

ARNAUD DENJOY

Démonstration d'un théorème sur les séries à termes positifs

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11 (1911), p. 272-273

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__272_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D2a α]

**DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES SÉRIES
A TERMES POSITIFS;**

PAR M. ARNAUD DENJOY.

On sait que, dans une série convergente u_n à termes positifs et JAMAIS CROISSANTS avec n , le produit $n u_n$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

Voici une démonstration qui me paraît fondée sur la vraie raison de ce fait :

ϵ étant un nombre arbitrairement donné à l'avance, la convergence de la série équivaut à l'existence d'un

(273)

nombre p tel que

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit n supérieur à p . D'après l'hypothèse de la non-croissance des termes de la série, on a

$$u_{p+1} \geq u_{p+2} \geq \dots \geq u_n.$$

Donc

$$(n - p)u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si donc

$$n > 2p,$$

on a

$$nu_n < \varepsilon$$

d'après

$$n - p > \frac{n}{2}.$$

Donc, nu_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. C. Q. F. D.

On sait que la condition de la non-croissance de u_n est essentielle. Si elle n'est pas exigée, u_n n'est assujéti qu'à tendre vers zéro. (Voir BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*.) Par exemple, on aura

$$nu_n = \sqrt{n},$$

pour une infinité de valeurs de n , si, dans une série convergente à termes positifs, on remplace le terme dont le rang est p^3 par $\frac{1}{p^2}$. Les termes substitués formant une série convergente, la série modifiée est encore convergente, sans que nu_n tende vers zéro.