

Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 425-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__425_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \quad (x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

1° *Démontrer que parmi les surfaces intégrales il y a une infinité de surfaces, dépendant d'une constante arbitraire, qui sont de révolution autour de Oz ;*

2° *Intégrer l'équation. Déterminer une surface intégrale par la condition qu'elle contienne la parabole qui a pour équations*

$$y = 0, \quad z = x^2.$$

3° *Par un point M de coordonnées x, y, z , autre que l'origine, passe une courbe caractéristique C de l'équation (1) et une seule. Déterminer, en fonction de x, y, z , les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe au point M, l'équation du plan osculateur en M à la même courbe et le rayon de courbure de la courbe au point M ;*

4° *Démontrer que les caractéristiques sont des hélices.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(x - 1) \frac{dy}{dx} - 2y = \frac{2}{x + 1}$$

sachant que l'équation sans second membre admet une solution particulière de la forme $Ax + B$, où A et B sont des constantes qu'on déterminera. (Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Qu'appelle-t-on intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Montrer comment on peut déterminer une pareille intégrale.

Comment obtient-on l'intégrale générale de l'équation lorsqu'on connaît une intégrale complète?

2° *Application : Intégrer l'équation*

$$k^2(p^2 + q^2) - z^2 = 0,$$

où k désigne une constante donnée.

3° *Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, démontrer que parmi les surfaces intégrales de cette dernière équation il y a une infinité de surfaces de révolution autour de Oz , et déterminer ces surfaces.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (\alpha - \beta) \cdot x + \beta y,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\beta x + (\alpha + \beta) y,$$

où α et β désignent deux constantes données.

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Résoudre l'équation aux différentielles totales*

$$(y^2 - x^4) dz + (3x^2 y z^2 - 2x^3 z - y^2) dx \\ - (x^3 z^2 + y^2 z - 2xy) dy = 0.$$

(427)

On cherchera une solution particulière de la forme

$$z = \varphi(y)x^m,$$

où φ est une fonction de y seulement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_C \frac{\cot \pi z}{z(z+1)} dz,$$

le contour C du plan des $z = x + yi$ étant formé :

1° *De la droite $y = 1$, $x \geq \frac{1}{2}$ parcourue depuis $x = +\infty$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$;*

2° *Du segment de droite AB, A $(\frac{1}{2}, 1)$ et B $(\frac{1}{2}, -1)$;*

3° *De la droite $y = -1$, $x \geq \frac{1}{2}$ parcourue de B à $x = \infty$.*

(Juillet 1911.)

Nancy.

I. *Établir l'existence des deux périodes de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

II. *On considère la fonction de x*

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} d\alpha.$$

1° *Démontrer que l'on a*

$$xy = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha.$$

2° *En déduire que $y(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre indépendante de x et former cette équation;*

3° *Dans l'hypothèse $n = 2$, montrer que l'équation admet*

deux intégrales particulières de la forme $P e^p$, P et p étant des polynômes en x . Former l'intégrale générale et calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x x}{(1+x^2)^3} dx.$$

4^e Extension des résultats obtenus au cas où n est un entier positif quelconque. (Juin 1910.)

I. On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dr^2} = 6y^2 - 6.$$

1^o Former l'intégrale générale de cette équation;

2^o Montrer qu'il existe deux familles d'intégrales particulières qui s'expriment au moyen de fonctions trigonométriques. Écrire explicitement ces intégrales;

3^o Appelant x_0 une valeur quelconque de x , on développera en série de Laurent les intégrales de l'équation (1) qui admettent x_0 comme pôle et l'on montrera que le développement contient un coefficient arbitraire; on appellera λ ce coefficient;

4^o Laissant x_0 fixe, on fera varier λ . A toute valeur de λ correspond une intégrale de l'équation (1) dont les périodes ω et ω' se trouvent être par conséquent fonctions de λ ; quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles les fonctions $\omega(\lambda)$ ou $\omega'(\lambda)$ deviennent infinies?

II. Équation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure en coordonnées curvilignes.

(Octobre 1910.)

POITIERS.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = z t \frac{du}{dt} = mu.$$

1^o Donner une expression de l'intégrale générale de

cette équation. Montrer que pour $m = 2$ l'intégration se ramène à une quadrature.

2° Quelle relation peut-on établir entre les intégrales de deux équations (1) où m prend deux valeurs différentes ayant pour somme 2?

3° Appelons (Γ) une courbe dont les coordonnées cartésiennes, exprimées en fonction de t , $x = f(t)$, $y = g(t)$, sont deux intégrales de (1), réelles et positives pour t réel et positif. Quelle est l'aire balayée par le rayon vecteur (issu de l'origine) entre deux quelconques de ses positions?

4° Construire et discuter les courbes réelles (Γ) pour $m = 2$. Quel est le genre des fonctions $u(t)$ correspondantes? (On déterminera d'abord le genre de leurs dérivées logarithmiques.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit $y = p(x)$ la fonction elliptique de périodes $\omega = 1$, $\omega' = \iota i$ qui est infinie à l'origine. Soient, d'autre part,

$$u(x) = \int^x \frac{p(x)}{x} dx, \quad v(x) = \int^x \frac{p'^2(x)}{x} dx$$

deux fonctions de x infinies à l'origine.

1° Pour x réel et supérieur à 100, calculer à $\frac{1}{100}$ près les différences $u(x+1) - u(x)$, $v(x+1) - v(x)$.

2° Appelant ω un nombre quelconque de module 1, montrer que la différence $u(\omega x) - u(x)$ reste finie lorsque x augmente indéfiniment par valeurs réelles positives.

(Juin 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Étant donnée une fonction $P(x, y)$, déterminer une fonction $\lambda(x, y)$ qui satisfasse aux deux équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = - \frac{\partial(\lambda P)}{\partial x}.$$

1° Montrer que le problème n'est possible que si l'expression

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} dx - \frac{\partial P}{\partial x} dy}{1 + P^2}$$

est différentielle exacte et que, si cette condition est satisfaite, on peut obtenir $\log \lambda$ par des quadratures;

2° Effectuer les calculs en supposant $P = \frac{x}{y}$;

3° Montrer que si $\lambda_1(x, y)$ vérifie les équations (1) et (2), l'expression

$$\lambda_1(dy + P) dx$$

est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ qui est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

II. Soient (C) une courbe, (C_1) la développée de (C) , (C_2) la développée de (C_1) , et ainsi de suite, (C_n) désignant la développée de (C_{n-1}) . Soient M un point quelconque de (C) et $M_1, M_2, \dots, M_n$ les points correspondants sur les courbes $(C_1), (C_2), \dots, (C_n)$.

1° (C) étant définie comme enveloppe des droites (en coordonnées rectangulaires xOy)

$$x \sin \theta - y \cos \theta = f(\theta),$$

trouver en fonction de O les coordonnées des points $M, M_1, \dots, M_n$;

2° Déterminer la fonction $f(O)$ de sorte que l'angle MOM_1 soit droit.

Vérifier qu'alors le rapport $\frac{OM}{OM_1}$ reste constant. En déduire que (C) et (C_1) sont semblables.

Vérifier que les courbes dont les indices ont la même parité sont homothétiques par rapport à l'origine.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(I) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

2° Vérifier que l'on a une intégrale particulière de l'équation (I) en considérant la surface (S) qui, rapportée à des axes rectangulaires, est représentée par l'équation

$$(S) \quad \left(\frac{x - h\sqrt{\frac{z}{c}}}{a^2} \right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},$$

où a, b, c, h désignent des constantes;

3° Soit (T) le solide homogène limité par la surface (S) et par les plans $z = 0$ et $z = c$.

Calculer, pour le solide (T) :

1° L'aire de l'ellipse, section par un plan $z = \text{const.}$;

2° Le volume;

3° Le moment d'inertie par rapport à Oz;

en se limitant, pour ce moment d'inertie, au cas particulier où l'on a à la fois

$$h = 0, \quad b = a.$$

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. x, y, z désignant les coordonnées d'un point M rapporté à trois axes rectangulaires, et k désignant une constante, on pose :

$$u = x(x + y + z),$$

$$v = y(x + y + z),$$

$$w = z(x + y + z).$$

1° Le système d'équations différentielles

$$k \frac{dx}{dt} = u,$$

$$k \frac{dy}{dt} = v,$$

$$k \frac{dz}{dt} = w$$

définit la position au temps t du point M(x, y, z) qui pour $t = 0$ avait comme coordonnées a, b, c .

Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c, t , et inversement a, b, c en fonction de x, y, z, t .

Vérifier que les points qui à l'instant $t = 0$ se trouvent

dans un plan

$$(P_0) \quad a + b + c = \text{const.}$$

se trouvent, à l'instant t , dans un plan

$$(P) \quad x + y + z = \text{const.}$$

et que, à une ligne (L_0) située dans le plan (P_0) correspond de cette façon une ligne (L) située dans le plan (P) , homothétique de la ligne (L_0) .

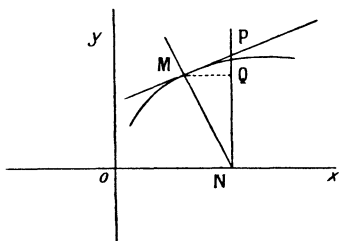
2° Intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) p + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) q = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vérifier que les points qui, à l'instant $t = 0$, se trouvaient sur une surface intégrale de cette équation sont, à l'instant t , sur une autre surface intégrale de la même équation.

II. 1° Déterminer une courbe satisfaisant à la condition suivante :

En un point quelconque M on mène la normale jusqu'à



sa rencontre en N avec Ox ; la parallèle NP à Oy coupe la tangente en M au point T ; la longueur NT doit être égale à une longueur constante $2R$;

2° Pour intégrer l'équation différentielle obtenue, on pourra exprimer l' y du point M , c'est-à-dire NQ , au moyen de l'angle ω de la tangente MP avec Oy .

Vérifier que la courbe C est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon R roulant sans glissement sur Ox .

(Novembre 1910.)

