G. Valiron

Sur quelques théorèmes de Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 149-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__149_1>

[M[1]3]

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LAGUERRE;

PAR M. G. VALIRON.

Dans une Note *Sur les courbes planes algébriques* (*Comptes rendus*, 1865), Laguerre a énoncé quelques remarquables théorèmes, qu'il a appliqués dans diverses autres Notes (voir *Œuvres*, t. II, p. 23, 64, 178, 480, 537). Je me propose de donner ici une démonstration simple de certains de ces théorèmes.

Si x et y sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point M, les nombres complexes $z = x + iy$, $z' = x - iy$, sont les coordonnées isotropes de ce point. O étant l'origine des coordonnées, α, l'un des angles de la droite OM avec Ox, on a

$$\mathrm{OM} = \sqrt{|zz'|},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{A}\left(\frac{z}{z'}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{L}\left|\frac{z}{z'}\right|,$$

en désignant par $\mathrm{A}(u)$ l'argument du nombre u. La deuxième égalité définit α à π près. Étant donnés deux points $\mathrm{M}_1(z_1, z'_1)$, $\mathrm{M}_2(z_2, z'_2)$, imaginaires conjugués, les nombres z_2 et z'_2 sont respectivement imaginaires conjugués de z'_1 et z_1, donc

$$OM_1 OM_2 = \left| \sqrt{z_1 z'_2 z_2 z'_2} \right| = | z_1 z_2 |,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2} A \left(\frac{z_1}{z'_1} \frac{z_2}{z'_2} \right) = A(z_1 z_2).$$

Étant donnés p points $M_1, M_2, \ldots, M_p$, Laguerre appelle *orientation du faisceau* $OM_1, OM_2, \ldots, OM_p$ la somme (définie à π près) des angles de ces directions avec Ox; si à toute direction OM_q correspond la direction imaginaire conjuguée, l'orientation A du faisceau est, en désignant par z_q, z'_q les coordonnées de M_q,

$$A = \sum_{q=1}^{q=p} \alpha_p = A(z_1, z_2, \ldots, z_p) = \frac{1}{2} A \left(\frac{z_1}{z'_1} \frac{z_2}{z'_2} \cdots \frac{z_p}{z'_p} \right).$$

L'orientation de p droites est définie en menant par l'origine des parallèles à ces droites, donc à π près.

Laguerre introduit encore la notion de *centre harmonique de n points par rapport à un point* P : si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les n points donnés, on prend les inverses de ces points par rapport à un cercle arbitraire de centre P, on forme la somme géométrique des vecteurs qui ont pour origine P et extrémité ces n points inverses, on divise ce vecteur-somme par n et l'on prend l'inverse de l'extrémité obtenue par rapport au cercle considéré; on obtient ainsi le centre harmonique de $M_1, \ldots, M_n$ par rapport à P. Si z_q, z'_q sont les coordonnées de M_q, z, z' celles du point P, et Z, Z' celles du centre harmonique, on a

$$\text{(1)} \qquad \frac{n}{Z - z} = \sum_1^n \frac{1}{z_q - z}$$

et l'égalité analogue. Ceci montre, en particulier, que lorsque P s'éloigne indéfiniment, le centre harmonique tend vers le centre des moyennes distances.

Supposons que, par chaque point M_q, on mène la perpendiculaire à la droite PM_q, et qu'on prenne la première polaire du point P par rapport à l'ensemble de ces droites : *cette polaire est la perpendiculaire menée par le centre harmonique à la droite joignant ce point au point* P. En effet, en prenant P pour origine, la perpendiculaire à PM_q menée par M_q a pour équation

$$\frac{z}{z_q} + \frac{z'}{z'_q} - 2 = 0 \tag{2}$$

et la polaire de P par rapport à l'ensemble de ces droites s'obtient en faisant la somme des équations telles que (2), son équation est donc

$$z\sum_1^n \frac{1}{z_q} + z'\sum_1^n \frac{1}{z'_q} - 2n = 0;$$

en considérant la relation (1), on voit que la proposition est démontrée.

Si $f(x, y, 1) = 0$ est l'équation à coefficients réels d'une courbe en coordonnées cartésiennes, son équation en coordonnées isotropes, est

$$f\left(\frac{z+z'}{2}, \frac{z-z'}{2i}, 1\right) \equiv F(z, z', 1) = 0.$$

Si la courbe est p fois circulaire, son degré étant n, les termes de plus haut degré dans f et F sont de la forme

$$(x^2+y^2)^p \varphi_{n-2p}(x, y) \equiv (zz')^p \Phi_{n-2p}(z, z').$$

Laguerre appelle *puissance du point* P (x_0, y_0), (z_0, z'_0), *par rapport à cette courbe*, le nombre

$$(3) \qquad \left|\frac{f(x_0, y_0, 1}{\varphi_{n-2p}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i}\right)}\right| = \left|\frac{F(z_0, z'_0, 1)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right|;$$

dans le cas où $p = 0$, on a simplement

$$\left|\frac{f(x_0, y_0, 1)}{f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i}, 0\right)}\right| = \left|\frac{F(z_0, z'_0. 1)}{F(1, 0, 0)}\right|.$$

Ces définitions étant données, on a les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Étant donnés un point* P *et une courbe algébrique de degré n coupant p fois la droite de l'infini aux points cycliques, un cercle passant par* P *coupe la courbe en* $2n - 2p$ *points à distance finie; le produit des distances du point* P *à ces points, multiplié par le produit des distances du centre du cercle aux p foyers singuliers, est égal à la puissance du point* P, *multipliée par la* $(n-p)^{i\grave{e}me}$ *puissance du rayon du cercle.*

En effet, on peut prendre P pour origine, ce qui ne change pas l'expression de la puissance; soit alors

$$(4) \quad \begin{aligned} F(z, z', 1) \equiv (z, z')^p \Phi_{n-2p}(z, z') \\ + (z, z')^{p-1} \Phi_{n-2p+1}(z, z') + \ldots \\ + \Phi_{n-p}(z, z') + \ldots + \Phi_0 = 0. \end{aligned}$$

La puissance de l'origine est

$$\left|\frac{\Phi_0}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right|.$$

Considérons un cercle passant par l'origine, soit

$$(5) \qquad zz' - zz'_0 - z'z_0 = 0;$$

z_0 et z'_0 sont les coordonnées du centre, le rayon est donc $r = |z_0| = |z'_0|$. L'équation aux z de l'intersection des courbes (4) et (5) est

$$(6)\quad (z^2 z'_0)^p \Phi_{n-2p}[z(z-z_0), zz'_0] + \ldots \\ + \Phi_{n-p}[z(z-z_0), zz'_0] + \ldots + (z-z_0)^{n-p}\Phi_0 = 0.$$

Comme la courbe (4) et le cercle (5) ont des équations cartésiennes réelles, les points communs sont deux à deux imaginaires conjugués, et le produit des distances de ces points à l'origine est le module du produit des racines de l'équation (6), donc

$$\left|\frac{\Phi_0 z_0^{n-p}}{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0)}\right|,$$

ou encore

$$(7)\quad \left|\frac{\Phi_0}{\Phi_{n-2p}(1,0)}\right| r^{n-p} : \left|\frac{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0)}{\Phi_{n-2p}(1,0)}\right|.$$

Les foyers singuliers sont les points réels dont les coordonnées z' vérifient l'équation

$$(8)\quad z'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + z'^{p-1}\Phi_{n-2p+1}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0) = 0,$$

l'expression qui est en dénominateur dans l'expression (7) représente donc le produit des distances du point z_0, z'_0, c'est-à-dire du centre du cercle considéré, aux p foyers singuliers; et la proposition est démontrée.

Si, au lieu de considérer un cercle, on considère une droite passant par le point P, on obtient la proposition suivante, qui peut aussi s'obtenir comme cas limite du théorème I :

Le produit des distances du point P *aux n points où une droite* D *passant par* P *coupe une courbe p fois circulaire, multiplié par le produit des doubles* *des sinus des angles de P avec les asymptotes non isotropes, est égal à la puissance de P.*

On en déduit le théorème de Newton.

Si, en même temps que l'équation (6), on considère l'équation en z' formée de la même façon, on obtient l'orientation A du faisceau joignant P aux $2n-2p$ points communs en prenant la moitié de l'argument du quotient des produits des racines, donc

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\mathrm{A}\left[\frac{z_0^{n-p}}{z_0'^{n-p}}\,\frac{z_0^p\Phi_{n-2p}(0,1)+\ldots+\Phi_{n-p}(0,1)}{z_0'^p\Phi_{n-2p}(1,0)+\ldots+\Phi_{n-p}(1,0)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{A}\left[(-1)^n\frac{\Phi_{n-2p}(0,1)}{\Phi_{n-2p}(1,0)}\right]\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{A}\left[\frac{\dfrac{z_0^p\Phi_{n-2p}(0,1)+\ldots+\Psi_{n-p}(0,1)}{\Phi_{n-2p}(0,1)}}{\dfrac{z_0'^p\Phi_{n-2p}(1,0)+\ldots+\Phi_{n-p}(1,0)}{\Phi_{n-2p}(1,0)}}\right]\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{A}\left[\left(\frac{z_0}{z_0'}\right)^{n-p}(-1)^n\right];
\end{aligned}$$

comme le faisceau des directions asymptotiques non isotropes est

$$\Phi_{n-2p}(z, z') = 0,$$

le premier terme du troisième membre de l'égalité précédente représente l'orientation de ce faisceau; d'après l'équation (8) et l'équation analogue qui donne les z des foyers singuliers, le deuxième terme représente l'orientation du faisceau des droites joignant le point P aux foyers singuliers; enfin le dernier terme est nul $\left(\text{à } \frac{p\pi}{2} \text{ près}\right)$, si le centre du cercle est sur Oy; on a ainsi la proposition suivante :

La somme des angles que font les droites joignant un point P aux points où un cercle passant par P coupe une courbe algébrique, avec la tangente au *point* P *à ce cercle, est égale* $\left(\text{à } \frac{p\pi}{2} \text{ près}\right)$ *à la somme des angles que font avec cette même tangente les directions asymptotiques non isotropes, et les droites joignant* P *aux p foyers singuliers.*

Il est évident que, sous cette dernière forme, la proposition est encore vraie lorsque le point P est sur la courbe.

Théorème II. — *Un cercle étant tracé dans le plan d'une courbe algébrique, la somme des angles que font, avec une direction fixe, les rayons aboutissant aux points d'intersection à distance finie, est égale au double de la somme des angles que font, avec cette direction, les directions asymptotiques, augmentée (s'il y a lieu) de la double somme des angles que font avec cette direction les droites joignant le centre du cercle aux foyers singuliers.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente. La démonstration directe se fait aussi très facilement, l'équation de la courbe étant toujours l'équation (4), et le cercle ayant pour équation

$$zz' = r^2, \tag{9}$$

l'équation aux z de l'intersection est

$$\begin{aligned}\Phi_{n-p}(z^2, r^2) + \ldots \\ + z^k r^{2p}\Phi_{n-2p}(z^2, r^2) + \ldots + z^{n-p}\Phi_0 = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

le produit des racines est donc

$$\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)} r^{2n-2p},$$

l'orientation Λ_1 du faisceau des droites joignant le centre du cercle (l'origine) aux points communs des deux courbes est, par suite, donné par

$$A_I = A\left[\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}\right];$$

d'autre part, d'après ce qui précède, l'orientation du faisceau des directions asymptotiques non isotropes est

$$A_A = \frac{1}{2} A\left[\frac{\Phi_{n-2p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right] + \frac{n\pi}{2},$$

et celle du faisceau des droites joignant l'origine aux foyers singuliers

$$A_F = \frac{1}{2} A\left[\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(0, 1)} : \frac{\Phi_{n-p}(1, 0)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right],$$

par suite

$$A_I = 2\, A_A + 2\, A_F,$$

la proposition est donc démontrée. Elle peut d'ailleurs être précisée comme l'a montré Laguerre : à chaque point d'intersection de la courbe et du cercle on peut en faire correspondre un autre qui sera le point imaginaire conjugué, si le point considéré est imaginaire; les points communs sont alors sur $n - p$ droites réelles, et l'orientation des perpendiculaires abaissées du centre sur ces droites est, à π près,

$$\frac{1}{2} A_I = \frac{1}{2} A\left(\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}\right);$$

on a donc la proposition précisée :

Si l'on considère $n-p$ droites réelles contenant les points d'intersection de la courbe de degré n avec un cercle, l'orientation des rayons perpendiculaires à ces droites est égale, à $\frac{n\pi}{2}$ près, à l'orientation du système des directions asymptotiques et *des droites joignant le centre aux p foyers singuliers.*

Considérons maintenant les normales aux points communs à distance finie de la courbe et du cercle, si $M_q(z_q, z'_q)$ est l'un de ces points, la normale a pour équation

$$z\frac{F'_{z_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - z'\frac{F'_{z'_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - 1 = 0,$$

la polaire harmonique du point P (l'origine), par rapport à ces normales est donc

$$(11) \qquad z\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{F'_{z_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - z'\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{F'_{z'_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - (2n-2p) = 0;$$

les nombres z_q sont les racines de l'équation (10) et l'on a $z'_q = \frac{r^2}{z_q}$; si l'on désigne par $G(z)$ le premier membre de l'équation (10)

$$G(z) = z^{n-p}F\left(z, \frac{r^2}{z}, 1\right),$$

on obtient

$$z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q} = \frac{1}{z_q^{n-p-1}}G'(z_q),$$

et en posant

$$G_1(z) = z^{n-p}F'_z\left(z, \frac{r^2}{z}, 1\right),$$

on voit que le coefficient de z dans l'équation (11) est

$$\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{G_1(z_q)}{z_q G'(z_q)} = -\frac{G_1(0)}{G(0)} = -\frac{\Phi_{n-p-1}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(0, 1)},$$

(et égal à *zéro* pour $p = 0$). De même le coefficient de z' est égal à

$$\frac{\Phi_{n-p-1}(1, 0)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}.$$

Par suite la droite (11) est à l'infini, s'il n'y a pas de foyers singuliers; si la courbe passe par les points cycliques, elle s'écrit

$$z\frac{\Phi_{n-p-1}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(0, 1)} + z'\frac{\Phi_{n-p-1}(1, 0)}{\Phi_{n-p}(1, 0)} + (2n - 2p) = 0;$$

en se reportant à l'équation (8), on voit que les coefficients de z et z' sont les sommes changées de signe des inverses des coordonnées des foyers singuliers; on a donc le théorème suivant de Liouville :

La polaire harmonique par rapport au centre d'un cercle des normales à une courbe aux points d'intersection de ce cercle et de la courbe est la droite de l'infini lorsque la courbe n'est pas circulaire; si la courbe est p fois circulaire et de degré n, cette polaire coïncide avec la droite obtenue en prenant l'homothétique dans le rapport $\frac{n-p}{p}$ de la polaire des droites menées par chaque foyer singulier perpendiculairement à la droite joignant ce foyer au centre du cercle (¹).

THÉORÈME III. — *L'orientation des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique égale l'orientation des droites joignant ce point aux foyers réels* (²).

(¹) Ce théorème est appliqué par Laguerre à l'étude des normales issues d'un point à une conique (*Œuvres*, 2, p. 456).

(²) Ce théorème a été énoncé avant Laguerre par SIEBECK, *Journal de Crelle*, 1864, p. 175.

Nous prendrons encore le point P pour origine, et nous considérerons l'équation tangentielle de la courbe en coordonnées isotropes

$$G(u, v, w) = 0.$$

Nous poserons

$$G(u, v, w) \equiv g_n(u, v) + w g_{n-1}(u, v) + \ldots + w^p g_{n-p}(u, v) = 0,$$

les tangentes menées par l'origine ont pour équation

$$\frac{z}{z'} = t, \tag{12}$$

où t est racine de l'équation

$$G(1, -t, 0) \equiv g_n(1, -t) = 0; \tag{13}$$

l'orientation de ces tangentes est donc, en supposant toujours que l'équation cartésienne de la courbe est réelle

$$A_T = \frac{1}{2} A \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_n(0, 1)} \right].$$

D'autre part, les foyers réels sont les points réels tels que les droites isotropes passant par ces points sont tangentes à la courbe, leurs coordonnées vérifient donc les équations

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(1, 0, -z) \equiv g_n(1, 0) + \ldots + z^p (-1)^p g_{n-p}(1, 0) = 0, \\ G(0, 1, -z') \equiv g_n(0, 1) + \ldots + z'^p (-1)^p g_{n-p}(0, 1) = 0' \end{array} \right.$$

et les foyers à l'infini correspondent à

$$g_{n-p}(z', -z) = 0. \tag{15}$$

L'orientation A_f du faisceau des droites joignant l'origine à *tous* les foyers est donc

$$A_f = \frac{1}{2} A \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_{n-p}(1, 0)} : \frac{g_n(0, 1)}{g_{n-p}(0, 1)} \right] + \frac{1}{2} A \left[\frac{g_{n-p}(1, 0)}{g_{n-p}(0, 1)} \right]$$
$$= \frac{i}{2} A \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_n(0, 1)} \right] = A_T,$$

ce qui démontre la proposition.

Nous allons montrer maintenant que la somme des inverses des coordonnées des foyers réels est égale à la somme correspondante formée avec les coordonnées des points de contact. Soient z_q, z'_q les coordonnées du point de contact M_q; ζ_q, ζ'_q celles du foyer F_q; d'après les équations (14), on a

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{\zeta_q} = \frac{g_{n-1}(1,0)}{g_n(1,0)}, \\ \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{\zeta'_q} = \frac{g_{n-1}(0,1)}{g_n(0,1)}. \end{cases}$$

D'autre part, si t_q est la racine de l'équation (13) donnant le point M_q, les coordonnées de ce point sont

$$z_q = \frac{\dfrac{\partial g_n}{\partial u}(1, -t_q)}{g_{n-1}(1, -t_q)}, \qquad z'_q = \frac{\dfrac{\partial g_n}{\partial v}(1, -t_q)}{g_{n-1}(1, -t_q)};$$

or, d'après l'identité bien connue de la décomposition des fractions rationnelles, on a

$$(17)\qquad \begin{aligned} \frac{g_{n-1}(u,v)}{g_n(u,v)} &= \sum_1^n \frac{g_{n-1}(1, -t_q)}{\dfrac{\partial g_n}{\partial u}(1, -t_q)} \frac{t_q}{ut_q + v} \\ &= \sum_1^n \frac{g_{n-1}(1, -t_q)}{\dfrac{\partial g_n}{\partial v}(1, -t_q)} \frac{1}{ut_q + v}; \end{aligned}$$

et en faisant soit $u = 1$, $v = 0$, soit $u = 0$, $v = 1$, on obtient

$$(18)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{z_q} = \frac{g_{n-1}(1,0)}{g_n(1,0)} = \sum_1^n \frac{1}{\zeta_q}, \\ \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{z'_q} = \frac{g_{n-1}(0,1)}{g_n(0,1)} = \sum_1^n \frac{1}{\zeta'_q}. \end{cases}$$

Ce sont les égalités signalées. D'après ce qui a été vu au début, elles s'interprètent comme il suit :

Le centre harmonique relativement à un point P *des points de contact des tangentes menées par ce point à une courbe algébrique coïncide avec celui des foyers réels.*

Ou encore :

La polaire harmonique d'un point P *par rapport aux normales menées à une courbe aux points de contact des tangentes issues de* P *coïncide avec la polaire de* P *relative aux droites menées par chaque foyer réel, perpendiculairement à la droite joignant ce foyer au point* P.

Dans ces énoncés les foyers à l'infini interviennent; on peut ne pas en tenir compte en prenant dans le premier théorème, par exemple, le point homothétique du centre harmonique des foyers à distance finie dans le rapport $\frac{n}{p}$, le point P étant le centre d'homothétie.

Lorsque le point P tend vers un point Q de la courbe, deux des normales tendent vers la normale en Q, et le centre harmonique correspondant a pour limite le centre harmonique de Q par rapport aux foyers de la parabole osculatrice en Q; on obtient ainsi une construction de cette parabole, lorsque l'on connaît les tangentes menées par Q.

Si le point P s'éloigne indéfiniment, et que la courbe ne soit pas tangente à la droite de l'infini, on voit que : *le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une droite coïncide avec celui des foyers réels.* C'est un théorème de Chasles.

Supposons encore que P soit à l'infini, et que la courbe soit tangente à la droite de l'infini, tous les points de contacts étant de rebroussement, alors on a

$$g_{n-p+1}(u, v) \equiv g_{n-p}(u, v)(\alpha u + \beta v),$$

et l'on voit bien aisément que la proposition précédente est encore vraie : *le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une droite coïncide avec le centre des moyennes distances des foyers réels à distance finie.* En appliquant ces deux propositions à une courbe et à sa développée, on voit que : *le centre des moyennes distances des points d'incidence des normales à une courbe algébrique parallèle à une même droite, coïncide avec le centre des moyennes distances des centres de courbure.* Cette proposition due à Duhamel montre encore que la somme algébrique des rayons de courbure aux points d'incidence considérés est nulle, ou encore que, lorsque le système des tangentes parallèles à une droite tourne, la somme algébrique des arcs parcourus par les points de contact est nulle [1].

Lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini aux points cycliques, le théorème III doit être modifié de la façon suivante : la différence entre l'orientation des tangentes menées par P et l'orientation des droites joignant P aux foyers à distance finie est constante; on le voit immédiatement en remarquant que les foyers à l'infini doivent être remplacés par les points à l'infini dans les directions définies par l'équation

$$g_{n-p+q}(z', z) = 0,$$

---

[1] Ces propositions sont déduites (en sens inverse), par Duhamel, d'une égalité de Liouville : LIOUVILLE, *Mémoire sur la théorie de l'élimination* (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 6, 1841, n° 19).

$g_{n-p+q}(u, v)$ étant le premier des polynomes $g_i(u, v)$ qui ne s'annule pas pour $u = 0$, $v = 0$.

Les deux énoncés relatifs aux centres ou polaires harmoniques subsistent évidemment. Enfin, dans le théorème de Duhamel nous avons supposé que la courbe n'est pas tangente à la droite de l'infini.