NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 410-432
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__410_0>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la surface définie, en coordonnées cylindriques, par l'équation*

$$z = 4a\sqrt{r}\sin\frac{\psi}{2},$$

et l'on demande :

1° *Une description sommaire de la surface ;*
2° *L'équation du plan tangent et les cosinus de la normale en l'un de ses points ;*
3° *Ses lignes asymptotiques ;*
4° *Les rayons principaux en l'un de ses points ;*
5° *L'équation différentielle de ses lignes de courbure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la portion de l'aire de la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$$

qui est comprise dans le cône

$$a^2x^2 + b^2y^2 = z^2,$$

en supposant $a^2 > b^2$. (Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver une courbe dans laquelle la longueur s de l'arc limité à un point M soit proportionnelle à la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'ordonnée y de ce point. Cas d'intégrabilité. Étudier les cas particuliers où l'on a*

1° $n = \frac{1}{2}$; 2° $n = \frac{2}{3}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une solution complète de* *l'équation*

$$x^3pq + x^2yq^2 + px + z = 0$$

et former la solution singulière correspondante.

Vérifier, d'autre part, que

$$z = -\frac{(1+y)^2}{4x^2} \quad \text{et} \quad z = 1 + \frac{2\sqrt{y}}{x}$$

sont aussi des solutions.

Déduire ces solutions de la solution complète par la variation des constantes, et déterminer la nature de ces solutions par rapport à cette solution complète.

(Novembre 1912.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir la formule qui permet de calculer la dérivée de la fonction*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

a et b désignant deux fonctions de α.

II. *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe tangente en* O *à* Ox *et telle qu'en chaque point* M *le rayon de courbure* ρ *et la longueur* S *de l'arc* OM *soient liés par la relation*

$$\rho = \frac{a^2}{S}.$$

Construire la courbe obtenue.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''y^{\text{IV}} - \frac{5}{3}(y''')^2 = 0.$$

II. *Calculer les intégrales définies*

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad J_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où n désigne un nombre entier.

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Calculer les intégrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

en les réunissant en une intégrale complexe, et en les rattachant à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ *le long de l'axe réel. On pourra démontrer d'abord que les intégrales de Fresnel ont un sens, en les transformant en séries alternées.*

II. Problèmes. — 1° *Généraliser les résultats précédents en considérant les intégrales*

$$\int_0^\infty \cos x^n\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^n\, dx,$$

où n désigne un nombre réel plus grand que 1, *et prises le long de l'axe réel, et en les rattachant à l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$ *le long de l'axe réel. Exprimer cette dernière intégrale, et les deux précédentes, au moyen de la fonction* Γ.

2° *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires : on considère les surfaces telles qu'en un point quelconque* M *le rayon vecteur* OM *et l'intersection du plan tangent et du plan déterminé par le point* M *et la droite* Oz *fassent un angle constant α. Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont ces surfaces. Cette équation se décompose en deux équations linéaires; intégrer ces équations : on pourra les transformer en substituant aux variables x, y, z les coordonnées polaires dans l'espace* ρ, θ, φ *telles que l'on ait*

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\sin\theta.$$

Définir géométriquement les courbes caractéristiques. Examiner en particulier le cas où l'angle α est droit.

Épreuve pratique. — 1° *Déterminer l'intégrale géné-*

rale et l'intégrale singulière de l'équation différentielle

$$(yy''' - y'y'')^2 - 4(y'y''' - y''^2)(yy'' - y'^2) = 0.$$

2° *Intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = e^x(x^2 - 3x + 3),$$

sachant que l'équation sans second membre admet comme intégrale particulière un polynome du premier degré.

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Donner des conditions suffisantes pour que la fonction* $X + iY$ *de la variable complexe* $x + iy$ *ait une dérivée au point* x, y.

II. Problèmes. — 1° z *désignant une variable complexe, on considère la fonction* z^m. *Comment sont distribuées, dans le plan de cette seconde variable* z^m, *les valeurs correspondant à une même valeur de* z? *On étudiera successivement les cas où* m *est entier, fractionnaire, réel et incommensurable, purement imaginaire, imaginaire avec une partie réelle différente de zéro.*

2° *Déterminer une courbe plane telle qu'en chaque point* M *de cette courbe le rayon de courbure soit proportionnel à la distance du point* M *à un point fixe* O *du plan de la courbe. Tracer les courbes obtenues.*

On pourra prendre des coordonnées polaires de pôle O.

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'^2 = f(y),$$

où $f(y)$ *désigne un polynome du quatrième degré en* y *à coefficients constants, dans les différents cas où ce polynome n'a pas ses racines distinctes. Dans chaque cas, on pourra simplifier ce polynome par une transformation homographique effectuée sur la fonction* y.

II. *Calculer le volume de l'hypersphère de rayon* 1 *dans l'espace à quatre dimensions, c'est-à-dire l'intégrale qua-*

druple $\int\int\int\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ *étendue à l'ensemble des valeurs des variables* x_1, x_2, x_3, x_4 *telles que l'on ait*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqq 1.$$

On pourra prendre de nouvelles variables analogues aux coordonnées polaires dans le plan et dans l'espace ordinaire. (Novembre 1912.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On envisage la fonction analytique* $f(z) = \dfrac{z}{u - e^{-iz}}$, *de la variable complexe* $z = x + iy$, *où* u *représente une quantité réelle et positive.*

Si $f(z) = \mathrm{X}(x, y) + i\,\mathrm{Y}(x, y)$, X *et* Y *étant des fonctions réelles de* x *et de* y, *calculer* $\mathrm{Y}(x, y)$, *et, en particulier* $\mathrm{Y}(x, 0)$.

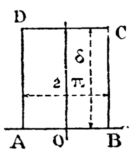
II. *Trouver tous les pôles de la fonction* $f(z)$.

III. *On considère le rectangle dont les côtés ont pour équations*

$$x = -\pi, \qquad x = +\pi, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \delta;$$

δ *est une quantité positive que l'on fera croître au delà de toute limite. Montrer qu'il ne peut y avoir, au plus, qu'un pôle de* $f(z)$ *à l'intérieur de ce rectangle. Quel est ce pôle, quand il existe, et quel est alors le résidu de* $f(z)$ *par rapport à ce pôle?*

IV. *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$, *prise le long du rectangle* ABCD, *étant désignée par* $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC}) + (\mathrm{CD}) + (\mathrm{DA})$,



où (AB) *signifie* $\int_{\mathrm{AB}} f(z)\,dz$, *etc., montrer que l'on a* $\lim\limits_{\delta=\infty} (\mathrm{CD}) = 0$, *et calculer* $\lim\limits_{\delta=\infty} [(\mathrm{BC}) + (\mathrm{DA})]$.

V. *En appliquant le théorème de Cauchy, déduire de tous les résultats qui précèdent la valeur de l'intégrale* $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 - 2u \cos x + u^2}$, *en distinguant le cas où u est plus grand que* 1 *du cas où u est plus petit que* 1.

Épreuve pratique. — *On considère la surface* S *définie par les formules suivantes :*

$$x = \lambda \cot \alpha + \frac{\sin \lambda \operatorname{ch} \mu}{\sin \alpha},$$

$$y = \frac{\mu}{\sin \alpha} + \cot \alpha \cos \lambda \operatorname{sh} \mu,$$

$$z = -\cos \lambda \operatorname{ch} \mu,$$

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}(e^{\mu} + e^{-\mu}), \qquad \operatorname{sh} \mu = \frac{1}{2}(e^{\mu} - e^{-\mu}),$$

où α *est une constante,* λ *et* μ *des paramètres variables :*

1° *Calculer l'équation du plan tangent à la surface* S *au point* (λ, μ). *On trouvera dans chaque coefficient le facteur* $\operatorname{ch} \mu - \cos \alpha \cos \lambda$. *Que peut-on en conclure pour la courbe tracée sur* S, *et qui a pour équation*

$$\operatorname{ch} \mu + \cos \alpha \cos \lambda = 0 ?$$

2° *En posant*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

montrer que l'on a

$$ds^2 = \left(\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \alpha \cos \lambda}{\sin \alpha}\right)^2 (d\lambda^2 + d\mu^2 \sin^2 \alpha).$$

En conclure que les deux familles de courbes $\lambda =$ const. *et* $\mu =$ const. *forment un réseau orthogonal.*

3° *On vérifiera que ces deux familles de courbes* $\lambda =$ const. *et* $\mu =$ const. *forment aussi un réseau conjugué. Quelles sont les lignes de courbure? Démontrer qu'elles sont planes.*

4° *Calculer les cosinus directeurs a, b, c de la normale au point* (λ, μ) *à la surface* S, *et chercher les lignes dé-*

crites par le point (a, b, c) *quand le point* (x, y, z) *décrit les lignes de courbure de* S.

5° *Lignes asymptotiques de* S.

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — *On considère la surface* S *définie en axes coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = \operatorname{ch} u \cos v,$$
$$y = \operatorname{ch} u \sin v,$$
$$z = \operatorname{sh} u,$$
$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$
$$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Chercher les lignes G *de cette surface, telles que le plan osculateur soit constamment normal à la surface (géodésiques).*

En regardant v *comme une fonction de* u *et posant*

$$v' = \frac{dv}{du}, \qquad v'' = \frac{d^2 v}{du^2},$$

on arrivera à l'équation différentielle

$$2v' \operatorname{sh}^3 u + v'^3 \operatorname{sh} u \operatorname{ch}^2 u + v'' \operatorname{ch} u(\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u) = 0.$$

Montrer que cette équation s'intègre par quadratures. On peut aussi observer que l'équation admet comme solutions particulières les lignes de courbure de l'une des familles (on dira laquelle), et les lignes asymptotiques. On est alors amené à poser

$$v' = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} u} = \frac{dv}{du},$$

λ *étant la nouvelle fonction inconnue. (Expliquer pourquoi.) Calculer* λ.

λ *étant connu,* v *est donné au moyen d'une intégrale elliptique.*

La détermination des trajectoires orthogonales des courbes G *dépend aussi d'une intégrale elliptique. Mon-*

trer que l'on trouve comme courbes G *particulières les courbes de* S *à tangentes isotropes* (*courbes de longueur nulle*).

Entre l'angle φ, *sous lequel une courbe* G *donnée coupe un parallèle de* S *et le rayon* R *de ce parallèle, existe une relation simple que l'on propose d'obtenir.*

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$qx - py + k = a\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

où a *et* k *sont des constantes. Que devient cette équation si l'on adopte les coordonnées semi-polaires* ρ, ω, z?

$$(x = \rho\cos\omega,\quad y = \rho\sin\omega.)$$

II. *Le changement de variables effectué, en déduire une intégrale complète de la forme*

$$z = h\omega + f(h, \rho) + C,$$

h *et* C *étant les deux constantes arbitraires.*

III. *En cherchant les lignes asymptotiques de la surface obtenue, prouver que l'on a affaire à un hélicoïde développable et trouver l'arête de rebroussement.*

IV. *Lignes de courbure.*

Nota. — *On rappellera que les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = h\omega + f(\rho)$$

sont données par l'équation

$$d\omega = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - \rho^3 f'(\rho) f''(\rho)}}{\rho^2 f'(\rho)}\, d\rho.$$

Épreuve pratique. — *Soit*

$$f(u) = \frac{\sigma(2a)\,\sigma^2 u}{\sigma^2 a\, \sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}$$

où

$$\sigma = u\,\Pi'\left[\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right],$$

$$w = 2m\omega + 2m'\omega';$$

$f(u)$ est une fonction doublement périodique; on demande de la décomposer en éléments simples, puis de l'exprimer en fonction rationnelle de ω.

Quelle relation y a-t-il entre $f(u)$ et $f'(u)$?

On suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs, et $2\omega > a > \omega$; construire la courbe $y = f(x)$ dans l'intervalle (O, ω). Calculer la surface comprise entre l'axe Ox, la courbe et la droite $x = \omega$.

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Écrire sans explication l'équation de l'indicatrice en un point d'une surface lorsque ce point est pris pour origine des coordonnées et que les axes des x et des y sont tracés dans le plan tangent.*

2° *Si un plan mobile est tangent en un point* M *à une surface* S *et si le point* M *décrit une courbe* C *située sur* S, *la tangente à la courbe* C *et la caractéristique du plan mobile sont dirigées suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice de* S.

3° *Une surface étant représentée par les deux équations, où entre un paramètre a et des coordonnées semi-polaires,*

$$z = a\,\mathrm{F}(\theta) = \sqrt{a^2-r^2} - a\log\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r} + f(a),$$

$$0 = \mathrm{F}(\theta) - \log\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r} + f'(a),$$

vérifier que l'on a

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}.$$

4° *Calculer l'angle que font le plan tangent en un point et le plan passant par ce point et l'axe des z.*

5° *En déduire une série de lignes de courbure et, ces* *lignes étant supposées connues, trouver la seconde série en se reportant aux deux premiers paragraphes.*

SOLUTION.

$$\cos V = F'(\theta).$$

Les sections planes passant par Oz donnent la première série. Les autres lignes de courbure sont les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Oz. (Kœnigs.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à* 0,01 *près, l'intégrale*

$$I = \int \frac{e^{(1-i)z} - e^{(1-i)z}}{z^2} dz,$$

en supposant que le point z décrive, dans le sens positif, un cercle ayant son centre à l'origine et de rayon arbitraire.

SOLUTION.

$$I = 2\pi i\, D_\alpha(e^{(1-i)\alpha} - e^{(1-i)\alpha})_{(\alpha=0)} = 4\pi = 12{,}56.$$

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Déterminer les surfaces minima de révolution.*

En d'autres termes, soient

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = \varphi(\rho)$$

les équations d'une surface de révolution ayant pour axe Oz; déterminer la fonction $\varphi(\rho)$ de sorte que, en chaque point de la surface, l'indicatrice soit une hyperbole équilatère, ou encore que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$y = \int_{-1}^{+1} \cos xt\,(1-t^2)^2\, dt,$$

où x joue le rôle de paramètre.

Indiquer comment on arriverait au calcul de l'intégrale *plus générale*

$$y = \int_{-1}^{+1} \cos xt\,(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

lorsque $n - \frac{1}{2}$ *est un nombre entier positif et vérifier que, dans ce cas, l'intégrale définie* y *satisfait à l'équation de Bessel*

$$x\frac{dy^2}{dx^2} + (2n+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

(*Substituer* y *de manière que l'équation prenne la forme* $\int_{-1}^{+1} \varphi(x, t)\,dt = 0$ *et vérifier qu'elle est une identité.*)

SOLUTION.

$$y = \frac{48 \sin x}{x^5} - \frac{48 \cos x}{x^4} - \frac{16 \sin x}{x^3}.$$

En tenant compte des limites de l'intégrale définie et après une intégration par parties qui rend les termes comparables on voit que l'équation de Bessel est satisfaite quand $n - \frac{1}{2}$ est un nombre entier positif.

Au sujet de ce calcul, on pourra consulter avec fruit le *Cours d'Analyse* de M. Goursat (t. II, 2ᵉ édition. p. 442-446).

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *dont les normales sont à une distance constante* a *d'une droite fixe, lorsque, les coordonnées étant rectangulaires. on prend l'axe des* z *pour droite fixe.*

Soient p *et* q *les dérivées de* z *fonction des deux variables indépendantes* x *et* y ; *on pose*

$$u = px = qy - z, \qquad p = \rho \cos\omega, \qquad q = \rho \sin\omega$$

et l'on demande de prendre u *pour fonction nouvelle et* ρ *et* ω *pour nouvelles variables indépendantes.*

Intégrer, en considérant x, y, z *et* u *comme des fonctions de* ρ *et de* ω.

Vérifier que les lignes de courbure d'une surface S *correspondent à* ρ *ou* ω *constant.*

Déterminer la fonction arbitraire introduite par le calcul de sorte que la surface S *passe par l'hélice*

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

SOLUTION.

On obtient

$$\frac{rx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega} = a\rho,$$

d'où

$$\begin{aligned} u &= a\rho + f(\rho), \\ x &= [a\omega + f'(\rho)] \cos\omega - a \sin\omega, \\ y &= [a\omega + f'(\rho)] \sin\omega + a \cos\omega, \\ z &= \rho f'(\rho) - f(\rho). \end{aligned}$$

Si z est constant, ρ est constant, $\sqrt{p^2 + q^2}$ est constant, d'où, par théorèmes connus, une ligne de courbure plane.

Si ω est constant, x et y sont les coordonnées d'un point du plan $-x \sin\omega + y \cos\omega = a$, d'où seconde ligne de courbure plane.

Enfin,

$$\rho(z) = -z + \frac{(2n+1)\pi a}{2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \log(z + \sqrt{1 - z^2})\, dz.$$

2° *Vérifier que les deux intégrales définies réelles*

$$\mathrm{I} = \int_0^x \log(z + \sqrt{1 + z^2})\, dz \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^x \frac{(x - z)\, dz}{\sqrt{1 + z^2}},$$

où, pour $z = 0$, *on a* $\sqrt{1 + z^2} = 1$ *et* $\log = 0$, *sont égales, par la considération de leurs dérivées en* x.

3° *Développer en séries entières en* x *les fonctions* $\frac{d^2\mathrm{I}}{dx^2}$, $\frac{d\mathrm{I}}{dx}$ *et* I. *Fixer les cercles de convergence.*

4° *Étudier les diverses significations de la fonction $z - \sqrt{1+z^2}$ quand le point z décrit, dans le plan des z, des chemins allant du point $z = 0$ à un point désigné a n'annulant pas le radical.*

SOLUTION.

$$I = x \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + 1,$$

$$\frac{dJ}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dI}{dx},$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où son développement.

Par intégration, on a ceux de $\frac{dI}{dx}$ et de I.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Détailler l'étude suivante :*

1° *L'intégrale réelle*

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

a une valeur finie si p est compris entre zéro et l'unité;

2° *On forme un contour simple fermé au moyen de deux circonférences* C *et* C' *décrites de l'origine comme centre avec des rayons* R *et* R' *et deux droites infiniment voisines de l'axe des x et de part et d'autre de la partie positive de cet axe, ces droites étant les deux bords d'une coupure établie entre les deux circonférences. La variable z ayant un argument constamment compris entre* 0 *et* 2π *calculer l'intégrale*

$$\int \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$$

prise le long du contour fermé. On montrera d'abord que cette intégrale est infiniment petite soit sur le cercle intérieur C *d'un rayon* R *infiniment petit, soit sur le cercle extérieur* C' *d'un rayon* R' *infiniment grand. On* *arrivera ensuite à la relation*

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-q}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

3° *Les intégrales eulériennes*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt,$$

où p et q sont positifs, étant liées par la relation

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(y+q)B(p, q),$$

ce que l'on admettra, établir, pour p entre zéro et l'unité, la relation

$$\Gamma(p)\Gamma(1+p) = B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p x}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'ordre infinitésimal de la distance des droites polaires correspondant à deux points voisins pris sur une courbe gauche.*

Déterminer l'ordre infinitésimal de la distance du centre de la sphère osculatrice en un point de la courbe gauche au plan normal mené en un point voisin.

Démontrer que l'une des distances est, en partie principale, double de l'autre et que les deux distances ne sont jamais nulles identiquement.

SOLUTION.

Si l'on rapporte un élément de courbe C à son trièdre mobile tracé en un point pris pour origine, les coordonnées d'un point de cet élément sont déterminées par les formules connues

$$x = S - \frac{S^2}{6R_0^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{S^2}{2R_0} + \ldots,$$

$$z = -\frac{S^3}{6R_0T_0} + \ldots$$

On voit de suite que la distance z au plan osculateur voisin est du troisième ordre avec S^3.

Un calcul très simple donne pour la distance δ de deux tangentes voisines

$$\delta = \frac{S^3}{12 R_0 T_0},$$

c'est-à-dire que la distance δ est aussi du troisième ordre et de plus δ est la moitié de z.

Si l'ordre de δ est constamment supérieur à 3, il en est de même de z et le plan osculateur étant constamment surosculateur, la courbe C est plane; c'est le théorème de Bouquet.

Soit C′ le lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe C. Deux droites polaires voisines de C font entre elles l'angle de torsion $d\tau$ de l'ordre de l'élément d'arc ds. Mais ce sont aussi les tangentes de la courbe C′. Donc l'angle de contingence $d\sigma'$ de cette courbe C′ étant égal à $d\tau$ est aussi de l'ordre de ds. Enfin ds', arc de C′, étant de l'ordre de $d\sigma'$ est de l'ordre de ds et l'on peut prendre ds' au lieu de ds pour infiniment petit de comparaison. Il n'y a plus qu'à appliquer les théorèmes précédents en se rappelant que la droite polaire de C est la tangente à C′ et que le plan polaire de C est le plan osculateur de C′.

La courbe C′ ne peut être plane, car son plan serait normal à la courbe C et celle-ci n'aurait qu'un plan normal, ce qui est impossible. (Juin 1913.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$x^3 y'^2 - 2x^2 y y' - 2y^3 + 2x^2 y + 3xy^2 - 2x^3 = 0.$$

1° *Construire les courbes intégrales de cette équation.*

2° *Combien passe-t-il de ces courbes par un point quelconque?*

3° *Distinguer, aux points où passent deux intégrales, celles qui font partie de l'intégrale générale, et les autres.*

4° *Déterminer le rôle des intégrales*

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — A *et* B *étant, dans le plan des* xy, *les points de coordonnées* (1, 0) *et* $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_A^B \frac{(x+y)\,dx + (y-x)\,dy}{x^2+y^2}$$

suivant les chemins d'intégration C *et* C'.

1° C *est le segment rectiligne* AB.

2° C' *est la circonférence de centre* O, *de rayon* 1, *parcourue dans le sens direct à partir de* A, *une fois, et augmentée du segment rectiligne* AB.

Quelle est la valeur de l'intégrale si le chemin d'intégration est formé de la circonférence parcourue n fois dans le sens direct, ou p fois dans le sens rétrograde, suivie du chemin rectiligne AB?

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne l'équation différentielle*

$$y - (x - y'^2)^2 = \frac{2}{3} y'^3.$$

La résoudre en prenant pour fonction inconnue $x - y'^2 = u$, *et pour nouvelle variable indépendante* y'.

Déterminer l'intégrale singulière et construire la courbe qui la représente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre le système d'équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} + \quad 2x - 2z = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 2y - \quad z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} - x - \quad y + 2z = 0.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégrer l'équation aux dérivées* *partielles*

$$qyz + pz(x - a) + x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Indiquer une génération des surfaces intégrales et de la section de ces dernières par le plan des xy.

Déterminer celle qui contient l'axe des y.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Montrer que l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{dz}{z^a(1+z)}$ *a un sens, et la calculer en utilisant le théorème des résidus appliqué à un contour constitué par deux circonférences concentriques à l'origine, ouvertes au voisinage de l'axe réel positif, de rayons respectivement infiniment grand et infiniment petit, et reliées par deux rayons infiniment voisins de cet axe.* (Novembre 1912.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy pour le calcul de l'intégrale d'une fonction de variable complexe le long d'un contour fermé. Donner un exemple.*

II. *On considère une surface* S *définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u, v).$$

1° *Former la condition pour que les sections de cette surface par les plans passant par* Oz *soient lignes de courbure. Cette condition exprime que la fonction* $f(u, v)$, *ou que la surface* $z = f(u, v)$, *vérifie une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre; soit* E.

2° *On peut toujours considérer les sections de la surface par les plans passant par* Oz, *ou la fonction* $f(u, v)$, *comme définissant les solutions d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, soit* F, *u étant la variable et v la constante d'intégration.*

Déterminer les solutions de l'équation E *pour lesquelles l'équation* F *est une équation de Riccati. Comment peut-on* *engendrer les surfaces* S *correspondantes? Trouver la deuxième famille de lignes de courbure et montrer que les lignes de cette famille sont égales lorsque la surface* S *est un hélicoïde.*

3° *On peut définir, d'après la deuxième partie, des fonctions* $f(u, v)$, *dépendant d'un paramètre, solutions de l'équation* E. *L'enveloppe de ces fonctions, ou des surfaces* $z = f(u, v)$, *est-elle une solution de l'équation* E?

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère les courbes* C *dont les coordonnées, exprimées à l'aide d'un paramètre* u, *sont données par les équations*

$$x = x_0\, e^{\alpha^2 u}, \qquad y = y_0\, e^{\beta^2 u}, \qquad z = z_0\, e^{\gamma^2 u},$$

α, β, γ *étant des nombres donnés.*

Lorsque le point M (x_0, y_0, z_0) *décrit une courbe directrice* D, *la courbe* C *engendre une surface* S.

1° *Démontrer que si la ligne* D *est ligne asymptotique de* S *on obtient sans signe d'intégration la famille d'asymptotiques contenant* D.

2° *Comment doivent être choisis* α, β, γ *pour que les courbes* C *soient planes. Montrer que, lorsque les courbes* C *sont planes, la recherche de toute directrice* D *asymptotique se ramène aux quadratures.*

3° *Dans le cas général, les directrices* D *asymptotiques peuvent être obtenues à l'aide des solutions de trois équations linéaires et homogènes analogues.*

On prend en particulier une courbe D

$$x_0 = f(v), \qquad y_0 = \varphi(v), \qquad z_0 = \psi(v),$$

telle que l'on ait

$$f'' + \alpha^2 f = 0, \qquad \varphi'' + \beta^2 \varphi = 0, \qquad \psi'' + \gamma^2 \psi = 0,$$
$$f'(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 0,$$

et l'on demande de rechercher si les lignes asymptotiques de la surface S *de la famille* D *ont une enveloppe.*

Quelles sont les particularités de cette enveloppe relativement aux asymptotiques et à la surface S ?

Examiner le cas où α, β, γ *deviennent des nombres entiers.*

(Octobre 1911)

Paris.

Épreuve théorique. — Première question. — *Étant donnée une équation aux différentielles totales* complètement intégrable :

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R *sont des fonctions homogènes des variables* x, y, z, *du même degré d'homogénéité, démontrer que l'expression*

$$\mu = \frac{1}{Px + Qy + Rz}$$

est un facteur intégrant pour le premier membre de l'équation (1), *à moins que* $Px + Qy + Rz$ *ne soit nul. Dans ce dernier cas les surfaces intégrales de l'équation* (1) *sont des cônes, qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.*

Application. — *Montrer que les courbes gauches représentées en coordonnées rectangulaires par le système des deux équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \qquad xyz^\alpha = b,$$

où α *est une constante donnée,* a *et* b *deux paramètres variables, sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et trouver ces surfaces.*

Deuxième question. — *Démontrer que la fonction*

$$y(x) = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x} [\sin(x-\alpha)]^3 f(\alpha)\,d\alpha,$$

où x_0 *est une constante donnée, est une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre*

$$F(y) = a_0 \frac{d^4 y}{dx^4} + a_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots + a_4 y = f(x),$$

dont les coefficients sont indépendants de la forme de la fonction $f(x)$.

Trouver l'intégrale générale de cette équation.

Peut-on étendre cette propriété à l'expression plus générale

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} [\sin(x-\alpha)]^{n-2} f(\alpha)\, d\alpha,$$

n étant un nombre entier quelconque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface* S *lieu du point dont les coordonnées rectangulaires* x, y, z *sont données par les formules*

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 + u^3, \\ y &= 3v + 3u^2 v - v^3 \\ z &= 3u^2 - 3v^2 \end{aligned}$$

dans lesquelles u *et* v *sont deux paramètres variables satisfaisant aux conditions*

$$v \leqq u \leqq 1, \qquad 0 \leqq v \leqq 1.$$

Calculer l'aire de cette surface S, *ainsi que le volume de la partie de l'espace limitée par* S, *par le cylindre projetant le contour de* S *sur le plan* Oxz, *et par le plan* Oxz. (Juillet 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires* M, *un point d'une surface* S, T *le point où le plan tangent en* M *rencontre l'axe* Oz. *On demande :*

1° *Trouver l'équation générale des surfaces* S *telles que l'on ait*

$$OM = OT;$$

2° *Déterminer les surfaces* S *qui passent par l'hyperbole représentée par les deux équations*

$$x = 1, \qquad 2yz = 1;$$

3° *Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces* S *tangentes à un plan quelconque* P, *et qu'il en existe une qui est tangente au plan* P *en tous les points d'une courbe.*

N. B. — *On remarquera pour l'intégration que l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *se décompose en deux équations linéaires en p et q.*

Deuxième question. — *Trouver l'expression générale des fonctions analytiques*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$, *telles que la partie réelle* $P(x, y)$ *est le produit d'une fonction* X *de* x *par une fonction* Y *de* y.

On demande de choisir les constantes dont dépend cette fonction $f(z)$ *de façon que les racines de l'équation* $f(z) = 1$ *soient les nombres de la forme* $n\pi i$, *où* n *est un nombre entier, chacune d'elles étant une racine double.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \rho \sqrt{4 - \rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

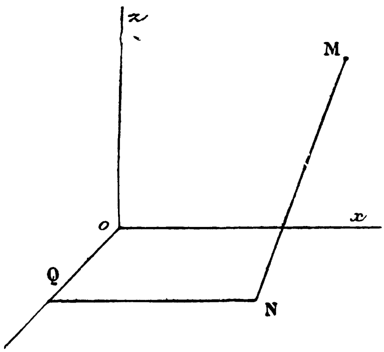
étendue à l'aire intérieure à l'ellipse

$$\rho = \frac{4 \sin\theta}{1 + \sin^2\theta}.$$

Nota. — *Après avoir effectué l'intégration en* $d\rho$, *on pourra utiliser la méthode des résidus.*

(Octobre 1911.)

Épreuve théorique. — Première question. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires*, M *un point d'une surface* S, N *le point d'intersection de la normale en* M *avec le plan* xOy. *On demande de déterminer les surfaces* S *telles que la longueur* MN *soit égale à la distance du point* N *à l'axe* Oy.



Trouver les surfaces de cette espèce qui passent par le cercle représenté par les deux équations

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Démontrer que les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces S *et que la seconde famille de lignes de courbure est formée de courbes planes dont le plan passe par l'axe* Oy.

N. B. — *Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S, *on pourra commencer par démontrer que les caractéristiques sont des courbes planes, dont les plans sont parallèles à l'axe* Oz.

Deuxième question. — *Soit* $\mu(x, y)$ *un facteur intégrant* *pour l'équation différentielle du premier ordre*

$$(1) \qquad dy - f(x, y)\,dx = 0.$$

Démontrer que la fonction

$$v(x, y) = \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

et qu'inversement de toute intégrale de l'équation (2) *on peut déduire un facteur intégrant pour l'équation* (1).

Trouver la forme que doit avoir la fonction $f(x, y)$ *pour que l'équation* (2) *admette une intégrale particulière* $v = X$, *ne dépendant que de la variable* x. *En déduire l'intégrale générale de l'équation correspondante* (1).

Épreuve pratique. — C *étant une circonférence donnée, on désigne par* A *et* A' *les points de contact des tangentes à* C *issues d'un point extérieur* M.

Démontrer que l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{\left|\sin \widehat{AMA'}\right|}{\overline{AM}^2}\, dm,$$

dans laquelle dm *désigne l'élément d'aire décrit par* m, *a une valeur finie quand on l'étend à un domaine* D *extérieur à* C, *que* D *s'étende ou non à l'infini, qu'il atteigne ou non le contour* C.

Calculer I *quand on prend pour domaine* D *successivement chacune des cinq régions en lesquelles deux tangentes à* C *faisant entre elles un angle donné* α *divisent la partie du plan extérieure à* C.

(Juillet 1912.)