Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__287_1>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2184.

(1911, p. 480.)

Le lieu du milieu des cordes d'une parabole de longueur $2l$ *et le lieu des pôles de ces cordes sont deux courbes du quatrième degré asymptotes à la parabole. L'aire comprise entre ces deux courbes est finie et égale à* πl^2, *et reste la même pour n'importe quelle parabole.*

Cette aire est partagée en deux parties égales par la parabole. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soient $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2\ y_2)$ les extrémités d'une corde de la parabole $y^3 = 2px$.

Les coordonnées du milieu de cette corde sont

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

on a

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4l^2,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} &y_1 + y_2 = 2y \\ &y_1^2 + y_2^2 = 4px \\ &(y_1^2 - y_2^2)^2 + 4p^2(y_1 - y_2)^2 = 16p^2 l^2. \end{aligned}\right.$$

Eliminons y_1, y_2, il vient

$$2px = y^2 + \frac{l^2 p^2}{y^2 + p^2},$$

courbe facile à construire. Elle est de degré quatre.

L'aire comprise entre cette courbe et la parabole est

$$\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2 p^2}{y^2 + p^2} dy = \frac{l^2}{2} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{p} \right]_{+\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} l^2.$$

Si M est le milieu de AB et P le pôle de AB, la droite PM est parallèle à l'axe de la parabole, de plus le milieu de PM est sur cette courbe, donc l'aire comprise entre la parabole et le lieu du point P est $\frac{\pi}{2} l^2$.

On en déduit aussi l'équation du lieu du point P

$$2px = y^2 - \frac{l^2 p^2}{y^2 + y^2}.$$

Autres solutions par MM. Bouvaist et T. Ono.