

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 187-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__187_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — *Intégrer l'équation*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

et construire les courbes intégrales.

GÉOMÉTRIE. — *Définition et détermination des développantes des courbes.*

Mécanique. — *Un point de masse 1 se déplace dans un champ de forces défini par les équations*

$$X = \frac{y}{z}, \quad Y = \frac{x}{z}, \quad Z = -\frac{xy}{z^2}.$$

Déterminer les lignes de force, les surfaces de niveau et le travail pour un déplacement donné. Étudier le mouvement du point lorsqu'il est assujéti à se déplacer sans frottement sur une droite donnée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un cercle de rayon R on considère un segment compris entre un arc de mesure 2α et la corde de cet arc. Évaluer le volume engendré par ce segment en tournant autour de sa corde. Application numérique au cas où $R=1$ et $\alpha=28^{\circ}32'$; limite de l'erreur si α est connu à une minute près.*

(Octobre 1910.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la droite D dont l'équation,*

en fonction du paramètre φ , est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \cos^2 \varphi.$$

1° Former l'équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale générale est représentée par la droite D.

2° Exprimer à l'aide du paramètre φ les coordonnées du point D où la droite D touche son enveloppe E et construire cette enveloppe.

3° Calculer la longueur de la courbe E et l'aire du domaine plan qu'elle limite.

4° Exprimer, à l'aide du paramètre φ , les coordonnées du centre de courbure de la courbe E au point P et construire la développée de E.

Comment calculerait-on la longueur d'un arc de cette développée ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un mobile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 . Il est soumis à son poids p et à une résistance kv^2 , proportionnelle au carré de la vitesse v et dirigée en sens contraire :

1° Établir les équations du mouvement ascendant.

2° Déterminer la durée de ce mouvement et la hauteur atteinte. (Application numérique : masse du mobile 1, $v_0 = 300$, $k = \frac{1}{60}$; accélération de la pesanteur, 980; tous ces nombres sont donnés en unités C. G. S.)

3° Établir les équations du mouvement descendant.

4° Déterminer la vitesse du mobile au moment où il repasse par sa position initiale. (Application numérique : mêmes données que plus haut.)

5° Que deviennent les expressions trouvées aux n^{os} 2 et 4, quand on fait tendre k vers 0 ? Expliquer le résultat.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une manivelle OA de longueur r tourne dans un plan fixe OABC autour du point fixe O avec une vitesse angulaire constante ω . Elle entraîne une bielle AB, de longueur a , articulée à OA en A et articulée à une tige BC en B. Des guides fixes maintiennent cette tige sur une droite fixe OBC passant par O. On appellera θ l'angle BOA, x la longueur OB et l'on supposera $a > r$:

(189)

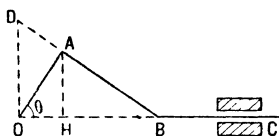
1° Déterminer et construire la courbe fermée lieu du milieu de AB.

2° Calculer l'aire de cette courbe.

3° Exprimer en fonction de θ la vitesse v et l'accélération γ de B.

4° Représenter le rapport $\frac{v}{r\omega}$ par une série entière de puissances croissantes de la quantité $\lambda = \frac{a}{r}$.

5° En appelant D l'intersection de la droite BA avec la



perpendiculaire à OB en O, montrer que v reste proportionnel à OD dans le cours du mouvement.

6° Étudier la variation de la vitesse v pendant le mouvement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne la série

$$\cos x + r \cos 2x + r^2 \cos 3x + \dots + r^n \cos(n+1)x + \dots$$

1° Démontrer que cette série est convergente pour toute valeur de x lorsqu'on a $|r| < 1$.

2° Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série. Calculer à $\frac{1}{100}$ près les racines (comprises entre -180° et $+180^\circ$) des équations

$$S_1(x) = 0, \quad S_2(x) = 0, \quad S_3(x) = 0,$$

où l'on suppose $r = \frac{1}{40}$.

3° Calculer à $\frac{1}{10000}$ près la somme de la série donnée lorsque

$$r = \frac{1}{100}, \quad x = 61^{\circ}.$$

(Juin 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1^o *Trouver l'intégrale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \lambda = -\frac{3a}{2} \sin 2t.$$

Montrer que si l'on détermine les constantes d'intégration de manière qu'on ait, pour $t = 0$,

$$\lambda = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = a;$$

l'intégrale trouvée se réduit à $\lambda = a \sin t \cos t$.

2° *Trouver l'enveloppe (E) des droites définies par l'équation*

$$x \cos t + y \sin t - a \sin t \cos t = 0.$$

Exprimer, en fonction de t , les coordonnées du point de contact et montrer que l'élimination du paramètre t donne, entre les coordonnées, l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Étudier la forme de la courbe, calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure, la longueur de l'arc, comptée à partir du point $t = 0$.

Trouver la développée. Montrer que si l'on fait tourner les axes de coordonnées autour de l'origine d'un angle de 45° , les équations qui définissent la développée prennent une forme semblable à celles qui définissent l'enveloppe (E) dans le premier système de coordonnées.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}};$$

1° *En faisant le changement de variable*

$$1 - x = z^2;$$

2° *Au moyen de l'intégration par parties.*

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} \right) y = x^2.$$

Vérifier qu'elle admet comme solution particulière un polynôme du troisième degré.

(Juillet 1910.)