NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. PLATRIER

Une application de l'équation fonctionnelle de Fredholm

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 508-513

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__508_1>

[H11c]

UNE APPLICATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FREDHOLM;

PAR M. CH. PLATRIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le but de cette Note est la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t^n} dt = f(s),$$

lorsque le noyau K (s, t) est astreint à la condition suivante : *La résolvante* K (s, t, λ) *de l'équation fonction-*

nelle de Fredholm *de noyau* K (s, t) *admet comme dérivée* $n^{\text{ième}}$, *par rapport à* s, *la résolvante* $K_n(s, t, \lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de* Fredholm *de noyau* $\dfrac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n}$.

Nous nous proposons, en premier lieu, de traduire sous forme d'équation la condition ci-dessus. Rappelons tout d'abord les résultats suivants :

1° Le noyau et la résolvante d'une équation de Fredholm sont liés par les relations

$$(2) \qquad -K(s, t) + K(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(s, z) K(z, t, \lambda)\, dz,$$

$$(3) \qquad = \lambda \int_a^b K(z, t) K(s, z, \lambda)\, dz.$$

2° La solution de l'équation de Fredholm

$$(4) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

est

$$(5) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t, \lambda) f(t)\, dt,$$

quand λ n'est pas une constante caractéristique du noyau K (s, t).

Dans la suite, nous nous contenterons du signe $\int$ pour représenter $\int_a^b$, et nous supposerons que λ n'est pas une constante caractéristique du noyau K (s, t).

Ceci posé, considérons l'équation (4) et l'équation (6)

$$(6) \qquad \psi(s) - \lambda \int_a^b \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n\, \partial t^p} \psi(t)\, dt = g(s).$$

Soit $K_{n+p}(s, t, \lambda)$ sa résolvante ; cherchons à exprimer la condition, pour que

$$(7) \qquad K_{n+p}(s, t, \lambda) = \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \, \partial t^p}.$$

En vertu de (2), on a, pour définir $K_{n+p}(s, t, \lambda)$,

$$(8) \quad -\frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \, \partial t^p} + K_{n+p}(s, t, \lambda) = \lambda \int \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \, \partial z^p} K_{n+p}(z, t, \lambda) \, dz,$$

et en dérivant (2) n fois par rapport à s et p fois par rapport à t, on obtient

$$(9) \quad \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \, \partial t^p} + \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \, \partial t^p} = \lambda \int \frac{\partial^n K(s, z)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} \, dz.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (7) soit remplie sera, en vertu de (8) et (9),

$$\int \left\{ \frac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} - \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \, \partial z^p} \frac{\partial^{n+p} K(z, t, \lambda)}{\partial z^n \, \partial t^p} \right\} dz \equiv 0.$$

Elle peut s'écrire encore

$$(10) \quad \left[K(s, z) K(z, t, \lambda) - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t, \lambda)}{\partial z^n} \right] dz = A(s, t, \lambda),$$

avec

$$(11) \quad \begin{aligned} A(s, t, \lambda) = {} & s^{n-1} \mu_1(t) + s^{n-2} \mu_2(t) + \ldots + \mu_n(t) \\ & + t^{p-1} \nu_1(s) + t^{p-2} \nu_2(s) + \ldots + \nu_p(s), \end{aligned}$$

les fonctions μ et ν étant des fonctions de λ.

Notons de suite que si l'on fait $\lambda = 0$ dans l'équation précédente, on a

$$(12) \quad \int \left\{ K(s, z) K(z, t) - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t)}{\partial z^n} \right\} dz = A(s, t, 0) = B(s, t),$$

$B(s, t)$ étant une fonction de forme analogue à $A(s, t, \lambda)$, mais où les fonctions μ et ν sont indépendantes de λ.

Je dis que, réciproquement, *toutes les fois que n ou p sera nul*, la condition (12) entraînera la condition (10).

Dérivons, en effet, n fois par rapport à s l'équation (2)

$$(13)\quad -\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}+\frac{\partial^n K(s,t,\lambda)}{\partial s^n}=\lambda\int\frac{\partial^n K(s,z)}{\partial s^n}K(z,t,\lambda)\,dz.$$

Multiplions l'équation (2) par $K(u,s)\,ds$, l'équation (13) par $\frac{\partial^p K(u,s)}{\partial s^p}ds$, et intégrons la différence entre a et b ; on obtient

$$-B_1(u,t)+A_1(u,t,\lambda)=\lambda\int K(z,t,\lambda)\,B_1(u,z)\,dz,$$

en désignant par $A_1(s,t,\lambda)$, $B_1(s,t)$ les premiers membres des équations (10) et (12).

En se servant de l'équation (3), on démontrerait une relation analogue, et finalement, avec un léger changement de notation, on a les égalités

$$(14)\quad -B_1(s,t)+A_1(s,t,\lambda)=\lambda\int K(z,t,\lambda)\,B_1(s,z)\,dz,$$

$$(15)\quad =\lambda\int K(s,z,\lambda)\,B_1(z,t)\,dz.$$

Ces égalités montrent que, *dans les cas respectifs soit de* $p=0$, *soit de* $n=0$, si $B_1(s,t)$ est de la forme $B(s,t)$, $A_1(s,t,\lambda)$ sera de la forme $A(s,t,\lambda)$, ce qui démontre la proposition réciproque que nous avions en vue.

On arrive ainsi à la proposition suivante : *Pour que la résolvante* $K(s,t,\lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau* $K(s,t)$ *ait comme dérivée* $n^{\text{ième}}$ *par rapport à s la résolvante* $K_n(s,t,\lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau* $\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}$, *il faut et il* *suffit que*

$$(16)\qquad \int K(s,z)\left[K(z,t)-\frac{\partial^n K(z,t)}{\partial z^n}\right]dz = s^{n-1}\mu_1(t)+s^{n-2}\mu_2(t)+\ldots+\mu_p(t),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *étant n fonctions arbitraires de t.*

Ces résultats obtenus, revenons à notre problème primitif, la résolution de l'équation fonctionnelle (2).

En dérivant les deux membres de cette équation n fois par rapport à s, et en posant

$$\psi(s)=\frac{\partial^n\varphi(s)}{\partial s^n},$$

on obtient

$$(17)\qquad \psi(s)-\lambda\int_a^b\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}\psi(t)\,dt=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}.$$

Cette équation est une équation de Fredholm de noyau $\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}$, dont la solution est

$$(18)\qquad \psi(s)=\frac{\partial^n\varphi(s)}{\partial s^n}=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}+\lambda\int K_n(s,t,\lambda)\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\partial t.$$

On en déduit immédiatement

$$(19)\qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\underbrace{\int_0^s ds\int_0^s ds\ldots\int_0^s}_{n\text{ fois}} ds K_n(s,t,\lambda)\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}dt + a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ldots+a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes qu'on déterminerait en substituant dans (1) la valeur (19) de $\varphi(s)$.

Cette détermination, qui donne la solution de (1) dans le cas général, est pénible. Elle devient toutefois très simple quand $K(s,t)$ satisfait à la condition (16).

Dans ce cas, en effet, (18) peut s'écrire

$$(20)\qquad \frac{\partial^n\varphi(s)}{\partial s^n}=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}+\lambda\int\frac{\partial^n K(s,t,\lambda)}{\partial s^n}\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}dt,$$

et (19) s'écrit alors

$$(21)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t,\lambda) \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, remplaçons dans (1) $\varphi(s)$ par sa valeur (21); un leger changement de notation nous donne, en tenant compte de (16),

$$a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n + \lambda \int \left\{ -K(s,t) + K(s,t,\lambda) - \lambda \int K(s,z) K(z,t,\lambda) dz \right\} \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} dz = \lambda^2 \int \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \times A(s,t,\lambda)\, dt,$$

avec

$$A(s,t,\lambda) = B(s,t) + \lambda \int K(z,t,\lambda) B(s,z) dz$$

et

$$B(s,t) = s^{n-1} \mu_1(t) + \ldots + \mu_m(t)$$

Le terme entre accolades $\{\ \}$ est nul en vertu de (2), et en identifiant, dans les deux membres, les coefficients des termes d'une même puissance de s, on obtient les égalités

$$(22)\qquad a_k = \lambda^2 \int_a^b \left\{ \mu_k(t) + \lambda \int_a^b K(z,t,\lambda) \mu_k(z) dz \right\} \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt,$$

avec

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Les égalités (16), (21) et (22) résolvent le problème que nous nous étions proposé.
