

MICHEL PETROVITCH

**Théorèmes de la moyenne sans restrictions**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 400-406

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_400\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__400_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[D3cα]

THÉORÈMES DE LA MOYENNE SANS RESTRICTIONS;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

---

1. Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions, réelles ou imaginaires, de la variable  $x$ . De l'identité

$$(1) \quad uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(u - v)^2$$

on tire

$$(2) \quad \int_a^b uv \, dx = V - \delta,$$

où

$$(3) \quad V = \frac{1}{2} \int_a^b u^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_a^b v^2 \, dx,$$

$$(4) \quad \delta = \frac{1}{2} \int_a^b (u - v)^2 \, dx.$$

Sous la seule restriction, relative au chemin d'intégration, que celui-ci soit réel et de longueur finie, on voit que :

1° Si  $u$  et  $v$  ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune, l'expression  $(u - v)^2$  est réelle et d'un signe invariable dans l'intervalle  $(a, b)$ ; par suite, on aura

$$(5) \quad \delta = \frac{b-a}{2} \chi(c)^2$$

avec

$$\chi(x) = u - v$$

et  $c$  étant une valeur comprise entre  $a$  et  $b$ ;

2° Si  $u$  et  $v$  diffèrent à la fois par leurs parties réelles et imaginaires, l'expression  $(u - v)^2$  est imaginaire et l'on aura, d'après une proposition de M. Darboux,

$$(6) \quad \delta = \frac{b-a}{2} \theta e^{\omega i} \chi(c)^2,$$

$\theta$  et  $\omega$  étant deux quantités réelles, comprises : la première entre 0 et 1, et la seconde entre 0 et  $2\pi$ .

*Il s'ensuit que*

$$(7) \quad \int_a^b uv \, dx = V - \lambda \chi(c)^2,$$

où  $\lambda$  est un facteur dont le module ne surpasse

*jamais  $\frac{b-a}{2}$  et qui se réduit à  $\frac{b-a}{2}$  lorsque  $u$  et  $v$  ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune.*

L'intérêt que peut présenter cette forme du théorème de la moyenne consiste en ce qu'elle conduit à décomposer l'intégrale

$$(8) \quad \int_a^b uv \, dx$$

en deux, dont l'une ne dépend que de  $u$  et l'autre de  $v$ , avec un terme correctif dont on connaît les limites supérieure et inférieure, *et cela sans aucune restriction sur  $u$  et  $v$  autre que celle que les intégrales aient un sens.*

Dans le cas de  $u$  et  $v$  réels, l'intégrale (8) est comprise entre

$$V - \frac{b-a}{2} M^2 \quad \text{et} \quad V - \frac{b-a}{2} N^2,$$

où  $M$  et  $N$  sont la plus grande et la plus petite valeur absolue que prend la différence  $u - v$  lorsque  $x$  varie entre  $a$  et  $b$ . En prenant donc pour (8) la valeur

$$(9) \quad V - (b-a) \frac{M^2 + N^2}{4},$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(10) \quad (b-a) \frac{M^2 - N^2}{4}.$$

## 2. L'identité

$$(11) \quad uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2$$

fournit

$$(12) \quad \int_a^b uv \, dx = \frac{1}{4} \int_a^b (u+v)^2 \, dx - \xi,$$

où

$$(13) \quad \xi = \frac{1}{4} \int_a^b (u-v)^2 \, dx.$$

*Il s'ensuit que*

$$(14) \quad \int_a^b uv \, dx = \frac{1}{4} \int_a^b (u+v)^2 \, dx - \frac{\lambda}{2} \chi(c)^2,$$

où  $\chi(x)$ ,  $\lambda$  et  $c$  ont les significations du paragraphe précédent, et cela sans aucune restriction sur  $u$  et  $v$  autre que celle que les intégrales aient un sens.

Dans le cas de  $u$  et  $v$  réels, en posant

$$(15) \quad \frac{1}{4} \int_a^b (u+v)^2 \, dx = W,$$

l'intégrale (12) est comprise entre

$$W - \frac{b-a}{4} M^2 \quad \text{et} \quad W - \frac{b-a}{4} N^2,$$

de sorte qu'en prenant pour (12) la valeur

$$(16) \quad W - (b-a) \frac{M^2 + N^2}{8},$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(17) \quad (b-a) \frac{M^2 - N^2}{8}.$$

### 3. Les inégalités intuitives

$$(18) \quad \left| \int_a^b uv \, dx \right| < \frac{1}{2} \int_a^b |u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_a^b |v|^2 \, dx,$$

$$(19) \quad \left| \int_a^b uv \, dx \right| < \frac{1}{4} \int_a^b |u+v|^2 \, dx,$$

comprises dans les propositions précédentes, ne sont que des cas particuliers des inégalités plus générales

$$(20) \quad \left| \int_L u_1 u_2 \dots u_n dx \right| < \frac{1}{n} \int_L |u_1|^n dx + \dots + \frac{1}{n} \int_L |u_n|^n dx,$$

$$(21) \quad \left| \int_L u_1 u_2 \dots u_n dx \right| < \frac{1}{n^n} \int_L (|u_1| + \dots + |u_n|)^n dx,$$

L étant l'arc d'intégration et  $u_1, u_2, \dots, u_n$  étant des fonctions de  $x$  quelconques, en nombre arbitraire. Elles sont la conséquence directe de la relation d'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique d'un nombre quelconque de quantités réelles positives.

Nous en ferons l'application suivante. Soient

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

les termes, réels ou imaginaires, d'une série, fonctions d'une variable  $t$ , la série étant supposée absolument et uniformément convergente pour les valeurs de  $t$  appartenant à un domaine déterminé (D) dans le plan de  $t$ .

Considérons la série

$$(22) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

ayant pour coefficient général  $a_n$  l'expression

$$(23) \quad a_n = \int_L u_1 u_2 \dots u_n dt,$$

l'arc d'intégration L étant de longueur finie et compris dans le domaine (D). De

$$(24) \quad \sum_1^n |u_i| < \mu,$$

où  $\mu$  est la somme de la série convergente

$$(25) \quad \sum_1^{\infty} |u_i|,$$

on conclut, en vertu de (21), que

$$(26) \quad |a_n| < \frac{s \mu^n}{n^n},$$

où  $s$  est la longueur de l'arc d'intégration.

On en conclut d'abord que : *la série (22) représente une fonction entière de  $z$ , du genre zéro ou un, dont le module est, pour toute valeur de  $z$ , plus petit que*

$$(27) \quad |a_0| + s \Delta(\mu r),$$

où  $\Delta(z)$  désigne la transcendante entière

$$(28) \quad \Delta(z) = \frac{z}{1^1} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots$$

et  $r$  étant le module de  $z$ .

Or, la formule connue

$$(29) \quad \int_0^1 \left( t \log \frac{1}{t} \right)^n = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

conduit à la formule

$$(30) \quad \Delta(z) = z \int_0^1 e^{z t \log \frac{1}{t}} dt,$$

valable pour toute valeur réelle et imaginaire de  $z$ , faisant voir que

$$(31) \quad \Delta(r) < r e^{\frac{r}{e}},$$

ce qui montre que : *le module de  $f(z)$  est, pour toute*

valeur de  $z$ , plus petit que

$$(32) \quad |a_0| + s \mu e^{\frac{\mu r}{e}}.$$

Il s'ensuit, par exemple, que l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| d\theta,$$

rattachée à la fonction  $f(z)$ , a sa valeur plus petite que

$$\log \left( |a_0| + s \mu r e^{\frac{\mu r}{e}} \right),$$

d'où l'on peut tirer des conclusions à l'égard des zéros de  $f(z)$  compris à l'intérieur d'une circonférence quelconque décrite autour de  $z = 0$  dans le plan de  $z$ .