NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. HALPHEN

Sur un problème d'énumération

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 176-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__176_1>

[J 1 b]

SUR UN PROBLÈME D'ÉNUMÉRATION;

PAR M. CH. HALPHEN.

Un problème, déjà ancien, posé récemment aux Examens oraux de l'École Polytechnique, m'a suggéré la Note suivante. Voici quelle était la question :

On joint deux à deux par des droites, de toutes les manières possibles, n points donnés dans un plan; en combien de points ces droites se coupent-elles?

Je rappelle rapidement la solution : k droites d'un plan se coupent en $\frac{k(k-1)}{2}$ points; le nombre des droites est ici $k = C_n^2$. Il faut déduire du nombre total des points d'intersection les points donnés; chacun d'eux étant commun à $n-1$ droites, compte pour $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points confondus. Le nombre cherché est donc

$$N = \frac{C_n^2(C_n^2-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

ou encore

$$N = 3C_n^4.$$

Ce résultat peut encore s'obtenir d'une manière très simple. Si $n = 4$, on a trois points d'intersection (la figure étant un quadrilatère complet). On aura donc autant de fois trois points d'intersection que de groupements différents de 4 points; le nombre cherché est alors $3C_n^4$.

Quoique ce mode de raisonnement soit plus élégant que le premier, je ne le place qu'en second lieu, parce qu'il ne se prête pas aisément à la généralisation que j'ai en vue.

Proposons-nous le problème suivant :

Étant donnés n points dans l'espace, on considère tous les plans déterminés par trois quelconques de ces points ; quel est le nombre de leurs droites d'intersection?

k plans se coupent suivant $\frac{k(k-1)}{2}$ droites, et les n points déterminent $k = C_n^3$ plans distincts. On peut classer leurs intersections en trois catégories : 1° les droites passant par deux des points donnés ; 2° les droites passant seulement par un des points donnés; 3° les droites qui ne passent par aucun de ces points.

1° Si l'on prend deux des points, on voit, en leur associant successivement les $n - 2$ autres, que la droite qui les joint est commune à $n - 2$ plans; elle compte donc pour $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ droites confondues. Les droites joignant les points 2 à 2, étant au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, comptent au total pour

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = 6C_n^4 \text{ droites d'intersection.}$$

2° Si l'on prend un seul point, on peut l'associer de C_{n-1}^2 manières différentes à deux des points restants; on aura donc $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ plans se coupant suivant $\frac{h(h-1)}{2}$ droites *distinctes ou confondues*, passant par le point choisi. En faisant de même avec tous les points, on obtiendra $\frac{nh(h-1)}{2}$ droites distinctes ou confondues.

Parmi ces droites se trouvent celles que j'ai classées dans la première catégorie, et chacune d'elles est répétée deux fois. En effet, si je choisis d'abord le point a, je considérerai les plans abc, abd, qui se coupent suivant ab; lorsque j'isolerai ensuite le point b, je retrouverai les mêmes plans bac, bad; de sorte que ab a été comptée deux fois. Or, toutes les droites telles que ab comptent pour $6C_n^4$ droites d'intersection; le nombre véritable des droites de seconde espèce, ne passant que par un seul des points donnés, est donc

$$\frac{nh(h-1)}{2} - 12C_n^4,$$

ou, en remplaçant h par sa valeur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8} = 15C_n^5.$$

3° On déduit aisément de là le nombre des droites d'intersection ne passant par aucun des points donnés. C'est

$$\frac{k(k-1)}{2} - 6C_n^4 - 15C_n^5,$$

ou, en remplaçant k par sa valeur C_n^3,

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72} = 10C_n^6.$$

Cette formule montre que, pour obtenir des droites d'intersection des trois espèces, il faut prendre au moins $n = 6$. Or, il paraît difficile de faire la figure dans ce cas, et d'y compter les 15 droites de première espèce, les 90 de deuxième, et les 10 de troisième, suivant lesquelles se coupent les 20 plans que l'on obtient. C'est la raison pour laquelle la méthode, appliquée plus haut au problème élémentaire, ne pouvait s'étendre au cas actuel.

Pour compléter l'étude de ce problème, je vais chercher *le nombre des trièdres* formés par les plans que déterminent, trois à trois, les n points donnés, c'est-à-dire le nombre des points communs à ces plans trois à trois, car je ne compterai que pour un seul les différents trièdres de même sommet formés par trois plans déterminés. Dans ces conditions, k plans forment en général C_k^3 trièdres dont les sommets sont distincts ; on a ici $k = C_n^3$ plans différents.

1° Parmi ces plans se trouvent ceux qui passent par une droite joignant deux des points donnés; ils ne forment pas de trièdre. Il y en a $n-2$, ce qui supprime C_{n-2}^3 trièdres; et comme il existe $\frac{n(n-1)}{2}$ droites joignant deux à deux les n points, on doit déduire, du nombre total des trièdres, le nombre

$$N_1 = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^3$$

ou

$$N_1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{12} = 10\,C_n^5.$$

2° Chacun des points donnés est sommet commun à plusieurs trièdres ; il y passe $p = C_{n-1}^2$ plans qui devraient se couper en C_p^3 points distincts. Les points donnés comptent donc pour $n\,C_p^3$ sommets de trièdres ; mais il faut déduire de ce nombre les groupements du paragraphe précédent dont il a été tenu compte ici, et cela deux fois. De sorte que tous les points donnés sont les sommets de

$$N_2 = n\,C_p^3 - 20\,C_n^5 \text{ trièdres};$$

on peut écrire

$$N_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{48}(n^3 - 3n^2 - 10n + 32).$$

3° Les trièdres autres que les précédents forment encore deux groupes : ceux dont les sommets sont sur les droites joignant deux à deux les points donnés, et ceux dont les sommets sont en dehors de ces droites.

Si l'on considère une droite ab joignant deux des points donnés, elle est coupée par les C_{n-2}^3 plans qui ne passent ni par a, ni par b, en C_{n-2}^3 points distincts; chacun de ces points est commun au plan sécant et aux $n-2$ plans passant par ab, lesquels forment C_{n-2}^2 trièdres, comme on voit en associant le plan sécant aux différents groupes de deux plans passant par ab. On peut remarquer aussi que le point considéré est commun à $n-1$ plans et doit compter pour C_{n-1}^3 sommets de trièdres, nombre dont il faut déduire les combinaisons trois à trois des plans passant par ab, qui ne forment pas de trièdre, et dont on a déjà tenu compte pour leur valeur C_{n-2}^{3} (*voir* 1°); or

$$C_{n-1}^{3} - C_{n-2}^{3} = C_{n-2}^{2}.$$

En résumé, sur toutes les droites telles que ab, on a

$$\frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{3} \text{ points,}$$

sommets de

$$N_3 = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{2} C_{n-2}^{3} \text{ trièdres;}$$

on peut encore écrire

$$N_3 = 10\, C_n^5 C_{n-2}^{2}.$$

4° Enfin, le nombre des sommets non communs à plusieurs trièdres, situés en dehors des droites joignant les points donnés deux à deux, est

$$N_4 = C_k^3 - (N_1 + N_2 + N_3)$$

ou

$$N_4 = C_k^3 - n\, C_p^3 - 10\, C_n^5 (C_{n-2}^{2} - 1).$$

Dans cette formule, n représente le nombre des points donnés, et l'on fait

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \qquad k = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ces derniers points ne se manifestent qu'à partir de $n = 6$. Dans ce cas de $n = 6$, on a $N_2 = 600$: chacun des points donnés est donc sommet commun à 100 trièdres différents. Il y a $N_3 = 360$ trièdres ayant 90 sommets sur les 15 droites joignant les points deux à deux ; sur chacune de ces droites se trouvent 6 sommets dont chacun est commun à 4 trièdres. Il y a enfin $N_4 = 120$ trièdres dont les sommets distincts sont en dehors des droites précédentes.

En prenant seulement $n = 5$, on trouve

$$N_2 = 80, \quad N_3 = 30, \quad N_4 = 0.$$

On remarquera que chacun des points donnés est sommet commun à 16 trièdres. Pour vérifier l'exactitude de ce nombre déjà assez grand, et énumérer ces trièdres, voici comment on peut procéder. La méthode s'appliquerait évidemment à un nombre quelconque de points.

Je considère un des points donnés, et je nomme 1, 2, 3, 4, les droites qui le joignent aux quatre autres. Alors, tout plan passant par ce point contient deux des quatre droites, et je le désignerai par les numéros de ces deux droites. On a donc les 6 plans

12, 13, 14, 23, 24, 34.

Pour former un trièdre ayant son sommet au point choisi, il suffit d'associer trois de ces plans de telle façon que chaque chiffre soit répété deux fois; plus exactement, de telle façon qu'aucun des chiffres ne soit répété trois fois; et les groupements formés doivent être tous différents. Le Tableau suivant, donnant les 16 combinaisons utiles, montre suffisamment comment on peut opérer pour énumérer ces trièdres sans omission ni répétition :

										Trièdres distincts.
12	avec	13	et	23	ou	24	ou	34		3
12	»	14	»	23	»	24	»	34		3
12	»	23	»	34						1
12	»	24	»	34						1
13	»	14	»	23	»	24	»	34		3
13	»	23	»	24						1
13	»	24	»	34						1
14	»	23	»	24	»	34				2
14	»	24	»	aucun autre						0
23	»	24	»	34						1
				Total	. . . .					16

Ce procédé me paraît utile, car il ne faut pas songer à vérifier un résultat de ce genre sur une figure, même bien faite.