

HENRI DUBOIS

Sur l'intégration des différentielles totales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 421-423

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__421_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2b]

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES;

PAR M. HENRI DUBOIS.

Soit à trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$dF = P \, dx + Q \, dy,$$

(1)

P et Q étant deux fonctions données des deux variables x et y seulement.

Le problème ne diffère pas de celui-ci :

Trouver F (x, y) telle que

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

Je rappelle d'abord que :

(α). Deux fonctions qui ont même dérivée partielle par rapport à une même variable ne sauraient différer que d'une fonction ne dépendant pas de cette variable.

En particulier, deux fonctions répondant à la question ne diffèrent nécessairement que d'une constante.

Pour que les conditions (1) soient remplies il faut d'abord que

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je dis que cette condition est suffisante d'une part pour que F existe et, d'autre part, pour que sa recherche se ramène à celle de deux quadratures.

En effet, supposons-la satisfaite. Soit F_1 une fonction telle que

$$(3) \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = P.$$

Une telle fonction s'obtiendra en prenant une primitive quelconque de la fonction P où y sera regardé comme une constante. Si F existe, d'après la propriété (α),

$$F = F_1 + \varphi(y).$$

Je dis qu'il est possible de déterminer $\varphi(y)$ de façon que les deux conditions (1) soient remplies.

Comme la première l'est, il suffit d'avoir

$$(4) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q.$$

Or la dérivation par rapport à y de (3) donne, eu égard à (2),

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} Q.$$

Alors, toujours d'après la propriété (α),

$$Q - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \psi(y)$$

et la condition (4), qui reste à satisfaire, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \psi(y), \\ \varphi &= \int \psi(y) dy. \end{aligned}$$

La démonstration s'étend aisément au cas d'un nombre quelconque de variables.

REMARQUE. — Cette démonstration jouit, me semble-t-il, de deux avantages :

1° Elle n'introduit dans la recherche de F que des intégrales indéfinies, tandis que la méthode classique exige que l'on place, avec soin, les limites de chaque intégration, et sur le signe $\int$, et dans les fonctions à intégrer ;

2° Elle n'utilise nullement la dérivation sous le signe $\int$ et, à cause de cela, pourrait entrer aisément dans le programme de Mathématiques spéciales où elle mettrait de l'unité dans les méthodes d'intégration des équations différentielles du premier ordre.

*Je pense sans
la méthode de
F. et de H. Poincaré*