

G. VALIRON

Expression asymptotique de certaines fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12 (1912), p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[D4b]

EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

L'étude des produits canoniques d'ordre fini dont la distribution de zéros est simple a été faite par un grand nombre d'auteurs ⁽¹⁾; mais les cas plus généraux ne me semblent avoir été abordés que par M. Lindelöf ⁽²⁾ et par M. Leau ⁽³⁾. Les résultats de M. Leau comprennent ceux de M. Lindelöf comme cas particulier; mais ils laissent échapper certains cas de distribution très régulière, c'est ainsi qu'ils ne s'appliquent pas au cas où la relation entre le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro, et n est

$$\log r_n = \rho \log n + K(\log_2 n)^\alpha, \quad \alpha > 1, \quad K > 0.$$

Je me propose ici d'obtenir la même approximation

⁽¹⁾ Parmi lesquels MM. Wiman, Barnes, Mattson, Littlewood.

⁽²⁾ Voir LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1).

⁽³⁾ *Étude sur les fonctions entières orientées* (*Annales de l'École Normale*, 1906, p. 33).

que M. Leau, en faisant sur la distribution une hypothèse qui me semble plus souple, et par une méthode de calcul plus directe.

1. *Hypothèses et notations.* — Je considère un produit canonique dont je supposerai tout d'abord que *tous les zéros ont le même argument*, par un changement de variable, je puis supposer cet argument égal à π . Je suppose également que *l'ordre ρ n'est pas entier*; le genre p est alors égal à la partie entière de ρ , et si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, le produit s'écrit

$$(1) \quad f(z) = \prod_1^{\infty} E\left(\frac{z}{r_n}, p\right),$$

en posant

$$(2) \quad E\left(\frac{z}{r_n}, p\right) = \left(1 + \frac{z}{r_n}\right) e^{-\frac{z}{r_n} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p! r_n^p}}.$$

Ceci posé, je suppose que la relation qui lie r_n à n est la suivante

$$(3) \quad r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}, \quad n > N;$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes que j'appellerai *conditions A*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \log x \alpha'(x) &= 0; \end{aligned}$$

[pour chaque valeur de $x > N$, la fonction $\alpha(x)$ a une dérivée à droite et une dérivée à gauche].

Nous nous proposons de chercher une valeur asymptotique à $(1 + \varepsilon)$ près ⁽¹⁾ du produit $f(z)$, lorsque z

(1) Je désignerai par ε toute quantité positive, négative ou complexe, tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n_0}$.

(3)

est extérieur à certains cercles entourant les zéros, nous poserons

$$B = \prod_1^{n_0-1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right), \quad C = \prod_{n_0}^{n'-1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right),$$

$$D = E\left(\frac{z}{-r_{n'}}, p\right) \times E\left(\frac{z}{-r_{n'+1}}, p\right), \quad F = \prod_{n'+2}^{\infty} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right);$$

le nombre n' étant défini par la double inégalité

$$r_{n'} \leq r \leq r_{n'+1},$$

r désignant le module de z .

2. *Calcul de B.* — Comme le produit B a un nombre fini de facteurs, on a

$$B = e^{Mz^p(1+\varepsilon)},$$

$$M \text{ est la somme } \sum_1^{n_0-1} \frac{(-1)^p}{p r_n^p}.$$

3. *Calcul de C.* — Nous pouvons écrire, pour $n < n'$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n} \left(1 + \frac{r_n}{z}\right) e^{-\frac{z}{r_n} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}},$$

et puisque $\frac{r_n}{r} < 1$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n} e^{-\frac{z}{r_n} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}} e^{\sum_1^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q}}.$$

Par suite on a

$$C = G \times H,$$

en posant

$$G = \frac{z^{n'-n_0-1}}{r_{n_0} \dots r_{n'-1}},$$

$$H = e^{-z \sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p} \sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n^p}} e^{\sum_{n=n_0}^{n'-1} \left[\sum_1^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q} \right]}.$$

(4)

le dernier exposant est la somme de $n' - n_0 - 1$ séries convergentes, en faisant la somme terme à terme, on peut écrire

$$\log H = \sum_{-p}^{+\infty} \left[(-1)^{q+1} \frac{1}{q z^q} \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q \right],$$

la somme Σ' ne comprenant pas le terme correspondant à $q = 0$.

Pour calculer $\log H$ nous sommes ramenés au calcul des sommes telles que

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q, \quad (q = -p, -p-1, \dots),$$

or, nous avons

$$(4) \quad \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = \int_{n_0}^{n'-\theta_q} x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho} dx \quad (0 < \theta_q < 1),$$

en tenant compte de l'égalité (3), et du fait que r_n croît (ou du moins ne décroît pas) avec n . Mais, par suite de la propriété de la fonction $\alpha(x)$ nous avons, en prenant n_0 assez grand,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[x \cdot x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho} \right] \\ &= \frac{q+\rho}{\rho} \left[1 + \frac{q}{\rho} \alpha(x) + \frac{q}{q+\rho} x \log x \alpha'(x) \right] x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho} \\ &= \frac{q+\rho}{\rho} (1 + \varepsilon_q) x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho} = \frac{\rho}{\rho+q} (1 + \varepsilon'_q) \frac{d}{dx} \left[x^{[1+\alpha(x)]} \frac{q}{\rho} x \right],$$

en portant dans l'expression (4), nous obtenons, en

(5)

supposant $\frac{n'}{n_0}$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q &= \frac{\rho}{\rho + q} (1 + \varepsilon_q') \left[x^{[1 + \alpha(n)] \frac{q}{\rho}} \right]_{n_0}^{n'-\theta_q} \\ &= (1 + \varepsilon_q'') \frac{\rho n'}{\rho - q} (n' - \theta_q)^{[1 + \alpha(n - \theta_q)] \frac{q}{\rho}}.\end{aligned}$$

Or, d'après la définition de r , nous avons

$$r = (n' - \theta_q)^{[1 + \alpha(n - \theta_q)] \frac{1}{\rho}},$$

donc

$$(n' - \theta_q)^{[1 + \alpha(n - \theta_q)] \frac{q}{\rho}} = r^q \left(1 - \frac{2\theta_q}{n'} \right)^{\frac{q}{\rho}} (1 + \varepsilon_q'') \quad (0 < \theta_q' < 1);$$

et finalement nous avons

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = (1 + \varepsilon_q) \frac{\rho n'}{\rho + q} r^q \left(1 - \frac{2\theta_q'}{n'} \right)^{\frac{q}{\rho}},$$

d'où, en posant

$$z = r e^{i\varphi},$$

$$\log H = n' \sum_{-p}^{+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)} (1 + \varepsilon_q) \left(1 - \frac{2\theta_q'}{n'} \right)^{\frac{q}{\rho}}.$$

Mais la série

$$\sum_{-p}^{+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)}$$

est absolument convergente, ainsi que celle figurant dans $\log H$, en prenant n' assez grand, la différence entre les Q premiers termes correspondants des deux séries est arbitrairement petite, et par suite nous avons

$$\log H = (1 + \varepsilon_1) n' \sum_{-p}^{+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)};$$

(6)

en prenant Q de façon que les restes soient négligeables (1).

Considérons maintenant log G :

$$\log G = (n' - n_0 - 1) \log r - \sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n + (n' - n_0 - 1) i \varphi,$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n = \int_{n_0}^{n'-\theta} \frac{1 + \alpha(x)}{\rho} \log x \cdot dx \quad (0 < \theta < 1);$$

or,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1 + \alpha(x)}{\rho} x (\log x - 1) \right] = \frac{1 + \alpha(x)}{\rho} \log x + \frac{\alpha'(x) x (\log x - 1)}{\rho},$$

et, d'après la propriété de la fonction $\alpha(x)$, le deuxième terme du second membre est arbitrairement petit, pourvu que n_0 soit assez grand, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n &= \left[\frac{1 + \alpha(x)}{\rho} x (\log x - 1) \right]_{n_0}^{n'-\theta} + \varepsilon (n' - n_0) \\ &= n' \log r - k \log r - \frac{1 + \varepsilon}{\rho} n', \end{aligned}$$

en remarquant que $\log r - \log r_{n'}$ tend vers zéro et, comme enfin $\frac{\log r}{n'}$ tend vers zéro,

$$\log G = \frac{n'}{\rho} (1 + \varepsilon_1) + i \varphi n' (1 - \varepsilon_2).$$

En faisant la somme des expressions obtenues pour log H et log G,

$$\log C = [1 + \varepsilon'(n', \varphi)] n' \left[\frac{1}{\rho} + i \varphi + \sum_{q=-p}^{q=+\infty} \frac{(-1)^{q+1} \rho e^{-i \varphi q}}{q(\rho + q)} \right].$$

(1) Cette détermination de Q est indépendante de n'.

(7)

4. *Calcul de F.* — Pour $n > n' + 1$, nous avons

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = e^{\sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q}},$$

d'où

$$\log F = \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \left[\sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q} \right].$$

Puisqu'il y a convergence absolue on peut intervertir l'ordre des sommations, et écrire

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} \left[(-1)^{q+1} \frac{z^q}{q} \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} \right],$$

le calcul des sommes

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \int_{n'+1+\theta_1 q}^{+\infty} \frac{dx}{x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}}} \quad (0 < \theta_1 q < 1)$$

se fait comme précédemment et nous obtenons

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \frac{\rho n'}{q - \rho} (1 + \varepsilon_q) r^q \left(1 + \frac{2\theta_1 q}{n'} \right)^{-\frac{q}{\rho}} \quad (0 < \theta_1 q < 1).$$

En portant dans l'expression de $\log F$, nous aurons

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(q - \rho)} (1 + \varepsilon_q) \left(1 + \frac{2\theta_1 q}{n'} \right)^{-\frac{q}{\rho}} n',$$

ou encore, par un raisonnement analogue à celui fait pour $\log H$,

$$\log F = [1 + \varepsilon''(n', \varphi)] n' \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^q \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)}.$$

5. *Calcul de B.C.F.* — En faisant la somme des

expressions obtenues pour $\log B$, $\log C$, $\log F$, nous avons, en remarquant que

$$\sum_{q=-p}^{q=+\infty} \frac{(-1)^{q+1} \rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)} = \sum_{q=-\infty}^{q=p'} \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)},$$

et que $\frac{z^p}{n'}$ tend vers zéro,

$$\log BCF = [1 + z'''(n', \varphi)] n' \left[\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)} \right].$$

Entre crochets nous avons une fonction méromorphe de ρ , le dénominateur est $\sin \pi \rho$, puisque ses zéros sont $\rho = 0, \pm 1, \dots, \pm q, \dots$; le résidu relatif au pôle q est $(-1)^q e^{i\varphi q}$, le numérateur de la fonction méromorphe est donc une fonction $\Phi(\rho)$ telle que

$$\Phi(q) = (-1)^q e^{i\varphi q} \times \left(\frac{d}{d\rho} \sin \pi \rho \right)_{\rho=q},$$

ou

$$\Phi(q) = \pi e^{i\varphi q}.$$

Comme la fonction $\pi e^{i\varphi \rho}$ répond à la question, on a

$$\Phi(\rho) = e^{i\varphi \rho} \pi + \Psi(\rho) \sin \pi \rho,$$

$\Psi(\rho)$ étant une fonction entière.

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)} = \frac{\pi e^{i\varphi \rho}}{\sin \pi \rho} + \Psi(\rho) \quad (-\pi \leq \varphi \leq +\pi);$$

et en tenant compte de la décomposition de la fonction méromorphe $\frac{\pi e^{i\varphi \rho}}{\sin \pi \rho}$ en fractions simples ⁽¹⁾ on voit que

⁽¹⁾ Voir E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. II, p. 173, 174;
et LINDELÖF, *Calcul des résidus*, p. 38 et note de la page 32.

$\Psi(\rho) \equiv 0$. Nous aurons donc l'égalité

$$\log(\text{BCF}) = [1 + \varepsilon''(\eta', \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n'.$$

6. *Calcul de D.* — Puisque $\frac{r_{n'+1}}{r_{n'}} = 1 + \varepsilon$ (comme on le voit immédiatement), on a

$$\log D = \log \left(1 + \frac{z}{r_{n'}} \right) \left(1 + \frac{z}{r_{n'+1}} \right) + k, \quad k \text{ fini.}$$

Excluons les zéros par des cercles ayant pour centre ces zéros et pour rayons r_n^{-a} ($a > 0$), nous aurons à l'extérieur de ces cercles

$$|\log D| < 2(\alpha + 1) \log r,$$

et comme $\frac{n'}{\log r}$ croît indéfiniment

$$|\log D| = \varepsilon |\log(\text{BCF})|.$$

Nous arrivons ainsi à l'égalité

$$(5) \quad \log f(z) = [1 + \varepsilon(n', \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n' \quad (-\pi \leq \varphi \leq +\pi),$$

valable pour z suffisamment grand, et à l'extérieur de cercles décrits autour des zéros et de rayons inversement proportionnels aux modules des zéros; n' est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$, $\varepsilon(n', \varphi)$ une fonction complexe de n' et φ , tendant vers zéro avec $\frac{1}{n'}$.

Si l'argument des zéros, au lieu d'être égal à π , est égal à ω , il suffira de remplacer, dans l'égalité (5), φ par $\varphi + \pi - \omega$ ($\omega - 2\pi \leq \varphi \leq \omega$).

7. En supposant que les arguments des zéros, au lieu d'être tous égaux, *tendent vers une valeur ω* , l'égalité précédente a encore lieu. Supposons encore

$\omega = \pi$, nous devons dans les calculs remplacer r_n par $r_n e^{i\omega_n}$, ω_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Prenons n_0 assez grand pour que

$$|\omega_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > n_0,$$

ε étant donné.

Dans le calcul de C, on voit facilement que $\log G$ est multiplié par $1 + \eta$, η étant inférieur à ε ; d'autre part dans $\log H$, les sommes Σr_n^q sont remplacées par

$$\sum_{r_0}^{n-1} r_n^q e^{i\omega_n q},$$

Pour $q < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q e^{i\omega_n q} = (1 + \eta'_q) \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \quad (|\eta'_q| < \sqrt{\varepsilon});$$

la somme des Q premiers termes de $\log H$ est multipliée par $(1 + \eta'_q, |\eta'_q| < \sqrt{\varepsilon})$ (Q partie entière de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$), le reste est inférieur en module à

$$\sum_Q^{+\infty} \left(\frac{1}{q r^q} \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \right) = n' \sum_Q^{+\infty} \frac{q(\rho + q)}{\rho} (1 + \varepsilon_q) \left(1 - \frac{2\theta'_q}{n'} \right)^{\frac{q}{\rho}},$$

en prenant Q assez grand, c'est-à-dire ε assez petit, ce reste est négligeable (il est inférieur à $\eta' \frac{A}{Q}$). En résumé $\log C$ est multiplié par $(1 + \eta'')$, $\eta'' < \sqrt{\varepsilon}$.

On constatera le même fait pour $\log F_0$ et, par suite, l'extension est établie.

De même, si le produit $f(z)$ est multiplié par $e^{P_p(z)}$, où $P_p(z)$ désigne un polygone de degré p , l'égalité (5) est encore valable.

8. *Fonctions* $f(z) + a$. — Les modules des zéros d'une fonction entière satisfaisant à la condition (A), et leurs arguments tendant vers une valeur déterminée ω , on a l'égalité asymptotique

$$(6) \quad f(z) = e^{(1-\varepsilon) \frac{\pi e^{i\rho(\varphi+\pi-\omega)}}{\sin \pi\rho} n} \quad (\omega - 2\pi \leq \varphi \leq \omega),$$

où n est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$; on déduit de là des résultats relatifs aux zéros des fonctions

$$f(z) + a.$$

Supposons $\omega = \pi$, on voit immédiatement que les zéros des fonctions $f(z) + a$ forment des files dont les arguments ont pour limite possible les nombres

$$\pm \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} \quad \text{et} \quad \pi \quad (q = 0, \pm 1, \dots).$$

Cherchons le nombre des zéros de module inférieur à $r = |z|$ pour l'une des files $\pm \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho}$, comme $f(z)$ n'a pas de zéros en dehors de la direction π , ce nombre est égal à la différence des nombres des zéros des fonctions $f(z)$ et $f(z) + a$, c'est-à-dire à la variation d'argument de $1 + \frac{a}{f(z)}$ lorsqu'on fait décrire au point z un contour formé de la façon suivante : les deux droites $\pm \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} - \varepsilon$, $\pm \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} + \varepsilon$, et deux arcs de cercle de rayon r_0 et r ; l'expression de $f(z)$ montre que ce contour contient

$$n \frac{1}{2(\sin \pi\rho)} (1 + \varepsilon)$$

zéros de $f(z) + a$.

Si $\rho > p + \frac{1}{2}$, il existe $2(p+1)$ files de zéros en dehors de la file possible d'arguments π ; si $\rho \leq p + \frac{1}{2}$

il y en a $2p$ seulement; on constatera de plus que, si $\rho > p + \frac{1}{2}$, il n'y a pas de zéros dont les arguments ont pour limite π ; si $\rho \leq p + \frac{1}{2}$ il y en a $n(1 + \epsilon)$. En résumé le rapport des nombres des zéros des fonctions $f(z) + \alpha$ et $f(z)$ a pour limite $\frac{p+1}{|\sin \pi \rho|}$ si $\rho > p + \frac{1}{2}$; $\frac{p}{|\sin \pi \rho|} + 1$ si $\rho \leq p + \frac{1}{2}$. Il importe de remarquer que ces limites ne sont pas atteintes *uniformément* quel que soit α , les zéros dont les arguments tendent vers des valeurs autres que π se présentent pour des modules d'autant plus grands que $|\alpha|$ est plus petit.

L'étude de l'influence produite par les variations de α sur les zéros de $f(z) + \alpha$ revient d'ailleurs à l'étude compliquée de la fonction inverse de la fonction $f(z)$.

9. *Exposant brut et exposant net de la suite des zéros d'une fonction entière.* — Pour justifier l'introduction des conditions (A) je vais démontrer la proposition suivante; étant donnée la suite

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

des modules des zéros d'une fonction entière d'ordre ρ ; on peut trouver des fonctions $\alpha(x)$ satisfaisant aux conditions (A) et telles qu'on ait

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \quad (n > N),$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n .

Posons

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\rho \log r_n} - 1,$$

il résulte de la définition de ρ que la suite σ_n admet

zéro pour limite supérieure pour n infini. Je vais construire une fonction $\beta(x)$ définie pour $x > r_N$, satisfaisant aux conditions (A) et telles que

$$\beta(r_n) \geq \sigma_n,$$

quel que soit $n > N$;

$$\beta(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n .

Soit $\theta(x)$ une fonction positive dérivable, satisfaisant à la deuxième condition (A) et croissante indéfiniment lorsque x croît ⁽¹⁾. A chaque valeur σ_n faisons correspondre la fonction $\gamma_n(x)$ définie comme il suit :

1° Pour $x \leq r_n$

$$\gamma_n(x) = \theta(x) - \theta(r_n) + \sigma_n,$$

2° Pour $x \geq r_n$

$$\gamma_n(x) = -\theta(x) + \theta(r_n) + \sigma_n;$$

soient alors x_0 un nombre quelconque et p défini par les inégalités

$$r_p \leq x_0 < r_{p+1};$$

parmi les nombres $\gamma_n(x_0)$, $n \leq p$, il y en a un plus grand ou égal à tous les autres ; il en est de même pour $\gamma_n(x_0)$ lorsque $n \geq p+1$, car

$$\gamma_n(x_0) - \gamma_{p+1}(x_0) = \sigma_n - \sigma_{p+1} - \theta(r_n) + \theta(r_{p+1}),$$

et comme $\theta(x)$ croît indéfiniment, et que σ_n a pour limite supérieure zéro, cette différence est négative à partir d'une certaine valeur de n , il y a aussi un

(1) Une telle fonction est aisée à former, par exemple

$$\theta(x) = \log_3 x$$

nombre fini de nombres $\gamma_n(x_0)$ supérieurs à $\gamma_{p+1}(x_0)$, il y en a un plus grand que tous les autres.

Considérons alors la fonction $\gamma(x)$ qui pour chaque valeur de x est égale au plus grand des nombres $\gamma_n(x)$, cette fonction coïncide successivement avec un certain nombre de fonctions $\gamma_n(x)$ (de part et d'autre de $x = r_n$), elle satisfait donc déjà aux trois conditions

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma'(x) x \log x = 0,$$

$$\gamma(r_n) \geq \sigma_n,$$

quel que soit $n > N$,

$$\gamma(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n .

Si elle tend vers zéro c'est une fonction $\beta(x)$ cherchée; sinon considérons une fonction $-\varepsilon(x)$ satisfaisant aux conditions (A), croissante et dérivable, la fonction égale pour chaque valeur de x au plus grand des deux nombres $\gamma(x)$ et $-\varepsilon(x)$ tend vers zéro: c'est une fonction $\beta(x)$ (1).

Nous avons ainsi, à partir d'une certaine valeur de n ,

$$u = r_n^{1+\sigma_n \rho} \leq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

nous dirons que la suite $(1 + \sigma_n)\rho$ est l'*exposant brut* de la suite des zéros, la fonction $\rho[1 + \beta(x)]$ est l'*exposant net*. La fonction

$$x^{\rho[1+\beta(x)]}$$

est croissante, comme on le constate en employant les propriétés de la fonction $\beta(x)$: si nous écrivons la

(1) Je suppose qu'une infinité de nombres $\sigma_n + \varepsilon(r_n)$ sont positifs, ce qui est facile à réaliser.

fonction inverse sous la forme

$$x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$$

nous aurons, à partir d'une certaine valeur de n ,

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

il reste à montrer que $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (A).

Or nous avons

$$y = x^{\rho[1+\beta(x)]}, \quad x = y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}},$$

d'où

$$\log y = \rho[1+\beta(x)] \log x, \quad [1+\beta(x)][1+\alpha(y)] = 1;$$

par suite, lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$ tend vers zéro et par conséquent aussi $\alpha(y)$; de plus, en dérivant les deux égalités précédentes, on obtient

$$\beta'(x)[1+\alpha(y)] + \alpha'(y)[1+\beta(x)]y' = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(1+\varepsilon)\rho}{x} \quad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon = 0 \right),$$

en portant dans la première de ces égalités la valeur de y' tirée de la seconde, et remplaçant ρ par

$$\frac{\log y}{\log x} \frac{1}{1+\beta(x)},$$

on aura

$$\begin{aligned} & \alpha'(y)[1+\beta(x)]y \log y \\ & + (1+\varepsilon)[1+\beta(x)][1+\alpha(y)]\beta'(x)x \log x = 0. \end{aligned}$$

Lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$, $\alpha(y)$, ε tendent vers zéro ainsi que $\beta'(x)x \log x$, donc

$$\lim_{y=\infty} \alpha'(y)y \log y = 0.$$

La proposition que nous avons en vue est ainsi démontrée, on peut introduire dans l'égalité (6) la fonc-

(16)

tion inverse de

$$x^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

et l'on aura

$$(7) \quad \begin{cases} \log f(z) = (1+\varepsilon) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} e^{i\varphi[\varphi+\pi-\omega]} r^{(1+\beta(r))\rho} \\ (\omega - 2\pi \leq \varphi \leq \omega), \end{cases}$$

$[1+\beta(r)]\rho$ est un *exposant net*, égal ici à l'exposant brut pour toutes les valeurs de r_n .

10. *Application aux fonctions de genre zéro.* — Si l'on désigne par $M(r)$ le maximum du module d'une fonction entière de genre zéro pour $|z|=r$, et par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, on a évidemment

$$M(r) < \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_n}\right) < \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right),$$

en désignant par $\alpha(x)$ une fonction telle que

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \quad (n > N),$$

fonction qui a été calculée au paragraphe précédent. Or, nous avons trouvé une égalité asymptotique (7) pour

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right),$$

égalité d'où nous tirons

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right) = e^{(1+\varepsilon) \frac{r}{\sin \pi \rho}},^{[1+\beta(r)]\rho},$$

$x^{[1+\beta(x)]\rho}$ désigne la fonction inverse de $x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$ donc $[1+\beta(x)]\rho$ est un *exposant net* de la suite des zéros

de la fonction donnée. Nous arrivons donc au résultat suivant : *le logarithme du module maximum pour $|z| = r$ d'une fonction entière de genre zéro (1) reste, à partir d'une certaine valeur de r , inférieur à l'expression*

$$(1 + \varepsilon) \frac{\pi}{\sin \pi \varrho} r^{[1 + \beta(r)]\varrho} \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} r = 0 \right),$$

où $\varrho[1 + \beta(x)]$ est un exposant net de la suite des zéros.

Cette limite supérieure est atteinte lorsque l'exposant net est constamment égal à l'exposant brut.