

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 377-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__377_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1579.

(1888, p. 112.)

Si les nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont tels que l'on ait $(a_n - n) = a$ pour n infini, on aura également

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2} \right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n} = e^a.$$

E. CESARO.

SOLUTION,

Par M. G. POLYA.

Prenons

$$a_1 = 1 + r_1, \quad a_2 = 2 + r_2, \quad \dots, \quad a_n = n + r_n, \quad \dots$$

et nous avons à examiner l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2} \right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{(1 + r_1)(2 + r_2)^2 \dots (n + r_n)^n} \\ &= \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \dots n^n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_1}{1}\right) \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n}. \end{aligned}$$

Par hypothèse

$$\begin{aligned} \lim r_n &= a, \\ \lim \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n &= e^a; \end{aligned}$$

on en conclut aisément :

$$\lim \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_1}{1}\right) \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{r_3}{3}\right)^3 \dots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n} = e^a.$$

Reste à prouver que la limite du premier facteur est 1.

$$\frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[1^1 2^2 3^3 \dots n^n]{} = e^{\frac{n}{4} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{2}{n}} \left(\frac{3}{n} \right)^{\frac{3}{n}} \dots \left(\frac{n}{n} \right)^{\frac{n}{n}}} \\ = e^{n \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \log \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \log \frac{n}{n} \right) \right]}.$$

On remarque que

$$\int_0^1 x \log x \, dx = \left| \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

et l'exposant devient

$$n \left[\left(\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \log \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \log \frac{n}{n} \right) \frac{1}{n} - \int_0^1 x \log x \, dx \right] \\ = \sum_{\lambda=1}^n n \int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}} \left(\frac{\lambda}{n} \log \frac{\lambda}{n} - x \log x \right) dx.$$

I. $\lambda = 1$.

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} - x \log x \right) dx = \frac{1}{2n} \log \frac{1}{n} + \frac{1}{4n}.$$

II. $\lambda = 2, 3, \dots, n$.

$$x \log x = \frac{\lambda}{n} \log \frac{\lambda}{n} + \left(x - \frac{\lambda}{n} \right) \left(1 + \log \frac{\lambda}{n} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\lambda}{n} \right)^2 \frac{1}{\frac{\lambda}{n} + \theta \left(x - \frac{\lambda}{n} \right)}, \\ (0 < \theta < 1).$$

Quand x est resserré dans l'intervalle $\left(\frac{\lambda-1}{n}, \frac{\lambda}{n} \right)$

$$\frac{1}{\frac{\lambda}{n} + \theta \left(x - \frac{\lambda}{n} \right)} < \frac{n}{\lambda - 1} \quad (\lambda > 1).$$

En intégrant

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda=1}^n n \int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}} \left(\frac{\lambda}{n} \log \frac{\lambda}{n} - x \log x \right) dx \\
 &= \frac{1}{2n} \log \frac{1}{n} + \frac{1}{4n} + \sum_{\lambda=2}^n n \left[\frac{1}{2n^2} \left(1 + \log \frac{\lambda}{n} \right) - \frac{\theta'}{6n^3} \frac{n}{\lambda-1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \log \frac{\lambda}{n} \right) - \frac{\theta' \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda}}{6n} - \frac{1}{4n} \\
 & \quad \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}}{n} < \frac{1 + \log(n-1)}{n}
 \end{aligned}$$

devient nul pour n infini; nous n'avons qu'à chercher la limite de

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \left(1 + \log \frac{\lambda}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}{n} \right).$$

Mais d'après la formule de Stirling

$$\begin{aligned}
 \lim \frac{1.2.3\dots n}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} &= \sqrt{2\pi}, \\
 \lim \frac{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}{n e^{-1} n^{\frac{1}{2n}}} &= 1, \quad \lim \log \frac{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}{n} = -1.
 \end{aligned}$$

En rapprochant les extrêmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1.2.3\dots n} = \lim e^{\frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{\sqrt[n]{1.2.3\dots n}}{n} \right)} = 1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — En supposant $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continus,

il est aisé de remarquer l'égalité

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \left[f\left(\frac{b-a}{n} + a\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f\left(2\frac{b-a}{n} + a\right) + \dots + f(b) \right] \frac{b-a}{n} - \int_a^b f(x) dx \right\} \\ = \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x) dx. \end{aligned}$$

Dans la démonstration précédente on était obligé d'établir la même égalité par un calcul plus détaillé, parce que ces conditions simples manquaient d'être remplies.

Autre démonstration (1). — Soit $f(x)$ une fonction telle que $f'''(x)$ converge vers zéro pour x infini, conservant le même signe, toujours diminuant en valeur absolue.

$$\int_0^x f(x) dx = F(x),$$

$$\begin{aligned} F\left(n - \frac{1}{2}\right) &= F(n) - \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2!2^2}f'(n) \\ &\quad - \frac{1}{3!2^3}f''(n) + \frac{1}{4!2^4}f'''(n - \frac{\Theta}{2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(n - \frac{1}{2}\right) &= F(n-1) + \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2!2^2}f'(n-1) \\ &\quad + \frac{1}{3!2^3}f''(n-1) + \frac{1}{4!2^4}f'''(n-1 + \frac{\Theta'}{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(n) - F(n-1) &= \frac{1}{2}[f(n-1) + f(n)] \\ &\quad + \frac{1}{2!2^2}[f'(n) - f'(n-1)] - \frac{1}{3!2^3}[f''(n-1) + f''(n)] \\ &= \frac{1}{4!2^4}\left[f'''(n-1 + \frac{\Theta'}{2}) - f'''(n - \frac{\Theta}{2})\right]. \end{aligned}$$

(1) Voir CÉSARO, *Lehrb. d. alg. Analysis* (p. 273), d'où nous avons empruntée la méthode suivie.

Faisons $n = 2, 3, \dots, n$.

$$\begin{aligned} F(n) - F(1) &= \left[\frac{1}{2} f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2! 2^2} [f'(n) - f'(1)] - \frac{1}{3! 2^2} \left[\frac{1}{2} f''(1) + f''(2) + \dots \right. \\ &\quad \left. + f''(n-1) + \frac{1}{2} f''(n) \right] \\ &= \frac{1}{4! 2^4} \left[f''' \left(1 + \frac{\theta'}{2} \right) - f''' \left(2 - \frac{\theta''}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + f''' \left(2 + \frac{\theta'''}{2} \right) - \dots - f''' \left(n - \frac{\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

La série à droite converge, ayant des termes à signes alternés et décroissants sans limite; c'est-à-dire, l'expression à gauche a une limite finie et déterminée pour n infini. Posons

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}, & f(x) &= x \log x, \\ f'(x) &= 1 + \log x, & f''(x) &= \frac{1}{x}, & f'''(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

En appliquant le résultat obtenu, il est facile de montrer que

$$\frac{\frac{n^2}{2} \log n - \frac{n^2}{4} - \left[1 \log 1 + 2 \log 2 + 3 \log 3 + \dots + (n-1) \log (n-1) + \frac{1}{2} n \log n \right]}{n}$$

tend vers zéro pour n infini.

C. Q. F. D.

1580.

(1888, p. 112.)

Si dans la question précédente, on fait

$$b_n = \frac{2}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

on a

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{e}{n^2} \right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \dots b_n^n} = e^{2a+1}.$$

E. CESARQ.

SOLUTION,

Par M. G. POLYA.

On fait

$$a_1 = 1 + r_1, \quad a_2 = 2 + r_2, \quad \dots, \quad a_n = n + r_n,$$

$$b_1 = \frac{2}{1}(1 + r_1), \quad b_2 = \frac{2}{2}(1 + 2 + r_1 + r_2) \quad \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{n}(1 + 2 + \dots + n + r_1 + r_2 + \dots + r_n),$$

$$b_1 = 1 + 1 + 2r_1, \quad b_2 = 2 + 1 + 2 \frac{r_1 + r_2}{n},$$

$$b_n = n + 1 + 2 \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}.$$

Comme dans la question précédente

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2} \right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \dots b_n^n} \\ = \lim \frac{e^{\frac{n}{4}}}{\frac{n+1}{n^2}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \dots n^n} \\ \times \lim \sqrt[n]{(1 + 1 + 2r_1) \dots \left(1 + 2 \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} \right)^n} \\ = 1 \times e^{1+2a}. \end{aligned}$$

1661.

(1894, p. 1.)

Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession $a_1, a_2, a_3, \dots$ tend vers une limite finie et déterminée k , on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_1} a_2^{u_2} a_3^{u_3} \dots a_n^{u_n}} = k^s,$$

$u_1, u_2, u_3, \dots$ étant les termes d'une série convergente quelconque dont la somme est 1.

SOLUTION,

Par M. G. POLYA.

Posons

$$\log a_1 = \alpha_1, \quad \log a_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \log a_n = \alpha_n, \quad \dots$$

$$\lim \alpha_n = \log k.$$

Le logarithme de l'expression donnée est

$$\frac{\alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n-1} + \alpha_3 u_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} u_2 + \alpha_n u_1}{n}$$

$$= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) u_n + (\alpha_2 - \alpha_3) (u_n + u_{n-1}) + \dots}{n}$$

$$+ \frac{(\alpha_{n-1} - \alpha_n) (u_2 + u_3 + \dots + u_n)}{n}$$

$$+ \frac{\alpha_n (u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{n}.$$

Le second membre converge vers

$$\lim \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \dots + \alpha_n - \alpha_{n-1}}{n} (u_1 + \dots + u_n)$$

$$= \lim \frac{\alpha_n - \alpha_1}{n} \lim (u_1 + \dots + u_n)$$

$$= s \log k.$$

Je dis que le premier converge vers 0; soit :

$$A \geq |\alpha_i - \alpha_{i-1}| \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$S \geq |u_{i+1} + u_{i+2} + \dots + u_k| = |s_k - s_i| \text{ pour } i, k = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

N un nombre entier choisi de manière que

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_v| \leq \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour $\mu, v = N+1, N+2, N+3, \dots$; tous les trois nombres existent, par hypothèse. Le premier membre est donc plus petit que

$$\frac{(N-1)AS}{n} + \frac{A(n-N)}{n} \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour tous les $n = N+1, N+2, \dots$; alors on prendra n si

(384)

grand qu'on ait

$$\frac{(N-1)AS}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$