# Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 13 (1913), p. 375-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__375_1>

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

### Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — *Intégration des différentielles totales.*

Problème. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(qy - px)(x^2 - y^2) + 2r(x^2 + y^2) = 0;$$

2° *Déterminer la fonction arbitraire d'intégration, de manière que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface. Donner dans ce cas la seconde famille des lignes asymptotiques;*

3° *Les surfaces ainsi définies dépendent encore d'une constante arbitraire k. Déterminer les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces (on se bornera à la projection sur le plan des xy).*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne l'équation différentielle de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} = a - \frac{2}{e^x - e^{-x}} + (e^x + e^{-x})\left(\frac{1}{e^x - e^{-x}} - a\right)y + ay^2,$$

*a étant une fonction donnée de x:*

1° *Démontrer qu'elle admet deux solutions $y_1$, $y_2$ dont le produit est $+1$. Les déterminer:*

2° *Ramener à une quadrature l'intégration de l'équation;*

3° *Intégrer complètement dans le cas où*

$$a = \frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)(e^x - e^{-x})}.$$

(Juin 1912.)

## Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — 1° *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1) \qquad x^5y'^2 - 3x^4yy' + 2x^3y^2 + y^4 = 0,$$

*la substitution $y = uz$, u et z étant deux fonctions de x, la transforme en une équation de même forme en z. Déterminer u de façon à faire disparaître le terme en $z^2$;*

2° *Intégrer l'équation en z ainsi obtenue $\left(\text{on pourra prendre } \frac{1}{z} \text{ comme inconnue}\right)$;*

3° *Trouver l'enveloppe des solutions de l'équation* (1); *voir s'il y a une intégrale singulière;*

4° *Distinguer les points du plan par lesquels passent des intégrales réelles.*

Deuxième question. — *L'équation*

$$(z-3)^2u^2-2(z-1)u+1=0$$

*définit une fonction $u(z)$ à deux déterminations :*

1° *Quels sont les points singuliers de la fonction $u$?*

2° *Développer $u$ en série au voisinage de ces points singuliers. On se bornera à trouver les quatre premiers termes des séries;*

4° *Choisissant la détermination qui se réduit pour $z=4$ à $3+\sqrt{2}$, indiquer sommairement sa variation lorsque $z$ parcourt le cercle de centre O et de rayon 4. Calculer $\int u\,dz$ le long de ce cercle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$y^{(\text{IV})}-y'''-7y''+13y'-6y=\sin 2x+(x^2-1)e^x+e^{-x}.$$

*Déterminer toutes les intégrales qui passent au point $x=0$, $y=1$ et qui admettent en ce point l'axe $Oy$ comme tangente inflexionnelle.* (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$p(x^2-y^2-z^2)+2qxy-2x(z+1)=0.$$

1° *Déterminer l'intégrale générale;*

2° *Trouver la surface intégrale qui passe par le cercle $y=1$, $x^2+z^2=1$;*

3° *Trouver le lieu des centres de courbure principaux de cette surface relatifs aux points de ce cercle.*

Deuxième question. — *Déterminer une courbe gauche telle que les segments interceptés sur la tangente, à partir du point de contact par les plans $x=0$, $y=0$, aient respectivement des longueurs données $a$ et $b$.*

*Dans quels cas la courbe obtenue est-elle algébrique? Examiner le cas particulier $a=b$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations* *différentielles du premier ordre*

$$\frac{dx}{dt} + x - y = t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 4z = e^t,$$

$$\frac{dz}{dt} + 4z - x = e^{-3t}.$$

(Novembre 1912.)

## Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer les lignes asymptotiques* C, *autres que les génératrices rectilignes, de la surface réglée*

$$x = \mathrm{U}v, \qquad y = (a\mathrm{U} + b)v, \qquad z = u - v.$$

U *étant une fonction de* $u$, $a$ *et* $b$ *deux constantes.*

*Déterminer, de la façon la plus générale, la fonction* U *de façon qu'il y ait une courbe* C, *autre que l'axe* O$z$, *qui soit plane. Quelles sont alors les courbes* C *et la surface* S?

II. *Former, en appliquant la méthode générale, une fonction* $f(z)$ *de la variable complexe* $z$, *uniforme dans tout le plan et admettant comme pôles simples toutes les valeurs réelles entières positives et négatives, le résidu relatif au pôle* $n$ *devant être* $n^p$ (*$p$ est un entier positif donné*). *Comparer la fonction obtenue à la fonction*

$$\pi z^p \cot \pi z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne en coordonnées rectangulaires la sphère et le cylindre*

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

*Calculer :*

1° *Le volume du cylindre intérieur à la sphère;*

2° *L'aire de la surface qui limite ce volume.*

(Novembre 1911.)

## Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient* OX, OY, OZ *trois axes rectangulaires*; M *un point quelconque d'une surface*; A, B, C *les points d'intersection respectifs du plan tangent en* M *avec trois axes.*

*On propose de déterminer la surface par la double condition :* 1° *que, pour tout point* M *pris sur elle, la somme algébrique des trois segments* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ *soit égale à zéro;* 2° *que la surface contienne la parabole*

$$x = 1,$$
$$(z - y)^2 - 4y = 0.$$

II. 1° *Trajectoires orthogonales des génératrices de la surface réglée définie en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = (u + v)\cos u - f(u)\sin u,$$
$$y = (u + v)\sin u + f(u)\cos u,$$
$$z = uv,$$

*où* $u$, $v$ *désignent deux paramètres arbitraires et* $f(u)$ *une fonction donnée de* $u$. *Ramener cette recherche à une quadrature.*

2° *Déterminer la fonction* $f(u)$ *par la condition que la surface soit développable.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire l'une des courbes définies en coordonnées rectangulaires par l'équation différentielle*

$$a\,dx + \sqrt{y^2 - a^2}\,dy = 0,$$

*où* $a$ *désigne une longueur constante donnée. Faire voir que la courbe possède un arc de symétrie.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère la surface développable, enveloppe du plan mobile,*

$$2z - 2ux + u^2 y - 2f(u) = 0,$$

*où $u$ désigne un paramètre arbitraire, et $f(u)$ une fonction donnée de ce paramètre.*

*Faire voir que l'arête de rebroussement de la surface est une hélice.*

*Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices, et faire voir que ces trajectoires sont des lignes planes.*

*Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont les surfaces développables qui correspondent à tous les choix possibles de la fonction $f(u)$ dans l'équation du plan mobile, et déterminer celles d'entre ces surfaces qui contiennent la courbe*

$$x = 0,$$
$$3z + 2y^3 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère, dans le plan de notation graphique de la variable imaginaire $z = x + iy$, une ellipse dont le centre a pour coordonnées*

$$x = 1, \qquad y = 0,$$

*le petit axe étant dirigé suivant $Ox$, le grand parallèle à $Oy$, et le grand axe double du petit : quelle est la plus grande longueur que l'on puisse donner au demi-petit axe pour que, dans la région intérieure à l'ellipse, l'expression $(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ soit assimilable à quelque fonction uniforme, et combien existe-t-il de semblables fonctions?*

*En désignant par $\varphi(z)$ celle de ces fonctions qui, pour $z = 0$, prend la valeur numérique $+1$, on examinera comment varie $\varphi(z)$ sur les portions des axes $Ox$, $Oy$ intérieures à l'ellipse maximum.*

*On posera ensuite*

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 4z^2)^2[1 + 2z^2 - \varphi(z)]},$$

*et, la variable $z$ étant assujettie à se mouvoir a l'intérieur de l'ellipse maximum, on déterminera dans cette région les pôles $H(z)$ avec les groupes correspondants des fractions simples.*

*On considérera enfin l'ellipse homothétique et concen-*

*trique dont le demi-petit axe a pour longueur* $\frac{11}{10}$, *et, désignant par* A *un point fixe situé sur le contour de cette dernière, on évaluera la variation numérique subie par une détermination quelconque de l'intégrale indéfinie* $\int H(z)\,dz$ *quand la variable* $z$ *décrit le contour de* A *en* A *dans le sens direct.* (Juin 1913.)

## Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver les trajectoires orthogonales des plans osculateurs d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution. Rayons de courbure et de torsion de ces trajectoires.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer les surfaces qui satisfont à la condition* $\mathrm{OP}.\mathrm{MN} = \lambda.\overline{\mathrm{OM}}^2$, $\lambda$ *étant une constante,* M *un point de la surface,* N *le pied de la normale en* M, P *la projection de l'origine* O *sur le plan tangent en* M. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient*

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

*une équation linéaire du second ordre, et*

$$z'' + z'^2 + pz' + q = 0 \tag{2}$$

*sa transformée, en posant* $y = e^z$. *On demande la condition pour que cette transformée* (2) *admette deux solutions* $z_1$, $z_2$ *liées par la relation*

$$z_2 = az_1,$$

$a$ *étant une constante. Cette condition étant remplie, en déduire l'intégrale générale de l'équation* (1) *et celle de l'équation* (2).

*Cas particulier où* $a = -1$, $p = -\frac{1}{x}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$xy^2y'^2 - y^3y' + a^2x = 0,$$

*en posant* $y^2 = u$;

$$x u'^2 - 2u' + 4a^2 x = 0.$$

(Juin 1913.)

## Grenoble.

Épreuve théorique. — *Lignes de niveau, lignes de pente, lignes asymptotiques de la surface définie en coordonnées cylindriques par l'équation*

$$z = ar^m \sin m\psi.$$

*Étudier le cas particulier où* $m = -2$, *d'abord en partant des résultats généraux obtenus pour une valeur quelconque de* $m$; *et ensuite en partant de l'équation en coordonnées ponctuelles* $x$, $y$, $z$ *de la surface, lorsque* $m = -2$.

Épreuve pratique. — I. *Volume limité par les surfaces*

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^3}{a^3}, \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

*et par le plan mené parallèlement à* $yOz$ *par les points de rencontre des traces des deux surfaces sur le plan* $xOy$.

II. *Intégrer l'équation*

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} - 4xy^2 - 2x(4x^2+3)y - 4x^3(x^2+1) = 0.$$

(Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée l'équation*

$$(px+qy)^2 - 2a(py-qx) - a^2 = 0,$$

*on demande :*

1° *Une solution complète de cette équation;*

2° *La nature des sections faites dans la surface que représente cette solution quand on coupe la surface par des plans parallèles à* $xOy$;

3° *Les lignes asymptotiques de la même surface.*

Épreuve pratique. — *Solution singulière de l'équation*

$$9(1+y)y^2y'^2 = 4(1-3y)$$

*déduite : 1° de cette équation différentielle; 2° de son intégrale générale.*

*Lieux des points de rebroussement et des points d'inflexion des courbes intégrales.*

(Novembre 1911.)