

G. FONTENÉ

Équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 458-461

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__458_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3k]

ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES
D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ; .

PAR M. G. FONTENÉ.

1. La forme donnée précédemment à cette équation (*Nouvelles Annales*, 1912, p. 539) n'est pas la plus simple.

Si l'on considère l'un des six rapports anharmoniques de quatre quantités, son inverse et son complément à 1 sont également parmi les valeurs des rapports anharmoniques de ces quantités; les six rapports sont, l'un d'eux étant a ,

$$(1) \quad a, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{-a}{1-a}, \quad \frac{-(1-a)}{a}, \quad \frac{1}{a}.$$

1° Si deux des quatre quantités sont égales, les valeurs du rapport anharmonique sont

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad -\infty;$$

les valeurs finies sont racines de l'équation

$$r^2(r-1)^2 = 0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2 - r + 1)^3 = 0.$$

Comme l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, cette équation est de la forme

$$(2) \quad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = A;$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

En tenant compte de ce que, pour $r = -1$, on a $A = \frac{4}{27}$, on trouve que l'équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré est, avec les notations ordinaires,

$$(3) \quad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = \frac{4}{27} \frac{S^3 - 27T^2}{S^3}.$$

2. Si l'on pose

$$r^2 - r = \theta,$$

l'équation (2) prend la forme très simple

$$(2') \quad \frac{\theta^2}{(\theta + 1)^3} = A,$$

et, pour chaque valeur de θ , on a deux valeurs de r complémentaires par rapport à 1; si l'on pose

$$r + \frac{1}{r} = \rho,$$

l'équation (2) devient

$$(2'') \quad \frac{\rho - 2}{(\rho - 1)^3} = A,$$

et, pour chaque valeur de ρ , on a deux volumes inverses de r .

On obtient facilement l'équation (2) sous la forme (2') sans avoir recours à des cas particuliers. Les valeurs de r étant les nombres de la suite (1), l'équation en r est, *en groupant les racines de somme 1*,

$$(r^2 - r + \alpha)(r^2 - r + \beta)(r^2 - r + \gamma) = 0,$$

ou

$$(\theta + \alpha)(\theta + \beta)(\theta + \gamma) = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\theta + 1 = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + 3\theta + 1 = 0,$$

ou

$$(\theta + 1)^3 - B\theta^2 = 0.$$

Pour obtenir la forme (2''), on grouperait les racines de produit 1, ce qui donnerait

$$(r^2 - \lambda r + 1)(r^2 - \mu r + 1)(r^2 - \nu r + 1) = 0,$$

ou

$$(\rho - \lambda)(\rho - \mu)(\rho - \nu) = 0,$$

etc.

3. *Remarque.* — Les valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\sin^2 \alpha, \quad \cos^2 \alpha, \quad \sec^2 \alpha, \quad -\tan^2 \alpha, \quad -\cot^2 \alpha, \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$