

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__138_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2090.

(1908, p. 96.)

Soient $P(\alpha, \beta, \gamma)$ un point fixe quelconque situé dans le plan du triangle ABC ; θ le centre de la conique inscrite en α, β, γ ; $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ la polaire de θ dans le triangle ABC et Q la conique inscrite en ABC au triangle des droites $\lambda, B\mu, C\nu$. Si un point $O(x, y, z)$ décrit Q :

1° La polaire ρ de O tourne autour de θ ;

2° Le centre θ_1 de la conique inscrite à ABC en x, y, z décrit la polaire ρ_1 de P ;

3° Les parallèles à PA, PB, PC menées par O coupent BC, CA, AB , en λ', μ', ν' et l'on a la droite $\Delta'(\lambda' \mu' \nu')$;

4° Les parallèles à OA, OB, OC menées par P coupent BC, CA, AB en λ_1, μ_1, ν_1 et l'on a la droite $\Delta_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$;

5° Le point $\omega(\Delta'_1 \Delta_1)$ est le milieu de OP et décrit la conique V qui passe par les milieux des côtés de ABC et les points α, β, γ ;

6° Si P coïncide avec l'orthocentre H de ABC , θ est le point de Lemoine, Q le cercle ABC , Δ' la droite de Simson et V le cercle d'Euler.

(SONDAT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Il suffit d'établir les propositions précédentes dans le cas où le point P coïncide avec l'orthocentre H du triangle ABC , et

de les généraliser au moyen d'une transformation homographique laissant invariable la droite de l'infini.

Dans ce cas, le point θ est le point de concours des médianes antiparallèles, c'est-à-dire le point de Lemoine du triangle, les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont les tangentes au cercle circonscrit en A, B, C, cercle qui n'est autre que la conique Q.

1° Soient u , v , w les points d'intersection de la polaire ρ d'un point O du cercle circonscrit avec BC, CA, AB; si l'on se donne le point u , les points v et w sont déterminés et uniquement; si, d'autre part, ce point u coïncide avec B par exemple, il en est de même du point w , ce qui montre que ρ passe par un point fixe. Si u coïncide avec λ , ρ devient la symédiane issue de A; le point fixe cherché est donc le point de Lemoine θ .

2° Si l'on se donne le point de contact d'une des coniques (θ_1) avec l'un des côtés du triangle ABC, cette conique est déterminée et uniquement. Les coniques (θ_1) forment, par suite, un faisceau tangentiel dont les points limites (coniques évanouissantes) sont (A, λ) , (A, μ) , (C, ν) , le lieu de leurs centres est donc la droite $\omega_1 \omega_2 \omega_3$, ω_1 , ω_2 , et ω_3 étant les milieux des segments $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. Si M' et M'' sont les milieux de CA et AB, on a visiblement $\omega_1 M' = \omega_1 M'' = \overline{\omega_1 A^2}$; les points ω_1 , ω_2 , ω_3 appartiennent, par suite, à l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points, c'est-à-dire à l'axe orthique, polaire de H.

3° Nous tombons sur le théorème de Simson.

4° Soit O' le point diamétralement opposé à O sur le cercle ABC; les pôles des droites AO' , BO' , CO' par rapport au cercle conjugué au triangle sont les points d'intersection des côtés de celui-ci avec les parallèles menées par H aux droites AO , BO , CO ; ces points λ' , μ' , ν' sont sur la polaire Δ' de O' par rapport au cercle conjugué au triangle. Soit ω le point d'intersection de Δ' avec OO' , on a

$$H\omega.HO' = HA.HH_1 = \frac{1}{2}HO.HO$$

(H_1 étant le pied de la hauteur issue ω de HA), d'où $H\omega = \frac{1}{2}HO$.

5° Le point ω étant le milieu de OH est le point de concours des droites Δ et Δ' et il décrit visiblement le cercle de neuf points.

2103.

(1908, p. 479.)

Étant données 4 sphères C_1, C_2, C_3, C_4 de centres O_1, O_2, O_3, O_4 , une sphère quelconque Σ coupe les axes radicaux IA_1, IA_2, IA_3, IA_4 de ces sphères prises 3 à 3 en $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4, A'_4$. Les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 , sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S . De même A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S' .

1° Montrer que S et S' peuvent se déduire l'une de l'autre de la façon suivante : leurs centres ω et ω' sont deux points inverses par rapport au tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$ et la somme des puissances du point I par rapport à ces deux sphères reste constante quand Σ varie.

2° Montrer qu'il y a une surface lieu des points ω et ω' tels que S et S' soient orthogonales quel que soit le rayon arbitraire attribué à l'une d'elles et étudier cette surface.

(GILBERT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

1° Prenons le point I comme origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires : soient

$$C_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta_i = 0 \\ (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des sphères C_i ,

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

la sphère Σ et enfin

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + t_1 = 0, \\ S' = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 + t_2 = 0$$

les sphères S et S' .

Soit

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

nous désignerons par U_i, V_i, W_i, Δ_i , les coefficients de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, 1$ (pris dans la ligne i) dans le développement de D .

L'axe radical des sphères C_2, C_3, C_4 a pour équations $\frac{x}{U_1} = \frac{y}{V_1} = \frac{z}{W_1}$ et l'équation aux ρ des points d'intersection de cette droite avec Σ sera

$$\rho^2(U_1^2 + V_1^2 + W_1^2) - 2\rho(aU_1 + bV_1 + cW_1) + d = 0.$$

Soient ρ_4, ρ'_4 les racines de cette équation correspondant aux points A_4 et A'_4 . Le point A_4 sera le centre radical des sphères C_2, C_3, C_4 et S si l'on a

$$\begin{aligned} & -2\rho_4(\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1) + \delta \\ & = -2\rho_4(\alpha_1 U_1 + \gamma_1 V_1 + z_1 W_1) + t_1 \end{aligned}$$

ou puisque $\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 + \Delta_1 = 0$,

$$(1) \quad 2\rho_4(\alpha_1 U_1 + \gamma_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) = t_1 - \delta;$$

nous aurons, de même, si A'_4 est le centre radical de C_2, C_3, C_4, S' ,

$$(2) \quad 2\rho'_4(\alpha_2 U_1 + \gamma_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = t_2 - \delta;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} & 4\rho_4\rho'_4(\alpha_1 U_1 + \gamma_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) \\ & \times (\alpha_2 U_1 + \gamma_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = (t_1 - \delta)(t_2 - \delta) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_1 U_1 + \gamma_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1)(\alpha_2 U_1 + \gamma_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1)}{U_1^2 + V_1^2 + W_1^2} \\ & = \frac{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)}{4d}; \end{aligned}$$

le premier membre représente le produit des distances des points ω et ω' au plan $O_2 O_3 O_4$, on voit de même que le pro-

duit des distances de ces deux points aux plans $O_1 O_3 O_4$, $O_1 O_2 O_4$, $O_1 O_2 O_3$ est égal à $\frac{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)}{4d}$, ce qui prouve **que ces points sont inverses** par rapport au tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Des relations (1) et (2) on déduit la suivante :

$$\begin{aligned} & U_1 \left(\frac{x_1}{t_1 - \delta} + \frac{x_2}{t_2 - \delta} \right) + V_1 \left(\frac{y_1}{t_1 - \delta} + \frac{y_2}{t_2 - \delta} \right) \\ & + W_1 \left(\frac{z_1}{t_1 - \delta} + \frac{z_2}{t_2 - \delta} \right) + \Delta_1 \left[\frac{t_1 + t_2 - 2\delta}{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)} \right] \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho'_4} \right) = \frac{aU_1 + bV_1 + cW_1}{d} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & U_1 \left(\frac{x_1}{t_1 - \delta} + \frac{x_2}{t_2 - \delta} - \frac{a}{d} \right) + V_1 \left(\frac{y_1}{t_1 - \delta} + \frac{y_2}{t_2 - \delta} - \frac{b}{d} \right) \\ & + W_1 \left(\frac{z_1}{t_1 - \delta} + \frac{z_2}{t_2 - \delta} - \frac{c}{d} \right) + \Delta_1 \frac{t_1 + t_2 - 2\delta}{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)} = 0. \end{aligned}$$

Si entre cette relation et les trois relations analogues nous éliminons

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{t_1 - \delta} + \frac{x_2}{t_2 - \delta} - \frac{a}{d}, \\ & \frac{y_1}{t_1 - \delta} + \frac{y_2}{t_2 - \delta} - \frac{b}{d}, \\ & \frac{z_1}{t_1 - \delta} + \frac{z_2}{t_2 - \delta} - \frac{c}{d}, \end{aligned}$$

il vient, en désignant par Δ le déterminant adjoint du déterminant D ,

$$\Delta \frac{t_1 + t_2 - 2\delta}{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)} = 0,$$

D étant par hypothèse non nul, puisque les points O_1, O_2, O_3, O_4 ne sont pas dans un même plan, Δ n'est pas nul et l'on a

$$t_1 + t_2 - 2\delta = 0,$$

ce qui montre que la somme des puissances du point I par rapport à S et S' est constante.

2° Si les sphères S et S' sont orthogonales, on aura

$$(1) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \delta;$$

si nous désignons par

$$P_i = x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i + z \cos \gamma_i - p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les faces du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$, nous aurons, les points ω et ω' étant inverses par rapport à ce tétraèdre,

$$(2) \quad \frac{x_2 \cos \alpha_i + y_2 \cos \beta_i + z_2 \cos \gamma_i - p_i}{x_1 \cos \alpha_i + y_1 \cos \beta_i + z_1 \cos \gamma_i - p_i} = \frac{\lambda}{\lambda};$$

éliminons x_2, y_2, z_2, λ entre les relations (1) et (2), ces relations étant symétriques en $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ le résultat de l'élimination sera la surface lieu *des points* ω et ω' telle que les sphères S et S' soient orthogonales. Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 & \frac{1}{P_1} & p_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 & \frac{1}{P_2} & p_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 & \frac{1}{P_3} & p_3 \\ \cos \alpha_4 & \cos \beta_4 & \cos \gamma_4 & \frac{1}{P_4} & p_4 \\ x & y & z & 0 & \delta \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma P_2 P_3 P_4 \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 & p_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 & p_3 \\ \cos \alpha_4 & \cos \beta_4 & \cos \gamma_4 & p_4 \\ x & y & z & \delta \end{vmatrix} = 0;$$

le lieu cherché est une surface du quatrième ordre passant par les arêtes du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Remarques. — On a

$$I_{\omega}^{-2} + I_{\omega'}^{-2} - R_{\omega}^2 - R_{\omega'}^2 = 2\delta,$$

et si les sphères S et S' sont orthogonales

$$\overline{\omega\omega'}^2 = R_\omega^2 + R_{\omega'}^2,$$

ce qui donne

$$I\overline{\omega}^2 + I\overline{\omega'}^2 - \overline{\omega\omega'}^2 = 2\delta$$

ou encore

$$I\omega I\omega' \cos \widehat{\omega} = \delta,$$

les points ω et ω' étant inverses par rapport au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, cette dernière relation donne une définition géométrique de la surface lieu de ω et ω' (surface qui est visiblement anallagmatique dans l'inversion tétraédrique).

On peut étudier la surface au moyen de cette relation, qui peut s'écrire, en appelant ω'_1 la projection de ω' sur $I\omega$,

$$I\omega I\omega'_1 = \delta.$$

On voit donc que, si ω est un point de la surface, son inverse par rapport au point I, la puissance d'inversion étant δ , étant ω'_1 , le plan perpendiculaire à $I\omega$ en ω'_1 passe par le point ω' inverse de ω par rapport au tétraèdre.

Cette remarque permet, par exemple, de déterminer immédiatement les droites autres que les arêtes du tétraèdre suivant lesquelles la surface considérée coupe les faces de celui-ci. Sur la face $O_2O_3O_4$ par exemple c'est l'intersection de cette face avec le plan perpendiculaire à O_1I au point O'_1 tel que $O_1I.O'_1I = \delta$.