Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 363-375

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__363_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Questions de cours. — 1° *Exposer le théorème de Lagrange et Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre d'un système; faire voir que, les forces extérieures demeurant les mêmes et le système étant placé dans une position satisfaisant aux conditions de Lagrange et Dirichlet, la stabilité de l'équilibre du système pour cette position subsistera après l'adjonction de liaisons nouvelles;*

2° *Théorème de M. Painlevé relatif aux systèmes conservatifs formés de points matériels soumis à une pesanteur commune et à des forces mutuelles et qui, partant d'une position initiale avec une force vive nulle, reprennent à une nouvelle époque leur configuration initiale; montrer qu'un tel système reprend avec sa configuration initiale son orientation initiale.*

II. Problèmes. — 1° *Soient* α, β, γ *trois nombres positifs : Si les composantes* X, Y, Z *de la force appliquée à un point matériel* M *sont liées aux coordonnées* x, y, z *de ce point par les relations*

$$X = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

et si la fonction φ *est maxima au point* M_0 *de coordonnées*

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

le point M_0 *est position d'équilibre stable;*

2° *Deux points matériels* M *et* M′ *mobiles dans un plan et de coordonnées respectives* (x, y) *et* (x', y') *sont soumis à des forces respectives* $F\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$ *et* $F'\begin{cases} X' \\ Y' \end{cases}$ *dont les composantes sont ainsi définies*

$$X = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad X' = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x'},$$

$$Y = \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad Y' = \mu\frac{\partial\psi}{\partial y'},$$

α, β, λ, μ *tous positifs, mais non proportionnels; au moyen des deux fonctions* φ *et* ψ *qui sont*

$$\varphi = -A(x-x_0)^2 - 2B(x-x_0)(y-y_0) - C(y-y_0)^2,$$
$$\psi = -A'(x'-x_1)^2 - 2B'(x'-x_1)(y'-y_1) - C'(y'-y_1)^2,$$

sous les conditions A, A′, C, C′ *positifs et* $AC - B^2$ *et* $A'C' - B'^2$ *positifs.*

Les deux points étant indépendants et chacun libre sont en équilibre stable sur les positions respectives, de coordonnées x_0, y_0 et x_1, y_1.

Ceci posé, on assujettit les deux points aux liaisons

$$x' - x = x_1 - x_0,$$
$$y' - y = y_1 - y_0,$$

étudier le mouvement du nouveau système, et, en particulier, faire voir que A, A′, C *et* C′ *étant convenablement choisis, l'on pourra limiter le rapport des coefficients* B *et* B′ *de manière que la position évidente d'équilibre du nouveau système, savoir :*

$$x = x_0, \qquad x' = x_1,$$
$$y = y_0, \qquad y' = y_1,$$

puisse être une position d'équilibre instable du système modifié.

On aura ainsi constitué un système non conservatif sur lequel un renforcement des liaisons peut détruire la stabilité de l'équilibre.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un demi-cercle tourne autour de son diamètre dans un fluide qui en chaque élément* *exerce une pression normale proportionnelle au carré de la vitesse. Centre de pression?* (Novembre 1910).

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Problème. — *Deux points mobiles* M_1 *et* M_2 *sont assujettis à décrire respectivement, dans un même plan, deux cercles concentriques, dans le même sens, avec une même vitesse linéaire; on suppose les rayons* R_1 *et* R_2 *de ces deux cercles vérifiant la relation* $R_2 = 2R_1$ *et l'on demande :*

1° *Déterminer la grandeur et la direction de la vitesse du point géométrique dont* M_1 *et* M_2 *sont les extrémités;*

2° *En supposant que les points* M_1 *et* M_2 *portent chacun une masse* pesante *de même valeur et que le plan commun des deux cercles soit vertical, étudier les positions d'équilibre du système et, dans le cas d'un équilibre stable, déterminer la durée de la* petite oscillation *correspondante du système.*

Discussion.

II. Question de cours. — *Théorème de Gauss sur l'attraction newtonienne; son application aux déterminations du potentiel et de l'attraction d'une sphère pleine homogène.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon r roulant extérieurement sur un cercle de rayon* R *est placée dans un plan vertical de manière que son sommet soit le point le plus bas de la courbe. Un point pesant se meut sur la courbe sans frottement; calculer la durée d'une* petite oscillation *autour de la position d'équilibre.* (Novembre 1911.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir les équations de Lagrange pour le mouvement d'un système à liaisons sans frottements dépendant d'un nombre fini de paramètres indépendants.*

II. *Un solide* S *est formé de deux sphères homogènes réunies par une tige suivant la ligne des centres. Le* *solide* S *repose sur un plan horizontal fixe parfaitement poli et la tige est assujettie à s'appuyer sans frottements sur une verticale fixe.*

Mouvement du solide.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les deux axes* Ox, Oz *sont horizontaux et rectangulaires. L'axe* Oy *est perpendiculaire à* Oz *et fait avec* Ox *l'angle* $\frac{\pi}{6}$. *On trace dans le plan* xOy *l'ellipse ayant pour équation*

$$x^2 + y^2 = 1$$

et l'on considère la partie au-dessous de Ox *comme une plaque matérielle homogène.*

Trouver le rapport des durées des oscillations infiniment petites de ce solide pesant pouvant librement tourner soit autour de Ox *soit autour de* Oz.

(Novembre 1910).

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Définition des liaisons sans frottement.*

Énoncé et démonstration du principe des travaux virtuels.

II. *Mouvement d'un disque circulaire homogène pesant, infiniment mince dont le plan est assujetti à être vertical et qui ne peut que rouler sur un plan horizontal fixe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un hémisphère homogène pesant, de rayon* R, *est suspendu par l'extrémité* O *de son axe de révolution.*

Il y a une infinité de façons de le mettre en mouvement à partir de la position initiale $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ *de telle sorte que l'axe* Oz *décrive un cône de révolution. Trouver, pour tous ces mouvements, le maximum du rapport des vitesses initiales de rotation du solide autour de* Oz *et de rotation du plan* zOz_1, *autour de la verticale descendante* Oz_1

(Novembre 1911).

Caen.

Épreuve théorique. — *Un triangle rectangle isoscèle, homogène et pesant, a le milieu de son hypoténuse,* I, *fixe; cette hypoténuse est assujettie à demeurer dans un plan horizontal,* P, *passant par* I. *Le sommet,* C, *de l'angle droit est attiré par un point fixe,* O, *du plan* P *proportionnellement à la distance.*

1° *Établir les équations générales du mouvement de la plaque, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Ramener aux quadratures dans le cas particulier suivant : le point* O *est au point* I. *Au début du mouvement, le plan de la plaque est vertical, et la plaque est animée d'une rotation égale à* $\omega\sqrt{2}$ *autour d'un axe passant par* I, *situé dans son plan, et incliné à* 45° *sur l'horizon. Étudier qualitativement le mouvement.*

On désigne par $2a$ *l'hypoténuse du triangle, par* R *la valeur de la force attractive à l'unité de distance. La densité superficielle du triangle est prise pour unité.*

Épreuve pratique. — *Un fil métallique de longueur* l *est fixé en un point* A, *et passe sur une poulie très petite,* B, *située dans le plan horizontal du point* A. *Le fil est supposé très flexible. A son extrémité libre est attaché un poids* P. *Déterminer la position d'équilibre au fil en négligeant sa raideur.*

Données numériques :

$$\mathrm{AB} = 135^{\mathrm{cm}} = 2a,$$
$$l = 150^{\mathrm{cm}},$$
$$\mathrm{P} = 10^{\mathrm{kg}}.$$

Le fil est cylindrique; il a un diamètre de 2^{mm}, *et une densité de* 7,7.

On pourra procéder graphiquement pour la résolution de l'equation transcendante du problème, et faire toutes les approximations qui paraîtront légitimes.

(Novembre 1911).

Épreuve théorique. — I. *Deux demi-cercles égaux* C *et* C' *sont mobiles dans un même plan vertical autour d'un* *même point* A, *qui est l'une des extrémités, du diamètre limitant chacun d'eux. Ces demi-cercles sont supposés pleins, homogènes, pesants, et de même densité. L'un d'eux est librement suspendu et occupe sa position d'équilibre* C. *L'autre*, C′, *est maintenu de façon que le diamètre par lequel il se trouve limité soit horizontal, et il est situé au-dessus de ce diamètre horizontal.*

On abandonne sans vitesse le disque C′, *dont le diamètre vient choquer celui du disque* C.

1° *Déterminer le temps au bout duquel se produit le choc;*

2° *Étudier le mouvement qui suit le choc dans les deux hypothèses suivantes : a. Les disques sont infiniment mous et restent en contact après le choc; b. Ils sont parfaitement élastiques : déterminer en ce cas l'époque de la seconde rencontre des deux disques;*

3° *Calculer la réaction du point* A.

II. *Un point matériel pesant, de masse* m, *est posé à l'intérieur d'un cerceau fixe dans un plan vertical; il est en équilibre au point le plus bas du cerceau.*

On imprime au cerceau un mouvement de rotation autour de son axe (c'est-à-dire autour de la perpendiculaire à son plan menée par son centre), la vitesse angulaire étant constante et égale à ω. *En supposant qu'il y ait un frottement de coefficient* $f = \operatorname{tang}\varphi$ *entre le point matériel et le cerceau, étudier les conditions d'équilibre relatif du point sur le cerceau. Discuter complètement.*

Épreuve pratique. — *On donne une plaque rectangulaire homogène de dimensions* 10$^{\text{cm}}$ *et* 20$^{\text{cm}}$. *On considère un point* O *situé sur la perpendiculaire au plan de la plaque menée par un de ses sommets à une distance de* 8$^{\text{cm}}$ *de celui-ci.*

Déterminer, parmi les droites passant par O, *celle par rapport à laquelle le moment d'inertie de la plaque est maximum.* (Juin 1911).

Montpellier.

Épreuve théorique. — I. *Vitesse et accélération dans le mouvement relatif.*

II. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur la surface d'une sphère dont il peut se séparer. Cette sphère est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par son centre. Étudier le mouvement relatif du point sur la sphère, en supposant qu'à l'époque initiale le mobile soit placé sur le grand cercle horizontal de la sphère et que sa vitesse initiale soit nulle; en particulier, reconnaître si le mobile abandonne la sphère.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Mesurer, à l'aide du pendule balistique, la vitesse d'une balle de revolver à sa sortie du canon.*

Le pendule est construit de façon que l'axe n'éprouve aucune percussion au moment du choc.

Données numériques :

Masse du pendule	5^{kg}
Masse de la balle	20^{g}
Distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension	1^{m}
Distance au même axe de la ligne de tir	2^{m}
Angle maximum d'écart	90°
Accélération due à la pesanteur	$9^{m},81$

Nancy.

Soit AB *une barre pesante de longueur* l *dont la densité croît de* A *en* B *de façon que, si* ε_0 *est cette densité en* A, *en un point quelconque à distance* ρ *de* A *la densité soit égale à*

$$\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \rho^2}{l^2}.$$

La barre AB *peut rouler sans glisser sur la circonférence d'un cercle vertical fixe, de centre* O, *de rayon* a.

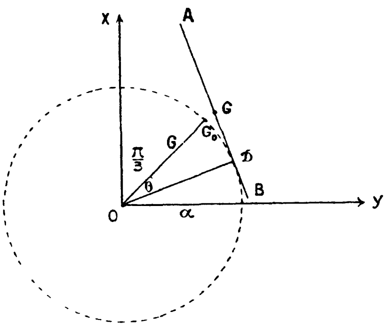
1° *Quelles sont les positions d'équilibre de la barre?*

2° *Supposons qu'à l'instant initial le point de contact de la barre et du cercle soit le centre de gravité* G_0 *de la barre et que la barre se meuve autour de* G_0 *avec une vitesse angulaire initiale de rotation égale à*

$$k\frac{\sqrt{ag}}{l},$$

où k est une constante positive et g la constante de la gravité.

On demande d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la barre en appliquant la méthode de Lagrange.



Si D *est le point de contact de la barre à l'instant quelconque t, on prendra pour paramètre définissant la position de la barre à cet instant l'angle*

$$\theta = \widehat{OG_0, OD},$$

et l'on supposera que

$$\widehat{OX, OG_0} = \frac{\pi}{3}.$$

3° *On demande d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la barre en appliquant le théorème de l'énergie cinétique;*

4° *On demande de discuter le mouvement pour chaque valeur positive donnée à k. La barre peut-elle prendre une position verticale?*

5° *On demande de calculer, la pression que la barre exerce sur le cercle.* (Juin 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre homogène pesante* AB, *de longueur $2a$, est assujettie à se mouvoir de façon que l'une de ses extrémités* A *reste dans un plan horizontal fixe donné $O\xi\eta$, tandis que l'autre extrémité* B *ne quitte pas une droite verticale fixe donnée $O\zeta$. Chaque élément* *de la barre* AB *est repoussé par le point* O *proportionnellement à sa distance au point* O.

On donne la position initiale et l'état initial des vitesses de la barre; on demande d'étudier le mouvement de cette barre.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque rectangulaire* ABCD *de côtés* $AB = 3^{dm}$, $AD = 2^{dm}$, *d'épaisseur négligeable et de densité superficielle* 3 *est chargée de deux secteurs circulaires de rayon égal à* 1^{dm}, *d'angle égal à* $\frac{\pi}{2}$, *et de densité* 4; *l'un a pour centre le sommet* C *et est placé dans l'angle* BCD, *l'autre a pour centre le sommet* D *et est placé dans l'angle* ADC.

Cette plaque est suspendue par son côté AB *supposé horizontal, autour duquel elle peut tourner librement; à l'instant initial, la plaque est horizontale et elle est abandonnée sans vitesse initiale à l'action de son poids. Trouver la durée de ses oscillations dans le vide, à* $\frac{1}{10}$ *de seconde près.* (Octobre 1909.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que l'attraction newtonienne d'une sphère homogène sur un corps est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.*

Attraction réciproque de deux sphères.

II. *Trois sphères homogènes* s_1, s_2, s_3 *de centres* c_1, c_2, c_3 *et de masses* m_1, m_2, m_3 *s'attirent suivant la loi de l'attraction universelle.*

1° *Trouver le mouvement de chaque sphère autour de son centre. Écrire les équations différentielles qui définissent les mouvements des points* c_1, c_2, c_3 *et les intégrales de ces équations que fournissent les théorèmes généraux de la Mécanique;*

2° *Démontrer que, quelles que soient les conditions initiales, il ne peut y avoir plus d'un des trois points* c_1, c_2, c_3 *qui reste au repos.*

Prouver que c_1 *ne peut rester au repos que si* $m_2 = m_3$ *et si les deux points* c_2 *et* c_3 *sont symétriques par rapport* *à* c_1. *Quand il en est ainsi à un instant, quelles doivent être les vitesses de* c_1, c_2, c_3 *à cet instant, pour que* c_1 *reste immobile? Quels sont alors les mouvements de* c_2 *et* c_3?

3° *Quels sont les mouvements du système dans lesquels le mouvement de* c_1 *est rectiligne et uniforme?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un tétraèdre régulier homogène de densité* 2,7 *et dont l'arête est de* $1^{m},05$ *oscille librement autour d'une de ses arêtes fixée dans une position telle qu'elle fait un angle de* 45° *avec l'horizon. Calculer la durée des petites oscillations* ($g = 980$ C. G. S.).

II. *On considère une figure plane mobile dans son plan et l'on suppose qu'à un instant les deux roulettes fixe et mobile sont symétriques l'une de l'autre par rapport à leur tangente commune au centre instantané de rotation.*

1° *Démontrer que la même propriété a lieu à tout instant;*

2° *En supposant que les roulettes soient des paraboles, déterminer la trajectoire du foyer de la roulette mobile;*

3° *Pour une position de la figure, on donne la vitesse de ce foyer; en déduire la vitesse d'un point quelconque de la figure et la vitesse avec laquelle le centre instantané de rotation se déplace, à l'instant considéré, sur les deux roulettes.* (Juillet 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un tétraèdre régulier, homogène, pesant* ABCD, *est suspendu par son sommet* A; *son sommet* B *glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe* H *placé au-dessous de* A *à une distance telle que* AB *fasse* 45° *avec l'horizon.*

Étudier le mouvement de ce tétraèdre sachant qu'il part à l'instant 0 *de sa position d'équilibre instable avec des vitesses données.*

Calculer la durée qui s'écoule entre l'instant initial et le moment où l'une des arêtes du tétraèdre vient choquer le plan H. *Que devient cette durée si l'on considère des vitesses initiales de plus en plus faibles?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Une figure plane* F *mobile dans son plan a un mouvement tel que l'un* A *de ses points décrit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires* *est* $\rho = e^{\omega}$. *Une droite* D *de* F *contenant* A *passe constamment par l'origine* O *des coordonnées polaires.*

Trouver la base et la roulette de ce mouvement.

II. *Un corps solide pesant repose par une face plane sur un plan incliné de* 15° *sur l'horizon. On lance le corps vers le bas le long de la ligne de plus grande pente avec une vitesse de* 3^m *à la minute. Le corps s'arrête après avoir glissé pendant* 10^m; *quel est le coefficient de frottement du corps sur le plan?*

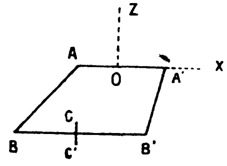
(*Accélération de la pesanteur* = 980 C.G.S.)

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Deux sphères homogènes pesantes roulent sans glisser sur un plan horizontal parfaitement rugueux. Elles sont parfaitement polies et glissent sans frottement l'une sur l'autre lorsqu'elles se trouvent en contact. On demande d'étudier le mouvement du système pour des conditions initiales quelconques, et de calculer les réactions.*

2° *Que deviendrait le problème précédent si les deux sphères étaient rugueuses et roulaient sans glisser l'une sur l'autre?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient* Oxyz *trois axes rectangulaires* (Oz *vertical*). *On donne un trapèze constitué par une barre homogène sans épaisseur, dont les extrémités* B, B′ *sont soutenues par deux cordes homogènes*



égales, suspendues elles-mêmes aux points A, A′ *de coordonnées*

$$x = \pm a, \qquad y = z = 0.$$

La barre BB′ *étant amenée à une hauteur donnée* (*dans une position parallèle à* AA′ *et symétrique par rapport au plan* Oxy), *les cordes supposées tendues, on suspend au* *trapèze un gymnaste* CC′ *dont le centre de gravité est placé au milieu de* BB′ (*le gymnaste est représenté par une droite* CC′ *homogène, sans épaisseur, et de longueur donnée, sa position initiale est verticale*)

Le trapèze est lâché sans vitesse. Au bout d'un temps τ, *le gymnaste lâche le trapèze et, emporté par la vitesse acquise, il tombe librement. On demande à quelle distance et à quel moment le gymnaste atteint le sol. Discussion d'après la hauteur initiale de* BB′ *et la valeur de* τ.

On admet que la résistance de l'air est dirigée en sens inverse de la vitesse et proportionnelle au produit de la masse par la vitesse (*le coefficient de proportionnalité est très petit*). (Juillet 1909.)

Épreuve théorique. — 1° *Un point pesant* A *est assujetti à se déplacer sans frottement sur une courbe rigide* C. *Déterminer quelle doit être la forme de la courbe* C *pour que la projection du point* A *sur l'axe vertical* Oz *soit animé d'un mouvement uniforme de vitesse* a;

2° *Un point matériel* M *décrit, sous l'influence d'une force centrale* F, *une trajectoire dont l'hodographe est une circonférence. Chercher l'expression de l'intensité de la force* F *supposée fonction de la seule distance du point* M *au centre* O *des forces.*

Épreuve pratique. — *Un point matériel* M *de masse* m *est attiré par un centre fixe* O, *l'intensité de la force attractive étant* $\frac{km}{z^2}$, *où* k *est une constante et* $z =$ OM. *A l'instant initial, la vitesse* v_0 *est perpendiculaire au rayon vecteur* r_0. *Calculer les éléments de la trajectoire et déterminer la position du mobile au bout d'un intervalle de temps* t *après l'époque initiale.*

Application numérique : $k = 27 \times 10^9$ C.G.S.: $v_0 = 3^{\text{m}}$ *par seconde,* $r_0 = 1^{\text{km}}$; $t = 1$ *heure.* (Novembre 1909.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Établir les équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

II. *On considère un fil flexible et inextensible dont chaque élément* ds *est soumis à l'action d'une force paral-*

lèle à une direction fixe. Démontrer que la courbe d'équilibre est plane.

En supposant cette courbe située dans le plan xOy, *la force parallèle à* Oy *et représentée par* $\gamma\, ds$, *montrer que l'on a*

$$Y = \frac{c}{\rho \cos^2 \alpha},$$

c désignant une constante, ρ *le rayon de courbure, et* α *l'angle de la tangente avec* Ox.

Quelle doit être la courbure d'équilibre pour que la force γ *soit inversement proportionnelle à la portion de la normale* MP *comprise entre le point d'incidence* M *et le point de rencontre* P *avec l'axe* Oy?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une corde parfaitement flexible et inextensible est enroulée suivant la section droite d'un cylindre convexe à génératrices horizontales. Le coefficient de frottement est égal à* $\frac{1}{2}$. *L'une des extrémités,* A, *supporte un poids de* 500^{kg}; *l'autre,* B, *est soumise à une tension de* 10^{kg}.

Trouver l'angle d'enroulement minimum nécessaire pour que l'équilibre existe.

Cet angle étant donné, ainsi que la charge en A, *entre quelles limites pourra varier la tension en* B *sans que l'équilibre soit rompu?* (Novembre 1909.)