

G. VALIRON

**Sur la dérivée logarithmique de certaines
fonctions entières**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 498-508

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__498_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D4a]

**SUR LA DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE
DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;**

PAR M. G. VALIRON.

Les fonctions entières que je considère ici sont des fonctions d'ordre nul, satisfaisant à une condition de croissance. Soit $\rho(x)$ un *exposant net de la suite des zéros*, c'est-à-dire une fonction non croissante, telle

que $\rho(x) \log x$ croît (ou ne décroît pas) : et qu'on ait

$$n \leq r_n^{\rho(r_n)},$$

r_n désignant le module du n^{e} zéro, l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de l'indice n , que j'appellerai *indices principaux* (1).

Je supposerai que la fonction

$$[\rho(x)]^2 \log x,$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

1. Dans ces conditions, soit

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f_1(z)} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{z - a_n}$$

la dérivée logarithmique considérée. Je vais démontrer la proposition suivante :

Il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a l'égalité

$$(1) \quad g(z) = \frac{n}{z} (1 + \varepsilon),$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle considéré, et ε une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{z}$.

Soient, en effet, un indice principal N , r_N le module du zéro correspondant; nous poserons pour simplifier

$$R = r_N, \\ R' = R e^{\frac{1}{\rho(R) \sqrt{\log R}}};$$

(1) L'existence des fonctions $\rho(x)$ est démontrée dans mon Mémoire: *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. LXX, p. 471).

le nombre m des zéros compris entre les cercles de rayons R et R' est

$$m = N' - N,$$

N' étant le nombre des zéros de module inférieur à R' .
Or on a

$$N' \leq R'^{\rho(R')} \leq R'^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}},$$

d'où

$$m \leq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}} - R^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{\log R}} \quad \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon = 0 \right).$$

Appliquons maintenant entre les cercles de rayons R et R' le procédé d'exclusion de M. Boutroux ⁽¹⁾, on pourra trouver des cercles de rayon r compris entre R et R' , tels que $r = \frac{R'}{k}$ (k fini) et tels que si i est le nombre défini par les inégalités

$$r_i < r < r_{i+1},$$

on ait

$$\left. \begin{aligned} r_{i+p} - r &> \frac{R'}{k'm} (p-1) \\ r - r_{i-p} &> \frac{R'}{k'm} p \end{aligned} \right\} \quad k' \text{ fini} \quad \left\{ \begin{aligned} (i+p \leq N') \\ (i-p \geq N). \end{aligned} \right.$$

Il résulte de là que nous aurons

$$\left| \sum_N^{N'} \frac{1}{z - a_n} \right| < \sum_N^{N'} \frac{1}{|r - r_n|} < \frac{k'm}{R'} \sum \frac{1}{p};$$

le dernier Σ est étendu, d'une part, de 1 à $N' - i$, d'autre part de 1 à $i - N$; donc

$$\sum \frac{1}{p} < 2 \sum_1^{\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{p} < 2 \log m$$

⁽¹⁾ Voir mon article *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*).

$\left[\left(\frac{m}{2} \right) \right]$ désigne la partie entière de $\frac{m}{2}$, et par suite :

$$\left| \sum_N^{N'} \frac{1}{2 - a_n} \right| < \frac{2k' m \log m}{R'} < \frac{2k' R^{\rho(R)} \rho(R) \log R (1 + \varepsilon)}{R' \sqrt{\log R}},$$

et encore, comme

$$\rho(R) \sqrt{\log R}$$

tend vers zéro,

$$\left| \sum_N^{N'} \frac{1}{2 - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \quad (\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon = 0).$$

Considérons maintenant les autres termes de $g(z)$.
Pour $n > N'$, on a

$$r = \frac{R'}{k} < \frac{r_n}{k},$$

donc

$$r_n - r > \left(1 - \frac{1}{k} \right) r_n$$

et

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n - r} < \frac{k}{k-1} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n}.$$

Posons $M = R'^{\rho(R')}$; pour $n > M$, nous aurons
comme $\rho(r_n) < \rho(R')$,

$$n < r_n^{\rho(r_n)} < r_n^{\rho(R')}$$

d'où

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{n^{\rho(R')}},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} &< \frac{M - N'}{R'} + \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho(R')}} \\ &< \frac{M - N'}{R'} + \int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{\rho(R')}} = \frac{M - N'}{R'} + \frac{\rho(R') M}{[1 - \rho(R')] R'}. \end{aligned}$$

Comme on a, d'une part,

$$M = R'^{\rho(R)} \leq R^{\rho(R)} \leq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}}$$

et, d'autre part,

$$N' > N = R^{\rho(R)},$$

on voit que l'on obtiendra encore ici

$$\left| \sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \quad \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon = 0 \right).$$

En tenant compte de l'inégalité précédemment obtenue, nous avons

$$\left| \sum_N^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \quad (1).$$

Il reste à considérer l'expression

$$\sum_1^N \frac{1}{z - a_n},$$

comme $\frac{R}{r}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$, nous aurons pour les termes de cette somme

$$\frac{1}{z - a_n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{z},$$

ε_n étant une quantité complexe, inférieure en valeur absolue à un nombre arbitrairement petit; il résulte de là l'égalité

$$\sum_1^N \frac{1}{z - a_n} = \frac{(1 + \varepsilon)N}{z}.$$

(1) Dans tout ce qui suit, ε désigne une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$ ou $\frac{1}{N}$.

ε étant une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{z}$, et finalement

$$g(z) = \frac{(1 + \varepsilon)N}{z}.$$

De plus, en remarquant que le nombre des zéros contenus dans le cercle r est compris entre N et $N' = N(1 + \varepsilon')$, on voit que la proposition énoncée est établie.

2. Il résulte de la proposition précédente que, sur les cercles considérés, la fonction $g(z)$ est comparable à la dérivée logarithmique d'un polynôme de degré n , dont les racines auraient un module très petit par rapport à celui de z . L'analogie se poursuit en ce que, à l'intérieur d'un tel cercle la fonction $f'(z)$ a $n - 1$ racines. En effet comme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) = \frac{(1 + \varepsilon)n}{z},$$

la variation de

$$\log f'(z) - \log f(z) = \log g(z),$$

lorsque z décrit le cercle, est égale à celle de $-\log z$, c'est-à-dire à $-2\pi i$, ce qui démontre la proposition.

On voit que, si les cercles pour lesquels la proposition a lieu sont suffisamment rapprochés, le rapport des nombres des racines de $f(z)$ et $f'(z)$, contenus dans un cercle de rayon r , tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment. C'est ce qui a lieu, en particulier, lorsque le rapport de deux indices principaux successifs tend vers 1.

Il existe d'ailleurs des fonctions pour lesquelles le rapport des nombres des zéros de la fonction et de sa dérivée n'a pas pour limite 1 ; cela a lieu notamment

lorsque, n_a désignant le nombre des zéros de $f(z) + a$ contenus dans le cercle de rayon r , $\frac{n_a}{n_b}$ n'a pas pour limite 1 lorsque r croît indéfiniment ⁽¹⁾, car n' étant le nombre des zéros de $f'(z)$ dans le même cercle, l'un au moins des rapports $\frac{n'}{n_a}$, $\frac{n'}{n_b}$ ne tendra pas vers 1.

3. En nous plaçant toujours dans le cas où $\rho(x)$ vérifie la condition de croissance indiquée, nous allons, en faisant une hypothèse sur la distribution des zéros, préciser la région du plan où l'égalité (1) est vérifiée. Nous supposons qu'on a

$$(2) \quad n + h_n = r_n^{\rho(r_n)} \quad (0 < h_n < H < 1).$$

Posons

$$\begin{aligned} r_i \leq r = |z| \leq r_{i+1}, \\ R e^{\varepsilon(R)} = r \quad (R' = 2r); \end{aligned}$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction tendant vers zéro et qui sera déterminée ultérieurement, de telle façon que le nombre N des zéros de module inférieur à R tende vers i lorsque R croît indéfiniment. En désignant encore par N' le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon R' , les calculs faits précédemment donnent

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{z - \alpha_n} &= \frac{(1 + \varepsilon)N}{z}, \\ \left| \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{1}{z - \alpha_n} \right| &< \frac{\varepsilon' R^{\rho(R)}}{R'}. \end{aligned}$$

(1) Pour l'existence de telles fonctions, voir mon article sur *Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 145). Les cercles, pour lesquels $n_a = n_b$, sont aussi ceux pour lesquels $n' = n_a - 1$ (il s'agit ici des cercles considérés dans les démonstrations du théorème de M. Wiman et du théorème du paragraphe 1).

Considérons la somme restante

$$\left| \sum_{N+1}^N \frac{1}{z - a_n} \right| < \sum_{N+1}^{N'} \frac{1}{|z - a_n|},$$

n étant compris entre N et N' , nous avons

$$r_{n+1} \geq (n+1)^{\frac{1}{\rho^{(N'+1)}}} \geq (n+1)^{\frac{1}{\rho^{(r_n)}}},$$

$$r_n \leq (n+H)^{\frac{1}{\rho^{(r_n)}}},$$

d'où

$$r_{n+1} \geq r_n \left(1 + \frac{1-H}{n+H} \right)^{\frac{1}{\rho^{(r_n)}}} > r_n \left[1 + \frac{1-H}{(n+H)\rho(r_n)} \right],$$

et comme

$$n+H < N', \quad \rho(r_n) < \rho(R);$$

$$r_{n+1} > r_n \left[1 + \frac{1-H}{N'\rho(R)} \right],$$

c'est-à-dire finalement

$$r_{n+1} - r_n > \frac{r_n(1-H)}{N'\rho(R)} > \frac{R(1-H)}{N'\rho(R)}.$$

On aura par suite

$$\sum_{i+2}^N \frac{1}{|z - a_n|} < \frac{N'\rho(R)}{R(1-H)} \log(N'-i)$$

et

$$\sum_N^{i-1} \frac{1}{|z - a_n|} < \frac{N'\rho(R)}{R(1-H)} \log(i-N).$$

Finalement

$$\left| \sum_{N+1}^{N'} \frac{1}{z - a_n} \right| < \left| \frac{1}{z - a_i} \right| + \left| \frac{1}{z - a_{i+1}} \right| + \frac{2N'\rho(R) \log N'}{R(1-H)};$$

comme de plus

$$N' < R^{\rho(R)} \leq (2r)^{\rho(R)} < (1+\varepsilon)R^{\rho(R)} e^{\frac{\rho(R)}{\varepsilon}},$$

le dernier terme du second membre est inférieur à

$$\frac{2(1+\varepsilon)R^{\rho(R)}\left[\log R + \frac{1}{\varepsilon(R)}\right][\rho(R)]^2}{(1-H)R},$$

ou encore à

$$\frac{R^{\rho(R)}}{r} \frac{2(1+\varepsilon)}{1-H} \left\{ [\rho(R)]^2 \log R \left[1 + \frac{1}{\varepsilon(R) \log R} \right] e^{\frac{1}{\varepsilon(R)}} \right\};$$

en prenant

$$\frac{1}{\varepsilon(R)} = \log \frac{1}{\rho(R) \sqrt{\log R}},$$

la quantité entre crochets tend vers zéro, et comme $\frac{\rho(R)}{\varepsilon(R)}$ tend vers zéro la condition $\lim \frac{N'}{N} = 1$ est bien remplie. Nous aurons d'après ce qui précède, en supposant que le point z est extérieur aux cercles de centres a_i et a_{i+1} et de rayon $\frac{r_{i+1} - r_i}{k}$, $k > 1$,

$$\left| \frac{1}{z - a_i} \right| + \left| \frac{1}{z - a_{i+1}} \right| < \frac{\varepsilon_i}{r}.$$

En résumé on aura bien l'égalité

$$(1) \quad g(z) = \frac{(1+\varepsilon)n}{z},$$

valable à l'extérieur d'un cercle de rayon R_0 et de cercles ayant pour centres les zéros a_n et pour rayons $\frac{r_{n+1} - r_n}{k} = r_n \frac{k_1}{n \rho(r_n)}$.

Les conclusions relatives à la dérivée prendront alors la forme remarquable suivante : *Il y a dans le cercle R_0 un nombre de zéros de $f'(z)$ égal à celui de $f(z)$ diminué d'une unité, les autres racines de la dérivée se trouvent dans les cercles ayant pour centres les zéros a_n de $f(z)$ et pour rayon $\frac{k_1 r_n}{n \rho(r_n)}$.*

Autrement, si b_n est le zéro d'ordre n de la dérivée, on a

$$b_{n-1} = a_n \left[1 + \frac{k'}{n \rho(r_n)} \right],$$

k' étant un nombre complexe fini.

On peut également de l'égalité (1) tirer une expression asymptotique de $\log f(z)$; on aura, en effet,

$$\log f(z) = (1 + \varepsilon) \int_{z_0}^z \frac{n dz}{z},$$

le chemin d'intégration ne coupant pas les cercles d'exclusion. Par suite, en formant ce chemin d'arcs de cercles et de droites passant par l'origine, on aura

$$\Re[\log f(z)] = (1 + \varepsilon) \int_{r_0}^r \frac{n dx}{x}.$$

Comme, d'autre part, sur un cercle $[z] = r$, on a

$$\int_z^z \frac{n dz}{z} = n \log \frac{z'}{z},$$

nous obtiendrons, en posant

$$z = r e^{i\varphi},$$

$$\log f(z) = (1 + \varepsilon_1) \int_{r_0}^r \frac{n dx}{x} + i(1 + \varepsilon_2)(\varphi + \varphi_0) \quad (1).$$

4. Les résultats obtenus s'étendent immédiatement aux fonctions méromorphes

$$G(z) = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n} \quad (C < A_n < D);$$

(1) Un calcul direct donnerait

$$f(z) = \left(\frac{z^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \right)^{1+\varepsilon}$$

C et D étant de même signe, et a_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction d'ordre nul $f(z)$, dont l'exposant net satisfait aux conditions précédentes.

On aura ici

$$G(z) = \frac{(1 + \varepsilon) \Sigma A_n}{z},$$

sur une infinité de cercles dans le cas général, et dans tout le plan à l'exclusion de cercles de centres a_n dans le cas où l'on a l'égalité (2). Si l'on pose

$$G(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)},$$

on voit que $f_1(z)$ a un zéro de moins que $f(z)$ dans une infinité de cercles et, dans le cas particulier de l'égalité (2), le zéro c_n de $f_1(z)$ est donné par l'égalité

$$c_n = a_{n+1} \left[1 + \frac{k'}{n \rho(r_n)} \right].$$