

J. HAAG

Sur une application de la théorie du trièdre mobile

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 67-69

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__67_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'8c]

**SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE
DU TRIÈDRE MOBILE ;**

PAR M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

Soit une courbe gauche (C), sur laquelle on a fixé un système d'abscisses curvilignes. Soit $Mxyz$ le trièdre principal relatif au point M d'abscisse curviligne s . Si l'on considère un point P d'abscisse curviligne $s + h$, les coordonnées x, y, z de ce point par rapport au trièdre précédent peuvent être développées en séries entières en h , pourvu que M ne soit pas un point singulier de (C) et que h soit assez petit. On sait qu'en appelant ρ et τ les rayons de courbure et de torsion relatifs au point M, les coefficients de ces séries s'expriment tous en fonction de ρ, τ et de leurs dérivées successives par rapport à s . Il existe différentes manières de calculer ces coefficients. En voici une qui n'est peut-être pas nouvelle, mais qui semble, en tout cas, assez peu connue.

Les développements cherchés peuvent s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_1 h + \frac{a_2}{2} h^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} h^n + \dots, \\ y = b_1 h + \frac{b_2}{2} h^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} h^n + \dots, \\ z = c_1 h + \frac{c_2}{2} h^2 + \dots + \frac{c_n}{n!} h^n + \dots \end{cases}$$

Imaginons un mouvement du point M sur (C) tel que s soit le temps. Il est facile de voir que a_n, b_n, c_n sont les projections sur Mx, My, Mz de l'accélération $(n-1)^{\text{ième}}$ du point M . Or, étant donnés, d'une façon générale, un trièdre mobile $Oxyz$ et un point Q mobile par rapport à ce trièdre, il est facile de calculer, de proche en proche, les accélérations absolues successives de Q . Supposons, en effet, que l'on connaisse les projections $\gamma_{n,x}, \gamma_{n,y}, \gamma_{n,z}$ de l'accélération $n^{\text{ième}}$ sur Ox, Oy, Oz . Menons par un point fixe O_1 un vecteur $(O_1 \Gamma_n)$ équipollent à cette accélération et un trièdre O_1xyz parallèle à $Oxyz$. L'accélération $(n+1)^{\text{ième}}$ est le vecteur vitesse du point Γ_n ; on a donc les formules de récurrence

$$\gamma_{n+1,x} = \frac{d(\gamma_{n,x})}{dt} + q\gamma_{n,z} - r\gamma_{n,y}, \quad \dots$$

Comme on a

$$\gamma_{0,x} = \frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry, \quad \dots,$$

on voit qu'on pourra calculer $\gamma_{n,x}, \gamma_{n,y}, \gamma_{n,z}$, quel que soit n .

Appliquons ceci au trièdre $Mxyz$, le point Q étant en M . On aura les formules de récurrence

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a'_n - r b_n, \\ b_{n+1} = b'_n + r a_n - p c_n, \\ c_{n+1} = c'_n + p b_n, \end{cases}$$

en appelant a'_n, b'_n, c'_n les dérivées de a_n, b_n, c_n par rapport à s . On a, en outre,

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad p = -\frac{1}{\tau}, \quad r = \frac{1}{\rho}.$$

On possède donc tous les éléments nécessaires pour calculer, de proche en proche, tous les coefficients, a_n, b_n, c_n .

Indiquons les valeurs qui correspondent à $n = 1, 2, 3, 4$. On a immédiatement

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= 0, & c_1 &= 0, \\ a_2 &= 0, & b_2 &= \frac{1}{\rho}, & c_2 &= 0, \\ a_3 &= -\frac{1}{\rho^2}, & b_3 &= -\frac{\rho'}{\rho^2}, & c_3 &= -\frac{1}{\rho\tau}, \\ a_4 &= \frac{3\rho'}{\rho^3}, & b_4 &= -\frac{\rho''}{\rho^2} + \frac{2\rho'^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho\tau^2}, & c_4 &= \frac{2\rho'}{\rho^2\tau} + \frac{\tau'}{\rho\tau^2}. \end{aligned}$$

Comme application, on peut vérifier, par exemple, que le centre I de la sphère osculatrice a pour coordonnées $(0, \rho, -\tau\rho')$ et coïncide avec le point où la droite polaire touche son enveloppe. En substituant les développements (1) dans l'expression

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho y + 2\tau\rho' z$$

et annulant le coefficient de h^4 , on obtient la *condition pour que la sphère osculatrice ait, avec la courbe, un contact du quatrième ordre*; on trouve sans difficulté

$$\tau^2\rho'' + \tau\tau'\rho' + \rho = 0.$$

Or, on vérifie facilement que *cette équation exprime aussi que le point I a une vitesse nulle*. Donc, *si une courbe a un contact du quatrième ordre avec chacune de ses sphères osculatrices, elle est sphérique*.