

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 324-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__324_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit $x = f(u)$ la fonction résultant de l'inversion de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = u,$$

avec les conditions

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Trouver, par l'application du théorème d'Abel, l'expression de $f(u+v)$ en fonction rationnelle de $f(u)$, $f(v)$, $f'(u)$ et $f'(v)$.

II. 1° En supposant comme l'expression d'une fonction d'une variable au moyen de l'intégrale double de Fourier, montrer comment on peut résoudre l'équation fonctionnelle en $\varphi(y)$

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(y) \cos(xy) dy,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée.

2° Appliquer la solution trouvée au cas de

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy = \sin^2 x,$$

où λ est une constante.

Pour quelles valeurs de la constante λ l'équation

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy = 0$$

a-t-elle une solution autre que zéro?

(Juillet 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° On considère l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y) dy,$$

$\varphi(y)$ étant une fonction réelle de la variable réelle y .
Montrer que si cette intégrale a un sens pour une valeur x_0 , réelle ou complexe de x , elle aura un sens pour toute valeur de x dont la partie réelle est supérieure à la partie réelle de x_0 .

2° Quelle est la formule permettant de résoudre l'équation fonctionnelle [où $\varphi(y)$ est la fonction inconnue]

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y) dy,$$

quand cette équation est susceptible d'une solution?

3° Appliquer la formule précédente à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{x-\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y) dy,$$

α étant une constante réelle, et la variable x restant supérieure à α .

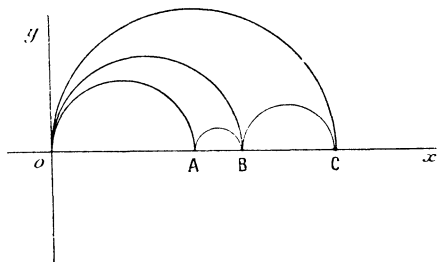
II. On considère l'équation fonctionnelle

$$(x-\alpha)f(x) + \lambda \int_a^b X(x) Y(y) f(y) dy = \psi(x),$$

α étant compris entre a et b et f étant la fonction inconnue;
 $X(x)$ et $Y(y)$ sont respectivement des fonctions données de x et y , ainsi que $\psi(x)$, et sont régulières entre a et b .

On demande de trouver pour quelle valeur de λ cette équation aura une solution $f(x)$ continue entre a et b .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient dans le plan d'une variable complexe $x + iy = z$; tracer les trois demi-cercles de diamètres OA , OB , OC situés sur l'axe des quantités réelles.



On prend l'image de la demi-circonférence $\widehat{OA}$ par rapport au cercle $\widehat{OB}$, ce qui donne la demi-circonférence $\widehat{OC}$. Pareillement, on prend l'image de la demi-circonférence $\widehat{AB}$ par rapport au même cercle $\widehat{OB}$, ce qui donne la demi-circonférence $\widehat{BC}$.

On demande de calculer les deux substitutions fondamentales du groupe fuchsien ainsi engendré et ayant pour polygone fondamental le quadrilatère curviligne $OABCD$.

On posera

$$OA = a, \quad OB = b \quad (a < b).$$

(Octobre 1911.)