

P. MAGRON

Sur le point de Frégier dans l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 145-149

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L^{15a}]

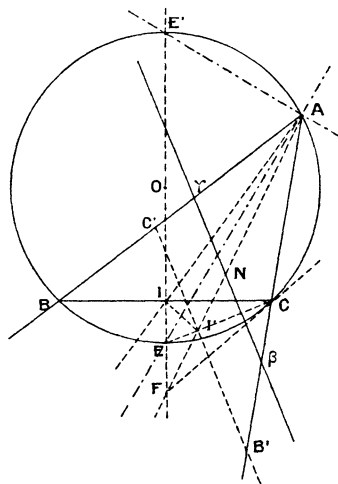
SUR LE POINT DE FRÉGIER DANS L'HYPERBOLE;

PAR M. P. MAGRON,
Professeur au Lycée de Troyes.

THÉOREME. — *Étant donnée une hyperbole (H) d'asymptotes AB, AC passant en I, où elle admet pour tangente BC, le point de Frégier relatif à I est le pôle de BC par rapport au cercle ABC.*

En effet, le point F est sur la perpendiculaire à BC en son milieu I (*fig. 1*) et sur la droite symétrique

Fig. 1.



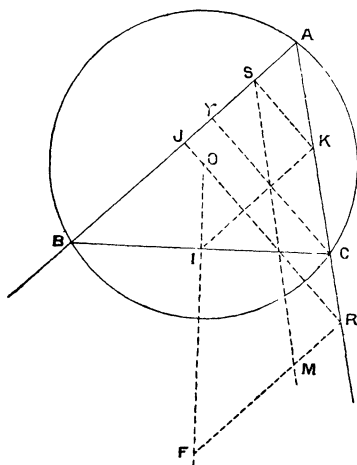
de AI par rapport à l'axe AE, ce qui correspond au point I' de (H) symétrique de I par rapport à AE. Comme IF passe par le centre O du cercle ABC et

que AE est bissectrice de $\widehat{IAF}$, F, E, I, E' sont conjugués et BC est bien la polaire de F dans le cercle circonscrit au triangle ABC.

THÉOREME. — Si β et γ sont les pieds des hauteurs relatives à B et C dans le triangle ABC, la droite $\beta\gamma$ est la polaire du point de Frégier par rapport à l'hyperbole (H).

Nous allons montrer que la polaire de γ qui est parallèle à AB coupe OI en un point F qui est le point de Frégier relatif à I. Soient J et K (*fig. 2*) les milieux

Fig. 2.



de AB et AC, la tangente autre que l'asymptote menée de γ est telle que, si M est le point de contact et si l'on mène MR et MS parallèles à AB et à AC, on ait en ASK et AJR deux triangles semblables; KS étant parallèle à C γ , JR l'est aussi et R est donc sur la perpendiculaire

élevée à AB en son milieu J. On a alors

$$\widehat{JRB} = \widehat{JRA} = \frac{\pi}{2} - A$$

et aussi

$$\widehat{B} = \frac{\pi}{2} - A.$$

Par conséquent, le cercle construit sur OF comme diamètre qui passe en R puisque $\widehat{ORF}$ est droit, passe aussi par B et C et FC est perpendiculaire à OC; donc, F est le pôle de BC dans le cercle ABC. C'est, par suite, le point de Frégier de I. De même, la polaire de β passe par F, donc, $\beta\gamma$ est la polaire de F par rapport à l'hyperbole (H).

Remarque. — On voyait immédiatement que la polaire était parallèle à $\beta\gamma$, car elle est parallèle à la tangente en I' (*fig. 1*), puisque AF et cette direction sont conjuguées; or, la tangente en I' est antiparallèle à BC, donc parallèle à $\beta\gamma$.

THÉORÈME. — *Quand I décrit l'hyperbole (H), F décrit une hyperbole (F) ayant même centre et mêmes asymptotes que (H), donc homothétique de (H), avec A pour centre d'homothétie.*

En effet, on a

$$(1) \quad EI = CE \cos \widehat{IEC}$$

et dans le triangle ECF

$$(2) \quad \frac{CE}{\sin \widehat{IFC}} = \frac{EF}{\sin \widehat{ECF}};$$

or on voit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{IEC} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\ \widehat{IFC} = \frac{\pi}{2} - A \\ \widehat{ECF} = \frac{A}{2} \end{array} \right.$$

en comparant (1) et (2), il vient alors :

$$(3) \quad \frac{AI}{AF} = \frac{EI}{EF} = \cos A,$$

ce qui prouve bien le théorème énoncé, car

$$\frac{AI'}{AF} = \cos A.$$

Remarques. — I. Traçons la tangente en I' à l'hyperbole (H), elle coupe les asymptotes en B' et C' (fig. 1). AI' coupe $\beta\gamma$ en N tel que

$$(4) \quad \frac{AN}{AI'} = \frac{A\beta}{AB'} = \frac{A\beta}{AB} = \cos A.$$

donc N décrit aussi une hyperbole (N) homothétique de (H) avec A pour centre d'homothétie, et (N) et (F) sont les transformées par polaires réciproques par rapport à (H); si l'existence de l'une est démontrée, l'existence de l'autre s'en déduit.

II. De (3) et (4) on déduit

$$\overline{AI'}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AJ},$$

ce qui prouve que N est, sur $\beta\gamma$, conjugué de F par rapport à (H). D'après la remarque du second théorème, on peut immédiatement conclure que $\beta\gamma$ est la polaire de F par rapport à (H).

III. Cette propriété est vraie pour les trois coniques;

dans le cas de la parabole, on obtient une parabole égale à la première qui a subi une translation égale à $2p$, p étant le paramètre, car

$$I'F = 2MN = 2p,$$

en conservant pour I' et F les notations de plus haut, et en désignant par MN la sous-normale relative à I .