

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 423-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__423_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère les surfaces (S) et (S') qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont res-*

pectivement pour équation

$$(S) \quad x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha,$$

$$(S') \quad x^2 + y^2 - ax = 0,$$

α et a étant des constantes.

1° Quelles sont ces surfaces? Figurer la projection de leur intersection sur le plan xOz .

2° Volume situé au-dessus du plan $z = 0$, au-dessous de la surface (S) et à l'intérieur de la surface (S'). L'axe Oz est supposé vertical.

3° Centre de gravité de ce volume supposé homogène.

II. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad 2xy'y'' + 1 + y'^2 = 0.$$

2° Construire la courbe intégrale (C) qui passe par $x = 1$, $y = 1$ et dont la tangente en ce point est parallèle à Ox .

Montrer que la courbe (C) peut être représentée par les équations

$$x = \sin^2 t, \quad y = t + \sin t \cos t,$$

où t est un paramètre variable.

3° Comment peut-on déduire de la courbe (C) toutes les autres courbes intégrales de l'équation (E)?

4° Développée de la courbe (C).

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Un point M, de masse égale à 1, mobile sur une droite, est attiré vers un point fixe O de la droite par une force $2 OM$. Le point M est soumis en outre à une résistance dirigée en sens inverse de la vitesse et égale au double de la valeur absolue de cette vitesse. Les unités choisies sont celles du système C. G. S.

1° Trouver le mouvement de M. Étudier ce mouvement.

2° On suppose que, pour la position initiale M_0 du mobile, la vitesse initiale est nulle et OM_0 est égal à 10. Calculer la limite de la somme des chemins parcourus par le mobile lorsque le temps croît indéfiniment.

II. 1° Combien l'équation

$$e^{x-1} - x - \frac{1}{e} = 0$$

a-t-elle de racines?

2° Calculer ces racines à $\frac{1}{100}$ près.

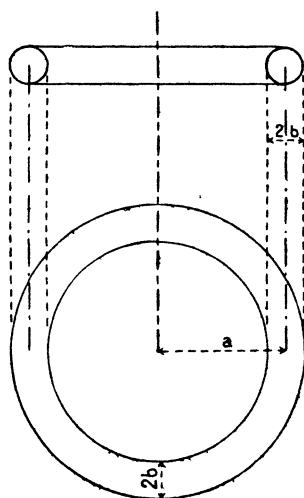
(Juin 1910.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — 1° Vecteur tourbillon d'un champ vectoriel dérivable; théorème d'Ampère-Stokes; invariance du vecteur tourbillon; conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression $X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$ soit une différentielle exacte, en supposant au préalable que les fonctions X, Y, Z , des variables x, y, z admettent des dérivées partielles.

2° Faisceau de rayons à deux paramètres; il n'existe pas en général de surface qui leur soit normale; condition pour qu'il en soit ainsi; si cette condition est satisfaite pour un faisceau, elle sera également satisfaite pour le faisceau provenant de la réflexion ou de la réfraction sur une surface quelconque.

PROBLÈME. — x, y, z désignant les coordonnées carté-



siennes rectangulaires d'un point M , trouver la surface intégrale la plus générale qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$2yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} + 3xy = 0.$$

Particulariser la solution de manière que la surface intégrale contienne le cercle

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x^2 + y^2 - y &= 0. \end{aligned}$$

Définition géométrique de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Déterminer un polynôme du quatrième degré par les cinq valeurs 0, -1, 0, +1, 0 que doit prendre ce polynôme en correspondance avec les valeurs respectives de la variable x :

$$-2, -1, 0, +1, +2.$$

2° Calculer le moment d'inertie d'un tore homogène par rapport à son axe de révolution.

Densité cubique de la matière du tore = 1.

Rayon du cercle décrit par le centre du cercle générateur = a .

Rayon du cercle générateur = b .

(Juillet 1911.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient Ox , Oy deux axes rectangulaires. On demande de déterminer dans le plan xOy une courbe C telle que si l'on mène en un point quelconque M de cette courbe la tangente MT et la normale MN , on ait, entre les abscisses X_t , X_n des deux points où ces droites rencontrent l'axe Ox , la relation

$$X_t - X_n = 2a,$$

a étant une constante positive donnée.

En désignant par θ l'angle aigu positif ou négatif que fait la normale MN avec Ox , exprimer les coordonnées du point M en fonction de θ . Toutes les courbes jouissant de la propriété en question se déduisent de l'une d'entre elles par une simple translation parallèle à Ox . Construire celle qui, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, donne une abscisse nulle ($x = 0$) pour le point M correspondant. Calculer la longueur de l'arc compris entre les deux points qui correspondent à $\theta = 0$ et à $\theta = \frac{\pi}{4}$. Déterminer le rayon de courbure pour chaque valeur de θ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne les deux ellipses qui, en coordonnées rectangulaires, ont pour équations

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{12} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} - 1 = 0.$$

On demande de calculer à 0,001 près l'aire commune à ces deux ellipses.

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Exposer la méthode d'intégration d'une fraction rationnelle en supposant connues les racines du dénominateur.

II. Déterminer l'ordonnée y d'un point d'une courbe en fonction de l'abscisse x , de telle manière que, en tout point de cette courbe, le rayon de courbure R soit égal au carré de la dérivée seconde de y par rapport à x , c'est-à-dire

$$R = y''^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère le cercle C dont le diamètre OA est égal à l'unité.

Par le point O on fait passer une sécante variable OP sur laquelle on porte, à partir de O , une longueur OM telle que

$$OM = \sqrt{OP}.$$

Le lieu du point M est une courbe γ qui, en tournant autour de OA , engendre une surface de révolution S . On demande d'évaluer :

1° Le volume du solide limité par la surface S ;

2° L'aire de la surface S .

(Novembre 1910.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Les axes de coordonnées Ox , Oy , étant supposés rectangulaires, on considère la chaînette ayant pour équation

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Soient P un point de cette courbe, H sa projection sur OX, (C) le cercle de centre P et de rayon PH.

L'enveloppe de ce cercle (C) se compose : 1° de l'axe OX, qu'il touche au point H; 2° d'une certaine courbe (S), qu'on demande de déterminer, et qu'il touche en un point M.

Construire cette courbe (S).

Vérifier que la distance des deux points H et M est constante.

Montrer que la longueur de l'arc décrit par le point M sur la courbe (S) est égale à la longueur du segment rectiligne décrit pendant le même temps par le point H sur l'axe OX.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les axes de coordonnées OX, OY étant supposés rectangulaires, un point mobile (x, y) décrit la parabole donnée

$$y^2 = 2px.$$

Si, à partir de l'origine O, on mène un vecteur équipollent au vecteur vitesse. l'extrémité (a, b) de ce vecteur équipollent décrit la parabole également donnée (hodographe)

$$a^2 = 2qb.$$

Cela posé, on demande :

- 1° De calculer $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ en fonction de y ;
- 2° De montrer que la vitesse aréolaire par rapport à l'origine est constante;
- 3° De calculer x et y en fonction de t .

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Les axes de coordonnées OX, OY étant supposés rectangulaires :

- 1° Construire la courbe ayant pour équation

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

2° On considère seulement la portion de la courbe précédente qui correspond aux valeurs positives de x . Soient, sur cette portion de courbe :

: A le point d'ordonnée maximum;

M_1 le point d'abscisse x_1 ;

M_2 le point d'abscisse x_2 , qu'on supposera situé à droite du point A.

Déterminer la relation qui doit exister entre x_1 et x_2 pour que l'aire comprise entre l'arc OM_1 , l'axe des x et les ordonnées des points O et M_1 , soit égale à l'aire analogue comprise entre l'arc AM_2 , l'axe des x , et les ordonnées des points A et M_2 .

3° Étudier comment varie la distance mutuelle des projections des points M_1 et M_2 sur OX, lorsque ces deux points varient en satisfaisant à la condition ci-dessus spécifiée. Montrer que cette distance possède un minimum.

4° En désignant par M'_1 et M'_2 les positions des points M_1 et M_2 qui correspondent à ce minimum, calculer le volume engendré par la rotation autour de OX de l'arc $M'_1M'_2$ complété par les ordonnées des points extrêmes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y' + y = 2e^x$$

(e désigne la base des logarithmes népériens).

2° Indiquer les diverses formes que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation précédente ;

3° Quel est le lieu des points d'inflexion de ces courbes, et le lieu des points où la tangente est parallèle à l'axe des x ?

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Calculer la constante λ de manière que l'expression

$$\frac{x^2}{x + \lambda y} dx + \frac{3y^2}{y + \lambda x} dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$, et déterminer cette fonction.

En désignant par OX, OY deux axes rectangulaires, construire les courbes

$$U(x, y) = \text{const.},$$

ainsi que leurs trajectoires orthogonales.

II. Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ :

1° Déterminer toutes les courbes intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dz} = -x + y - 2\alpha^2 z,$$

$$\frac{dy}{dz} = 2x - 2z^2 + 2(\alpha + 1)z + 2x^2 - \alpha + 2,$$

où α désigne une constante.

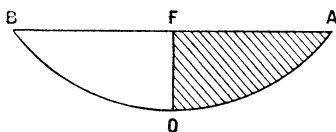
2° Déterminer celle de ces courbes qui passe par le point

$$x = 0, \quad y = -x, \quad z = 0;$$

montrer que cette courbe est une parabole, et former l'équation de son plan P.

3° Trouver l'enveloppe des plans P lorsque α varie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnée une parabole dont le sommet O et le foyer F sont distants de 1^m, on considère la



corde AFB, perpendiculaire en F sur OF, et l'on demande de calculer :

1° En décimètres carrés l'aire de la portion de paraboloïde engendrée par la rotation de l'arc OA autour de OF;

2° En décimètres cubes le volume du solide engendré par la rotation de l'aire FAOF autour de OF;

3° En décimètres la longueur de l'arc AOB de la parabole.

(Juin 1911.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Construire la courbe

$$(x - y)^2 = x + y.$$

Calculer son rayon de courbure à l'origine.

II. Intégrer l'équation

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = \sin x;$$

déterminer la courbe intégrale de façon qu'elle ait un point d'inflexion à l'origine, la tangente d'inflexion étant l'axe des x .

III. On considère dans l'espace une courbe C , la tangente T et le plan normal P en un point. La tangente coupe le plan des xy en un point A et le plan normal coupe le même plan suivant une droite D ; déterminer la courbe C de façon que le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur D soit un point fixe qu'on pourra supposer placé à l'origine des coordonnées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On considère la fonction

$$y = \int_0^x \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe. Points d'inflexion.

Mener par l'origine des coordonnées les tangentes à la courbe. Calculer à 0,01 près l'abscisse de celui des points de contact qui a la plus petite abscisse positive.

Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)}.$$

(Novembre 1910.)