $\varepsilon' y$.

13. Les intégrales (3′) et (4′) sont identiques aux intégrales (1′, 1″) et (2′), comme le montre la forme logarithmique des unes et des autres, mais on peut vérifier cette identité indépendamment de cette forme.

On a, avec la formule (3′),

$$\operatorname{arg\,sh} \frac{ax+b}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}} = \operatorname{arg\,ch} \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}} = \operatorname{arg\,th} \frac{ax+b}{y\sqrt{a}};$$

cet argument est nul si l'on a

$$x = \frac{-b}{a}, \qquad y\sqrt{a} = \varepsilon\sqrt{ac - b^2},$$

c'est-à-dire au point B, ou au point B'; l'intégrale (3') est donc bien identique à l'intégrale (1', 1''). La formule

$$(5') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\mathrm{ch}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}$$

est intéressante.

On a de même, avec la formule (4'),

$$\arg\mathrm{ch}\, \frac{ax + b}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = \arg\mathrm{sh}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = \arg\mathrm{th}\, \frac{y\sqrt{a}}{ax + b};$$

cet argument est nul si l'on a

$$y = 0, \qquad ax + b = \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac} \qquad \text{ou} \qquad x = x'',$$

c'est-à-dire au point A''; l'intégrale (4') est donc bien identique à l'intégrale (2'). La formule

$$(6') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\mathrm{sh}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}$$

est intéressante.

On déduit facilement (1', 1'') de (3'), en écrivant

$$2 \arg\mathrm{th}\, X \qquad \text{ou} \qquad \arg\mathrm{th}\, \frac{2X}{1 + X^2} = \arg\mathrm{th}\, \frac{ax + b}{y\sqrt{a}};$$

les deux valeurs de X ont pour produit 1, et il faut prendre la plus petite en valeur absolue, ce qui donne

$$X = \frac{y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b}.$$

On déduirait de même (2') de (4'), mais il vaut mieux faire le contraire.

14. Revenons à l'emploi du paramètre t. La conique étant une hyperbole, le point fixe C de coordonnées α et β peut être rejeté à l'infini, dans la direction dont le coefficient angulaire est $-\sqrt{a}$, par exemple; on exprime alors x et y en fonction rationnelle de l'ordonnée à l'origine d'une sécante variable parallèle à une asymptote.

La formule générale du n° 9 est, avec $t^2 < a$ par exemple,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{th} \frac{t}{\sqrt{a}}, \qquad \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t\right);$$

si l'on veut déduire de cette formule générale la formule particulière qu'on a en vue, on écrira

$$y = tx + (\beta - \alpha t),$$

on désignera par z l'ordonnée à l'origine de cette sécante variable

$$z = \beta - \alpha t,$$

on remplacera t par $\frac{\beta - z}{\alpha}$, et l'on aura à faire α et β infinis, sous la condition

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}.$$

Il faut toutefois employer ici un artifice analogue à celui que l'on emploie pour déduire de l'intégrale

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C}$$

l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ relative au cas $m = -1$; on écrit dans ce cas

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + \mathrm{C}',$$

de telle sorte que l'expression prenne la forme illusoire $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$ et l'on fait alors tendre m vers -1 ; or on sait que l'expression $\frac{x^h - 1}{h}$, lorsque h tend vers 0, tend elle-même vers $\mathrm{L}\,x$.

On écrit de même ici, en supposant qu'on a primitivement $t^2 < a$,

$$\frac{\mathrm{I}\sqrt{a}}{2} = \left(\arg\operatorname{th}\frac{\beta - z}{\alpha\sqrt{a}} - \arg\operatorname{th}\frac{\beta}{\alpha\sqrt{a}}\right) + \mathrm{C}',$$

de telle sorte que l'expression prenne la forme illusoire $\infty - \infty$ pour α et β infinis avec $\frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}$; on remplace la différence d'arguments par un argument unique, on fait α et β infinis avec $\frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}$, et l'on trouve

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg\operatorname{th}\frac{z\sqrt{a}}{z\sqrt{a} + 2b} + \mathrm{C}' ;$$

si l'on suppose que l'on a d'abord $t^2 > a$, on a coth au lieu de th.

Les formules

$$\arg\operatorname{th} x = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad \arg\operatorname{coth} x = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\frac{x + 1}{x - 1},$$

permettent d'écrire

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\left|\frac{b + z\sqrt{a}}{b}\right| + \mathrm{C}' ;$$

et c'est à cette formule que l'on arrive par un calcul direct. On coupe la conique par une parallèle à une asymptote, $y = -x\sqrt{a} + z$, ce qui donne

$$ax^2 + 2bx + c = ax^2 - 2xz\sqrt{a} + z^2 ;$$

on a en différentiant sous cette forme

$$(b + z\sqrt{a})\,dx = (-x\sqrt{a} + z)\,dz = y\,dz,$$

et par suite

$$I = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dz}{b + z\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} L|b + z\sqrt{a}| + C'',$$

comme ci-dessus [1].

En remplaçant z par $y - tx$, c'est-à-dire $y + x\sqrt{a}$, on a donc

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \times L|ax + b + y\sqrt{a}| + C'',$$

et l'on en déduit les formules $[1', 1'']$ et $[2']$, dont les seconds membres sont nuls en même temps que les arguments des formules $(1', 1'')$ et $(2')$. Il est facile de vérifier directement que les expressions sous le signe L dans les formules $[1', 1'']$ et $[2']$ sont positives : en effet, selon que l'on a $b^2 - ac < 0$ ou $b^2 - ac > 0$, la quantité

$$(ax + b) + y\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad (ax + b) + \varepsilon\sqrt{(ax + b)^2 + (ac - b^2)}$$

a le signe de son second terme ou celui de son premier terme ; or, dans le premier cas, on la divise par ε, ce qui donne un résultat positif ; dans le second cas, on la divise par ε' qui est le signe commun des différences $x - x'$, $x - x''$, $x - \frac{-b}{a}$, ou encore le signe de $ax + b$, et le résultat est toujours positif.

---

(1) L'asymptote ayant pour équation $y = -\frac{ax + b}{\sqrt{a}}$, on pourrait prendre l'équation de la parallèle sous la forme

$$y = -\frac{ax + b}{\sqrt{a}} + u,$$

ce qui conduit à l'intégrale $\int \frac{du}{u\sqrt{A}}$.

15. Dans le cas particulier où l'on veut intégrer

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{x^2+k}},$$

le calcul direct du n° **14** est très simple. On coupe la conique $y^2 = x^2 + k$ par la droite $y = -x + z$, ce qui donne

$$k = -2xz + z^2;$$

on a en différentiant

$$z\,dx = (z - x)\,dz = y\,dz, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dz}{z};$$

on a par suite

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{x^2+k}} = \mathrm{L}\left|x + \varepsilon\sqrt{x^2+k}\right| + \mathrm{C}''.$$

En faisant $k = +1$, ou encore $k = -1$ avec $x > 0$, on a les formules écrite au début du n° **12**.

16. La formule

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

écrite au début du n° 7, est connue par la différentiation de la fonction arc sin x ; on l'obtiendrait naturellement en posant $x = \sin\varphi$. Les formules écrites au début du n° **12**,

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \arg \operatorname{sh} x = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$\int_1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg \operatorname{ch} x = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2-1}),$$

sont de même connues par la différentiation des fonctions

$$\arg \operatorname{sh} x \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \ldots;$$

on les obtiendrait naturellement sous la première forme en posant

$$x = \operatorname{sh} u \qquad \text{ou} \qquad x = \operatorname{ch} u.$$

On vient de voir comment on arrive directement aux expressions logarithmiques de ces intégrales; on va voir qu'on y est également conduit en introduisant un angle θ qui est le complément de l'amplitude hyperbolique de l'argument u.

Pour la première intégrale, on posera donc

$$x = \cot\theta \qquad (0 < \theta < \pi);$$

l'intégrale devient

$$-\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{d\cot\frac{\theta}{2}}{\cot\frac{\theta}{2}} = \mathrm{L}\cot\frac{\theta}{2} = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

On introduit ici la variable auxiliaire $\cot\frac{\theta}{2} = z$, de sorte que l'on pose en somme

$$x = \cot\theta = \frac{z^2-1}{2z};$$

cela donne, en désignant $\sqrt{x^2+1}$ par y,

$$y + x = z,$$

et l'on retombe sur la méthode du n° 15.

De même pour obtenir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

avec $x > 0$, on posera

$$x = \operatorname{coséc}\theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right);$$

l'intégrale devient

$$-\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{d \cot \frac{\theta}{2}}{\cot \frac{\theta}{2}} = \mathrm{L} \cot \frac{\theta}{2} = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

On introduit encore ici la variable auxiliaire $\cot \frac{\theta}{2} = z$, de sorte que l'on pose en somme

$$x = \operatorname{cos\acute{e}c} \theta = \frac{z^2 + 1}{2z};$$

cela donne, en désignant $\sqrt{x^2 - 1}$ par y,

$$y + x = z,$$

et l'on retombe sur la méthode du n° **15**.

17. Voici une dernière remarque. Soit

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

et considérons, comme au n° **2**, le double $2\,\mathrm{S}$ de l'aire du secteur hyperbolique $\mathrm{A}\Omega\mathrm{M}$; on a

$$2\, d\mathrm{S} = x\, dy - y\, dx;$$

or, à cause de $x^2 - y^2 = 1$, on a aussi

$$0 = x\, dx - y\, dy;$$

on a donc, en additionnant,

$$2\, d\mathrm{S} = (x - y)\, d(x + y) = \frac{d(x + y)}{x + y},$$
$$2\mathrm{S} = \mathrm{L}(x + y),$$

l'aire S étant nulle pour $x = 1$, $y = 0$. C'est la formule de Mercator pour le double de l'aire du secteur hyperbolique, et j'en ai donné la démonstration précédente dans une Note relative aux fonctions hyperboliques. (*N. A.*, 1910, p. 481). Or on a vu au n° **2** que l'aire doublée $2\,S$ a aussi pour expression $\int \frac{dx}{y}$; on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = L(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

18. Soit toujours

$$y^2 = x^2 - 1.$$

L'intégrale $I = \int \frac{dx}{y}$ représente le double de l'aire du secteur $M_0 \Omega M$ de l'hyperbole équilatère de la figure 6, et l'on a

$$2\,S = 2\int \frac{dt}{1 - t^2} = L \frac{1 + t}{1 - t} \qquad \left(\frac{y - \beta}{x - \alpha} = t\right).$$

D'autre part si l'on mène ΩP parallèle à CM, et si l'on désigne par x' et y' les coordonnées du point P, on a, pour l'aire S' du secteur $A'' \Omega P$,

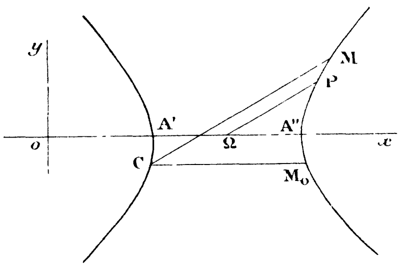
$$2\,S' = L(x' + y') = - L(x' - y'),$$

d'où

$$2\,S' = \frac{1}{2} L \frac{x' + y'}{x' - y'} = \frac{1}{2} L \frac{1 + t}{1 - t}.$$

L'aire $A'' \Omega P$ est donc moitié de l'aire $M_0 \Omega M$. La généralisation est immédiate, et l'aire $P \Omega P'$ est moitié

Fig. 6.



de l'aire $M \Omega M'$, les droites ΩP et $\Omega P'$ étant parallèles à CM et à CM'; les points M et M' étant donnés, l'aire

$P\Omega P'$ conserve ainsi une valeur constante quand le point C se déplace sur la courbe. Ce théorème est l'analogue du théorème de l'angle inscrit; on en trouverait une démonstration dans la Note relative aux fonctions hyperboliques dont il est question plus haut.

NOTE I.

Lorsque le trinome $ax^2 + 2bx + c$ a des racines, de sorte que l'on a

$$y = \varepsilon\sqrt{a(x-x')(x-x'')},$$

l'application d'un procédé qui s'emploie lorsque le nombre des facteurs binomes est quelconque (Hermite, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 15, 294, 304) conduit à écrire

$$|y| = |x-x'|\sqrt{\frac{a(x-x'')}{(x-x')}}$$

et à poser

$$\frac{a(x-x'')}{x-x'} = t^2;$$

on a ainsi, en disposant du signe de t,

$$\frac{y}{x-x'} = t,$$

et l'on retombe sur la méthode générale avec $\alpha = x'$, $\beta = 0$.

On s'explique ainsi comment on a obtenu au n° 6

$$(2) \qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times 2 \operatorname{arc\,tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x-x''}{x-x'}}$$

et au n° 10

$$(2') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,th} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{x-x''}{x-x'}}.$$

NOTE II.

Considérons la conique représentée par l'équation générale

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

et soit S *l'aire du secteur* $M_0 \Omega M$, Ω *étant le centre de la conique*. La relation

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0$$

donne, en désignant par p et q les coordonnées du point Ω,

$$\frac{-dx}{f'_y} = \frac{dy}{f'_x} = \frac{(x-p)\,dy - (y-q)\,dx}{(x-p)f'_x + (y-q)f'_y};$$

le dénominateur du dernier rapport peut s'écrire

$$-(pf'_x + qf'_y + f'_z) \quad \text{ou} \quad -(xf'_p + yf'_q + f'_r),$$

et il se réduit à $-f'_r$, le point Ω étant le centre de la courbe. On a donc

$$\frac{2\,dS}{f'_r} = \frac{dx}{f'_y} = \frac{-dy}{f'_x},$$

ou, avec les notations habituelles,

$$(1) \qquad 2\,dS = \frac{\Delta}{\delta}\frac{dx}{f'_y} = \ldots,$$

la notation f' représentant une demi-dérivée.

Soit

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t,$$

α et β étant les coordonnées d'un point C de la conique. L'équation de la courbe peut s'écrire

$$a(x-\alpha)(x+\alpha) + 2b[(x-\alpha)y + \alpha(y-\beta)]$$
$$+ c(y-\beta)(y+\beta) + 2d(x-\alpha) + 2e(y-\beta) = 0,$$

et l'on a, en divisant par $x - \alpha$,

$$a(x+\alpha) + 2b(y+\alpha t) + c(y+\beta)t + 2d + 2et = 0,$$

ou

$$a(x+\alpha) + 2b(\beta + tx) + c[2\beta t + (x-\alpha)t^2] + 2d + 2et = 0;$$

on a donc

$$dx(a + 2bt + ct^2) + 2\,dt(bx + cy + e) = 0.$$

La formule (1) prend alors la forme suivante :

$$S = -\frac{\Delta}{\delta}\int_0 \frac{dt}{a + 2bt + ct^2}.$$